

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

**Сборник задач
студенческих олимпиад
по высшей математике
(2005 – 2011)**

МИНСК 2012

2005

- [illegible]

2006 год

[illegible]

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) < 0. \quad (5 \text{ баллов})$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \textbf{(5 баллов)}$$

4. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 2n})$. (7 баллов)

5. Доказать, что $\cos^2 x \cdot \sin x > -0, (6)$ при $x \in [-\pi; \pi]$. (6 баллов)

6. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$. (6 баллов)

7. Составить уравнение касательной к графику функции $y = (6x + 7)^{3/2} - 9x + 4$, если известно, что на этой касательной нет ни одной точки с равными координатами. **(8 баллов)**

Олимпиада по математике
Белорусского государственного экономического
университета

2007

1. Числа 53295, 67507, 88825, 81719, 39083 делятся на 3553. Не вычисляя определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix},$$

доказать, что он делится на 3553.

(6 баллов)

2. Найти все матрицы второго порядка с ненулевыми элементами, квадрат которых равен нулевой матрице.

(5 баллов)

3. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 1 : 4$, на стороне DC взята точка K так, что $DK : KC = 3 : 4$. Разложить вектор $\overline{AC}$ по векторам $\overline{AM}$ и $\overline{AK}$.

(5 баллов)

4. Через точку $M(-1; 2)$ провести прямую, расстояние от точки $N(6; 1)$ до которой равно 5.

(5 баллов)

5. Записать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке, ближайшей к точке $M_0(2; 0,5)$.

(6 баллов)

6. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{1/n}$, $a > 0$.

(6 баллов)

7. Найти все положительные числа a такие, что неравенство $a^x \geq ax$ выполняется при всех $x > 0$.

(7 баллов)

2008 год

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

[illegible]

5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n + b}$.

6. Кондитерская фабрика может реализовывать свою продукцию (конфеты) двумя способами: через магазины и через торговых агентов. Торговые издержки при продаже x кг конфет через магазин составляют $1,5x^2$ ден. ед., а при продаже y кг конфет через торговых агентов составляют $0,5y^2$ ден.ед. В сутки фабрика производит 5000 кг конфет. Как организовать продажу конфет, чтобы торговые издержки были минимальными? **(6 баллов)**

7. Доказать, что функция $y = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ есть константа при $x \geq 1$ и найти ее. **(6 баллов)**

**Олимпиада по математике
Белорусского государственного экономического
университета**

2009

1. На плоскости расположены 3 точки $A(3-t; 6+2t)$, $B(1+t; 3-t)$, $C(t-1; 1)$. При каких значениях t из точки A не видна точка C .

(5 баллов)

2. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & x & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0.$$

(6 баллов)

3. Дан треугольник ABC . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$. Доказать, что $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}) < 0$.

(7 баллов)

4. Из приречного города A надо направлять грузы в пункт B , расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега. Под каким углом следует провести шоссе из пункта B к реке, чтобы доставка грузов из города A в пункт B обходилась возможно дешевле, если тариф по реке вдвое меньше, чем по шоссе?

(7 баллов)

5. Найти x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - (n-1)^x}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = 2008$.

(7 баллов)

6. Найти все дифференцируемые на R функции, удовлетворяющие при любых $x, y \in R$ равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(8 баллов)

**Олимпиада по математике
Белорусского государственного экономического
университета
2010**

1. Даны два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Описать множество точек D , таких, что $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, где α и β – положительные числа. **(3 балла)**
2. Доказать, что на любой прямой, параллельной прямой $y = \sqrt{3} \cdot x$, не может лежать более одной точки с рациональными координатами. **(4 балла)**
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_n + x_{n+1} = b_1, \\ x_{n-1} + x_{n+1} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_{n+1} = b_n, \\ a(x_1 + x_2 + \dots x_n) - x_{n+1} = 0. \end{cases} \quad \textbf{(7 баллов)}$$

4. В скачках принимают участие три лошади. На победу первой лошади ставки принимаются из расчета 4:1 (это значит, что если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет поставленные деньги), на победу второй – 3:1, на победу третьей – k :1. При каком наименьшем целом k можно так распределить ставки, чтобы при любом исходе скачек остаться в выигрыше? **(8 баллов)**
5. Найти такое значение x , что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) \right) = 2010. \quad \textbf{(7 баллов)}$$

6. На прямой $y = 2x - 8$ найти точку, через которую можно провести две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2/8$. **(7 баллов)**
7. Функция $f(x)$ имеет производную в точке a . Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) / f(a) \right)^n. \quad \textbf{(9 баллов)}$$

2011

1. Найти все a , при которых множество

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x, y) : x - y + a \geq 0\}$$

содержит только одну точку. Указать эту точку.

2. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(4; -1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины.

3. Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{array} \right.$$

4. Показать, что касательная к графику функции $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a+b)^{2x+a+b}}{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$.

7. Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что все суммы $a_i + a_j$, $i \leq j$, различны. Доказать, что $a_n \geq \frac{n^2}{4}$.

**Решения задач математической олимпиады БГЭУ
2005**

1. Складывая все уравнения системы, получим уравнение $(n-1) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n$, откуда вытекает

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$
 Вычитая из последнего равенства поочеред-

но все уравнения системы, находим $x_k = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - k$, $k = 1, \dots, n$.

2. По условию, $\vec{a} + \vec{b} = \alpha \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} = \beta \vec{a}$. Вычитая из первого равенства второе, получим $\vec{a} - \vec{c} = \alpha \vec{c} - \beta \vec{a}$, откуда $(1 + \beta)\vec{a} = (1 + \alpha)\vec{b}$ (1). Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, то (1) возможно лишь при $\alpha = \beta = -1$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, следовательно, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0$.

3. Уравнение искомой прямой будем составлять в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях. Для

определения a и b составляем систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1 \\ |ab| = 6 \end{cases}$$
, решая

которую, получим $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -4 \end{cases}$ и $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Получаем уравнения двух прямых: $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-4} = 1$ и $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$,

или $y = \frac{8}{3}x - 4$; $y = \frac{2}{3}x + 2$.

4. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n} \cos \frac{\pi}{2^n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на 2, опять применим формулу синуса двойного аргумента, и так далее, пока не получим

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \left[\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ при } n \rightarrow \infty \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}.$$

5. Обозначим $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$. Производная

$f'(x) = x(1 - e^{-x}) \geq 0$ при всех $x \in R$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь единственное решение. Подбором находим его корень $x = 0$.

6. Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = 1$ имеет вид: $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Найдем $f(1)$, $f'(1)$. Подставим $x = 1$ в заданное равенство: $f(1) - 4f(-1) = -9$. Так как $y = f(x)$ — четная функция, то $f(-1) = f(1)$ и $f(1) = 3$.

Продифференцируем исходное равенство:

$$f'(2x^3 - x) \cdot (6x^2 - 1) - 8x \cdot f(x^2 - x - 1) - 4x^2 \cdot f'(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) =$$

$$= 40x^4 - 24x^2 - 22x. \text{ Положим } x = 1: 5f'(1) - 8f(-1) - 4f'(-1) = -6.$$

Так как $f(-1) = 3$, то $5f'(1) - 4f'(-1) = 18$ (2).

Продифференцировав равенство $f(x) = f(-x)$, получим $f'(x) = -f'(-x)$, следовательно, $f'(-1) = -f'(1)$. Подставляя в (2), находим $f'(1) = 2$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид $y = 3 + 2(x - 1)$ или $y = 2x + 1$.

7. Имеем неопределенность вида ∞^0 . Обозначим искомый предел через A . Тогда

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{применяем} \\ \text{правило Лопиталя} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(2x+1)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(2x+1)^2}}{\sin \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}. \end{aligned}$$

Преобразуем знаменатель: $\sin \frac{2\pi x}{2x+1} = \sin \frac{2\pi x + \pi - \pi}{2x+1} =$
 $= \sin \frac{\pi(2x+1) - \pi}{2x+1} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2x+1} \right) = \left[\sin \frac{\pi}{2x+1} \sim \frac{\pi}{2x+1} \text{ при } x \rightarrow \infty \right],$

$$\text{Тогда } \ln A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{\frac{\pi}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2x+1} = 0.$$

Следовательно, $A = e^0 = 1$.

Решения задач олимпиады по математике БГЭУ

2006 год

1. Сложим все уравнения системы:

$$(1 + 2 + \dots + n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (1).$$

Вычтем из второго уравнения системы первое:

$$(n-1)x_1 - x_2 - \dots - x_n = a_2 - a_1 \quad (2).$$

Сложив (1) и (2), получим $nx_1 = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i=1}^n a_i + a_2 - a_1$, откуда нахо-

дим $x_1 = \frac{2}{n^3 + n^2} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{a_2 - a_1}{n}$. Аналогично находим оставшиеся неизвестные. Таким образом,

$$x_k = \frac{2}{n^3 + n^2} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{a_{k+1} - a_k}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$x_n = \frac{2}{n^3 + n^2} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{a_1 - a_n}{n}.$$

2. Обозначим $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CA} = \vec{c}$. Очевидно, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, и $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$. Используя свойства скалярного произведения, получаем: $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a}) = 0$, или

$$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a}) = -\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) < 0.$$

3. Пусть уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, тогда $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, $y_3 = kx_3 + b$, и

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ kx_1 + b & kx_2 + b & kx_3 + b \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к последней строке определителя первую, умноженную на $-b$, получим определитель с двумя пропорциональными строками, значение которого равно 0.

$$\begin{aligned}
 4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n} - \pi n \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi (\sqrt{n^2 + 2n} - n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) = \\
 &= \sin^2 \left(\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) = \sin^2 \pi = 0.
 \end{aligned}$$

5. Найдем наименьшее значение функции $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. Предварительно преобразуем: $f(x) = (1 - \sin^2 x) \sin x = \sin x - \sin^3 x$. Найдем производную $f'(x) = \cos x - 3\sin^2 x \cos x$, а затем критические точки: $\cos x \cdot (1 - 3\sin^2 x) = 0$, $\cos x = 0$ или $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда получаем $x = \pm \frac{\pi}{2}$; $x = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi$.

Вычисляя значения функции в найденных точках и на концах отрезка, находим $\min_{x \in [-\pi; \pi]} f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} > -\frac{2}{3} = -0,6$, что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned}
 6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x] &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1) \ln(x+2) - (x+1) \ln(x+1) - \\
 &\quad - (x \ln(x+1) - x \ln x) + \ln(x+2) - \ln(x+1)] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{x+1} - \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x + \ln \frac{x+2}{x+1} \right] = \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} - \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x + \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \ln e - \ln e + \ln 1 = 0.
 \end{aligned}$$

7. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Так как на касательной нет ни одной точки с равными координатами, то она не пересекает прямую $y = x$, то есть параллельна ей. Точку касания определим из условия $f'(x_0) = 1$. Получим уравнение $9\sqrt{6x+7} - 9 = 1$, решив которое, найдем $x_0 = -\frac{467}{486}$. Уравнение касательной: $y = x + \frac{6269}{162}$.

Решения задач олимпиады по математике БГЭУ

2007 год

1. Прибавим к последнему столбцу определителя первый, умноженный на 10000, второй, умноженный на 1000, третий, умноженный на 100 и четвертый, умноженный на 10, тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 53295 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 67507 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 88825 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 81719 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 39083 \end{vmatrix}.$$

Число 3553 является общим множителем элементов последнего столбца, его можно вынести за знак определителя, следовательно определитель делится на 3553.

2. Пусть $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — искомая матрица.

$$\text{Тогда } A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}.$$

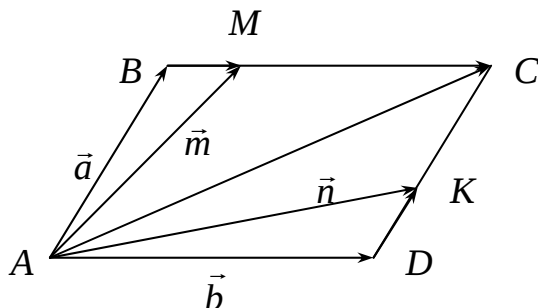
$$\text{Получим систему уравнений } \begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ ab + bd = 0, \\ ca + dc = 0, \\ cb + d^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ b(a + d) = 0, \\ c(a + d) = 0, \\ cb + d^2 = 0. \end{cases}$$

Так как $b \neq 0$ и $c \neq 0$, из второго и третьего уравнения получаем $d = -a$, а из первого находим $b = -\frac{a^2}{c}$. Подставив в последнее уравнение, получим тождество $c \cdot \left(-\frac{a^2}{c}\right) + (-a)^2 \equiv 0$, т.е. c может быть

любым ненулевым числом. Таким образом, все искомые матрицы

имеют вид $\begin{bmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.



Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AK} = \vec{n}$. Выразим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ из системы

$$\begin{cases} \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}, \\ \vec{n} = \vec{b} + \frac{3}{7}\vec{a}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $\vec{a} = \frac{35}{32}\vec{m} - \frac{7}{32}\vec{n}$, $\vec{b} = -\frac{15}{32}\vec{m} + \frac{35}{32}\vec{n}$. Подставив полученные разложения в равенство $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, получим искомое разложение

$$\overrightarrow{AC} = \frac{35}{32}\vec{m} - \frac{7}{32}\vec{n} - \frac{15}{32}\vec{m} + \frac{35}{32}\vec{n} = \frac{5}{8}\vec{m} + \frac{7}{8}\vec{n}.$$

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M(-1; 2)$ имеет вид: $y - 2 = k(x + 1)$. После приведения к общему уравнению прямой получим: $kx - y + k + 2 = 0$. Расстояние от точки $N(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ откуда получаем уравнение } \frac{|6k - 1 + k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5.$$

Решив его, найдем $k = \frac{3}{4}; -\frac{4}{3}$. Условию задачи удовлетворяют две

прямые: $\frac{3}{4}x - y + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 11 = 0,$

и $-\frac{4}{3}x - y + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2 = 0.$

5. Пусть $N(x_0; x_0^2)$ – точка параболы, наименее удаленная от точки M . Прямая MN перпендикулярна касательной к параболе в точке x_0 . Пусть $k = 2x_0$ – угловой коэффициент касательной, тогда

$k_{MN} = -\frac{1}{2x_0},$ и уравнение прямой MN имеет вид:

$y = -\frac{1}{2x_0}(x-2) + 0,5.$ Подставив в данное уравнение координаты

точки N , получим уравнение $x_0^2 = \frac{1}{x_0},$ откуда найдем $x_0 = 1.$ Уравне-

ние касательной к параболе в точке x_0 имеет вид $y = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

Решения задач математической олимпиады БГЭУ

2008 год

1. Пусть A и B – ненулевые квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что если $AB = O$, где O – нулевая матрица, то $\det A = \det B = 0$.

Решение. Пусть $\det A = 0$, тогда существует обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части равенства $AB = O$ на A^{-1} слева: $A^{-1}AB = A^{-1}O \Leftrightarrow EB = O \Leftrightarrow B = O$. Получили противоречие с условием $B \neq O$, следовательно $\det A = 0$. Аналогично доказывается, что $\det B = 0$.

2. В пространстве заданы 9 точек с целочисленными координатами. Доказать, что найдется по крайней мере один отрезок с концами в заданных точках, середина которого имеет целочисленные координаты.

Решение. Пусть дано $2n-1$ целое число, тогда по крайней мере n из них будут иметь одинаковую четность. Из 9 точек с целочисленными координатами всегда найдутся 5, у которых абсциссы имеют одинаковую четность. Из 5 таких точек выберем 3 с ординатами одинаковой четности, а из трех выбранных точек по крайней мере 2 будут иметь и аппликаты одинаковой четности. Середина отрезка, соединяющего такие точки, будет иметь целочисленные координаты.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Имеем $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BD}$,

$$\overrightarrow{BD} = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot (\vec{a} - \vec{b}).$$
 По свойству биссектрисы треуголь-

ника $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, тогда $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{\vec{a}|\vec{b}| + \vec{b}|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}.$$

6. Кондитерская фабрика может реализовывать свою продукцию (конфеты) двумя способами: через магазины и через торговых агентов. Торговые издержки при продаже x кг конфет через магазин составляют $1,5x^2$ ден. ед., а при продаже y кг конфет через торговых агентов составляют $0,5y^2$ ден.ед. В сутки фабрика производит 5000 кг конфет. Как организовать продажу конфет, чтобы торговые издержки были минимальными?

Решение. При условии $x + y = 5000$ (кг) торговые издержки можно представить как функцию одной переменной $C(x) = 1,5x^2 + 0,5(5000 - x)^2$. Найдем производную $C'(x) = 3x - (5000 - x) = 4x - 5000$. Из уравнения $4x - 5000 = 0$ находим критическую точку $x = 1250$ (кг). Так как $C''(x) = 4 > 0$, то найденная точка является точкой минимума. Таким образом, торговые издержки будут минимальными при $x = 1250$ (кг), $y = 5000 - 1250 = 3750$ (кг).

7. Доказать, что функция $y = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ есть константа при $x \geq 1$.

Решение. Функция определена при всех $x \geq 1$. Найдем ее производную:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \text{ при } x \geq 1, \text{ следовательно функция есть} \end{aligned}$$

константа при $x \geq 1$. Для того, чтобы найти эту константу, вычислим значение функции при $x = 1$. Имеем

$$y(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 + \arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Решения задач олимпиады по математике БГЭУ

2009 год

1. Все три точки должны лежать на одной прямой, причем точка B должна находиться между A и C . Указанные условия будут выполнены, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарными и сонаправленными, т.е. $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ и $\lambda > 0$. Так как $\overrightarrow{AB} = (2t - 2; -3 - 3t)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; t - 2)$, получим систему $\frac{2t - 2}{-2} = \frac{-3 - 3t}{t - 2} > 0$, решив которую, найдем $t = 3 - \sqrt{10}$.

2. Несложно заметить, что при $x = c_k$, $k = 1, \dots, n$, определитель (обозначим его $\Delta(x)$), стоящий в левой части уравнения, содержит две одинаковые строки, и, следовательно, равен 0. Прибавим к первому столбцу определителя $\Delta(x)$ сумму всех остальных. Тогда первый элемент каждой строки определителя станет равен $x + c_1 + c_2 + \dots + c_n$, следовательно,

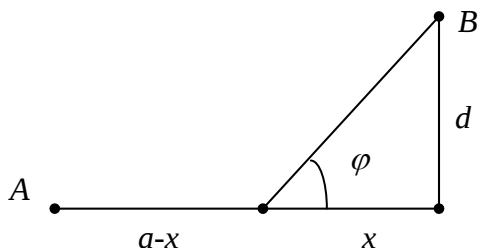
$$\Delta(x) = (x + c_1 + c_2 + \dots + c_n) \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & x & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c_2 & c_3 & \dots & x \end{vmatrix},$$

а значит $x = -c_1 - c_2 - \dots - c_n$ также является корнем уравнения. Таким образом, уравнение имеет $n + 1$ корень: $x_k = c_k$, $k = 1, \dots, n$; $x_{n+1} = -c_1 - c_2 - \dots - c_n$. Поскольку $\Delta(x)$ представляет собой многочлен $(n + 1)$ -й степени, то других корней он не имеет.

3. Очевидно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Возведем обе части равенства в скалярный квадрат. Имеем $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) = 0$. Отсюда

$$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) < 0, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4.



Примем условно тариф по реке за единицу, тогда стоимость перевозки будет выражаться функцией $Q(x) = a - x + 2\sqrt{x^2 + d^2}$, $x \in [0; a]$. Исследуя функцию $Q(x)$ на экстремум, найдем, что она имеет минимум в точке $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Если $\frac{d}{\sqrt{3}} \in [0; a]$, т.е. $d \leq a\sqrt{3}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{x} = \sqrt{3}$, следовательно $\varphi = 60^\circ$. Если же $d > a\sqrt{3}$, то, поскольку функция $Q(x)$ убывает на $[0; a]$, наименьшее значение она принимает при $x = a$, значит дорогу следует проложить напрямую из A в B под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{d}{a}$.

5. Вынесем в числителе за скобки вычитаемое и воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - (n-1)^x}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^x \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^x - 1 \right)}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^x \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^x - 1 \right)}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = \left| \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^x - 1 \sim \frac{x}{n-1} \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n-1)^{x-1}}{(n+1)^{x-1} + (n+2)^{x-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{x-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{x-1} + \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{x-1}} = \frac{x}{2} = 2008. \end{aligned}$$

Следовательно, $x = 4016$.

6. Положим в равенстве (1) $y = 0$. Получим $f(x) = f(x) + f(0)$ при любых $x \in \mathbb{R}$, следовательно $f(0) = 0$. Далее продифференцируем равенство (1) по переменной x , полагая $y = \text{const}$. Имеем $f'(x+y) = f'(x)$ при любых $y \in \mathbb{R}$. Отсюда заключаем, что $f'(x) = k = \text{const}$, и $f(x) = kx$.

Решения задач олимпиады по математике БГЭУ

2010 год

1. Искомое множество точек – внутренность угла между лучами AB и AC , определяемого направлениями векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. Уравнение прямой, параллельной данной, имеет вид $y = \sqrt{3}x + b$. Предположим, что на этой прямой лежат две точки с рациональными координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получим два верных числовых равенства $y_1 = \sqrt{3}x_1 + b$, $y_2 = \sqrt{3}x_2 + b$. Вычитая второе равенство из первого, имеем $y_1 - y_2 = \sqrt{3}(x_1 - x_2)$. Так как $y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}$, $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$, а $\sqrt{3}(x_1 - x_2) \notin \mathbb{Q}$, то получаем противоречие с нашим предположением. Следовательно, на рассматриваемой прямой может лежать не более одной точки с рациональными координатами.

3. Складывая первые n уравнений системы, получим

$$\sum_{i=1}^n x_i + nx_{n+1} = \sum_{i=1}^n b_i$$
. Отсюда $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n b_i - nx_{n+1}$, и последнее уравнение системы можно записать в виде $a \cdot \sum_{i=1}^n b_i - (an+1)x_{n+1} = 0$.

Пусть $a \neq -\frac{1}{n}$. Тогда $x_{n+1} = \frac{a \cdot \sum_{i=1}^n b_i}{an+1}$, $x_i = b_i - \frac{a \cdot \sum_{i=1}^n b_i}{an+1}$, $i = 1, \dots, n$.

Если же $a = -\frac{1}{n}$, то система имеет бесконечно много решений

$$x_i = b_i - x_{n+1}, i = 1, \dots, n, x_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

4. Пусть x , y и z денежных единиц – ставки на первую, вторую и третью лошадь соответственно, а S – сумма всех ставок. В случае победы первой лошади мы получим $5x$, второй – $4y$, третьей – $(k+1)z$ денежных единиц. Необходимыми и достаточными условиями выигрыша при любом исходе скачек являются следующие соотношения:

$$\begin{cases} 5x > S, \\ 4y > S, \\ (k+1)z > S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{S}{5}, \\ y > \frac{S}{4}, \\ z > \frac{S}{k+1}. \end{cases}$$

В силу равенства $x + y + z = S$, получим $\frac{S}{5} + \frac{S}{4} + \frac{S}{k+1} < S$. Из последнего неравенства находим $k > \frac{9}{11}$. Значит, наименьшее целое значение $k = 1$.

5. Отметим, что предел в левой части уравнения равен 0 при $x = -1$, и ∞ при $x \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. Следовательно, $|x| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \text{ и уравнение примет вид } \frac{1}{1-x} = 2010. \end{aligned}$$

сюда $x = \frac{2009}{2010}$.

6. Несложно проверить, что прямая $y = 2x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^2/8$. Другая касательная, перпендикулярная ей, имеет угловой коэффициент $k = -0,5$. Из уравнения $y' = -0,5 \Leftrightarrow x/4 = -0,5$ находим абсциссу точки касания $x_0 = -2$ и составляем уравнение второй касательной: $y = -0,5x - 0,5$. Решая систему уравнений $\begin{cases} y = 2x - 8, \\ y = -0,5x - 0,5 \end{cases}$, найдем точку $M(3; -2)$ пересечения прямых, которая и будет искомой точкой.

$$\begin{aligned}
7. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) + f(a)}{f(a)} \right)^n = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)} \right)^n \\
& = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)} \right)^{\frac{f(a)}{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}} \right)^{\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)} \cdot n} = \\
& = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{f(a)}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.
\end{aligned}$$

Решения задач математической олимпиады БГЭУ 2011

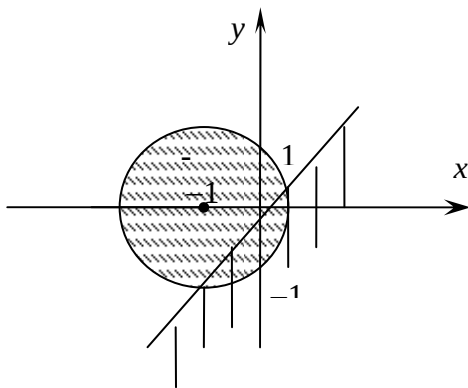
1. Найти все a , при которых множество

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x, y) : x - y + a \geq 0\}$$

содержит только одну точку. Указать эту точку.

Решение. Множество A представляет собой множество всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1, \\ x - y + a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq 2, \\ y \leq x + a, \end{cases} \text{ изображенное на рисунке.}$$



Очевидно, что множество A будет содержать единственную точку тогда и только тогда, когда прямая $y = x + a$ касается окружности $(x+1)^2 + y^2 = 2$ в точке $(0; -1)$. Следовательно, $a = -1$, и $(0; -1)$ – искомая точка.

2. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(4; -1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины.

Решение. Найдем координаты вершины $A(-3; 2)$ как точки пересечения двух прямых (высоты и медианы), и составим уравнение

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. В нашем

случае $f(x) = \frac{a^2}{x}$, $f'(x) = -\frac{a^2}{x^2}$, следовательно

$y = \frac{a^2}{x_0} - \frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y + \frac{a^2}{x_0^2}x = \frac{2a^2}{x_0}$. Разделим обе части последне-

го уравнения на $\frac{2a^2}{x_0}$ и получим уравнение касательной в отрезках:

$\frac{y}{\frac{2a^2}{x_0}} + \frac{x}{2x_0} = 1$. Отсюда находим точки $(2x_0; 0)$ и $\left(0; \frac{2a^2}{x_0}\right)$ пересече-

ния касательной с осями координат. Площадь треугольника, образованного касательной с осями координат, равна $S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2a^2}{x_0} = 2a^2$

и не зависит от координат точки касания, т.е. является постоянной величиной.

5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a+b)^{2x+a+b}}{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a+b)^{2x+a+b}}{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+a+b)^{x+a}}{(x+a)^{x+a}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a+b)^{x+b}}{(x+b)^{x+b}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{b}{x+a} \right)^{x+a} \cdot \left(1 + \frac{a}{x+b} \right)^{x+b} \right) = e^b \cdot e^a = e^{a+b}. \end{aligned}$$

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции
 $f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$.

Решение. Функция определена на отрезке $[-1; 1]$. Найдем критические точки.

$$f'(x) = \frac{3(\arcsin^2 x - \arccos^2 x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \pm \arccos x.$$

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то единственный ноль производной $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Также критическими точками являются $x = \pm 1$ (они совпадают с концами отрезка, на котором определена функция). Так как $f(-1) = \frac{7\pi^3}{8}$, $f(1) = \frac{\pi^3}{8}$, а $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32}$, то

$$\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{\pi^3}{32}, \quad \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{7\pi^3}{8}.$$

7. Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что все суммы $a_i + a_j$, $i \leq j$, различны. Доказать, что $a_n \geq \frac{n^2}{4}$.

Решение. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ существует ровно k сумм вида $a_i + a_k$, $i = 1, \dots, k$, то количество сумм вида $a_i + a_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$ (2) равно $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Так как все суммы (2) различны и принимают натуральные значения, то наибольшая из них $a_n + a_n = 2a_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$. Отсюда

$$a_n \geq \frac{n(n+1)}{4} \geq \frac{n^2}{4}.$$