Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2012 год

1. *Найти матрицу* X *, если* $X - X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *причем* $\det X = 1$.

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $X^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a - d = -1, \\ 2b = 10, \\ 2c = 2, \\ d - a = 1, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ или $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *Составить уравнение касательной к графику функции* $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 3$, *имеющей наибольший угловой коэффициент.*

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в произвольной точке x определяется равенством $k = f'(x) = -3x^2 - 12x$. Функция $f'(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 = -2$ (абсцисса вершины параболы), следовательно, $k_{\max} = f'(-2) = 12$. Так как $f(-2) = -13$, то уравнение искомой касательной имеет вид $y + 13 = 12(x + 2)$, или $y = 12x + 11$.

3. *Среди прямых, проходящих через точку* $P(3;0)$, *найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми* $2x - y - 2 = 0$ (l_1) *и* $x + y + 3 = 0$ (l_2), *делится точкой* P *пополам.*

Решение. Уравнение любой прямой l, проходящей через точку P (кроме прямой $x = 3$, не удовлетворяющей условию задачи), можно записать в виде $y = k(x - 3)$. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ x + y + 3 = 0 \end{cases},$$

найдем точки $M\left(\frac{3k-2}{k-2}; \frac{4k}{k-2}\right)$ и $N\left(\frac{3k-3}{k+1}; \frac{-6k}{k+1}\right)$ пересечения прямой l с прямыми l_1 и l_2 соответственно. Так как точка P должна делить отрезок MN пополам, то

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3k-2}{k-2} + \frac{3k-3}{k+1}\right) = 3, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4k}{k-2} - \frac{6k}{k+1}\right) = 0. \end{cases}$$

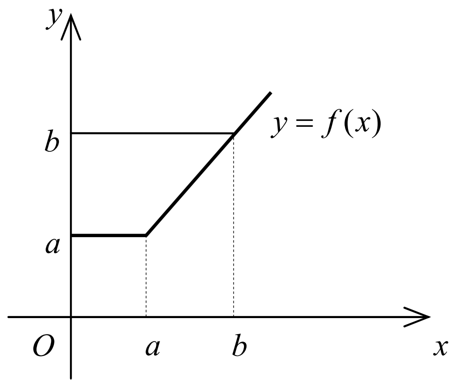
Отсюда $k = 8$, и уравнение искомой прямой $y = 8x - 24$.

4. *Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}$, $x\ge 0$, *осью* Oy *и прямой* $y=b,\ 0<a<b$.

Решение. Пусть $x\le a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=a$. Если же

$x>a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{a}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=x$. Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}a, & x\le a,\\ x, & x>a.\end{cases}$$



Искомая фигура — трапеция с основаниями b и a и высотой $b-a$. Следовательно, $S=\dfrac{a+b}{2}(b-a)=\dfrac{b^2-a^2}{2}$.

5. *В матрице* A_{2n} *размеров* $2n\times 2n$ *все элементы главной диагонали равны 7, все элементы побочной диагонали равны 6, а все остальные элементы равны 0. Вычислить* $\det A_{2n}$.

Решение.

$$A_{2n}=\left(\underbrace{\begin{matrix}7 & 0 & \dots & 0 & 6\\ 0 & 7 & \dots & 6 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 6 & \dots & 7 & 0\\ 6 & 0 & \dots & 0 & 7\end{matrix}}_{2n}\right).$$

Для вычисления определителя матрицы A вычтем из первой строки последнюю, умноженную на $\dfrac{6}{7}$, а затем разложим определитель по элементам первой строки:

$$\det A_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix}7&0&\dots&0&6\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix}7-\dfrac{36}{7}&0&\dots&0&0\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n}=$$

$$=\left(7-\frac{36}{7}\right)\cdot(-1)^2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}7&0&\dots&6&0\\0&7&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\6&0&\dots&7&0\\0&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n-1}.$$

Разложим полученный определитель по элементам последней строки, тогда

$$\det A_{2n}=\left(7-\frac{36}{7}\right)\cdot 7\cdot\det A_{2n-2}=13\cdot\det A_{2n-2},$$

где

$$A_{2n-2}=\left(\underbrace{\begin{matrix}7&0&\dots&0&6\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{matrix}}_{2n-2}\right).$$

Аналогично, $\det A_{2n-2}=13\cdot\det A_{2n-4}$, и т.д. Таким образом,

$$\det A_{2n}=13\cdot\det A_{2n-2}=13^2\cdot\det A_{2n-4}=\dots=13^{n-1}\cdot\det A_2=13^{n-1}\cdot\begin{vmatrix}7&6\\6&7\end{vmatrix}=13^n.$$

6. *Найти предел* $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$, $a>0$.

Решение. Пусть $a\neq 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n^2+n}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n^2}{n^2+n}\cdot\frac{a^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\dfrac{1}{n^2+n}}\right)=$$

$$=\left[a^{\frac{1}{n^2+n}}-1\sim\frac{\ln a}{n^2+n},\ n\to\infty\right]=\ln a.$$

Если $a=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot 0\right)=0=\ln a$.

7. *Найти количество нулей функции* $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.

Решение. Очевидно, что $f(0) = f(1) = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ – нули функции. Кроме того, $f(4) = -1 < 0$, $f(5) = 6 > 0$, следовательно, в силу непрерывности функции $f(x)$, существует точка $x_3 \in (4;5)$, такая, что $f(x_3) = 0$. Предположим, что существует еще один нуль функции $x_4 \neq 0;1;x_3$. По теореме Ролля, производная $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$ должна иметь как минимум три нуля (по одному между каждыми двумя соседними нулями функции $f(x)$), а вторая производная $f''(x) = 2^x \ln 2 - 2$ – как минимум два нуля, что невозможно в силу строгой монотонности функции $f''(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет ровно три нуля.

Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2013 год

1. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Так как $\cos(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(\operatorname{arctg} x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$.

2. *Матрица A такова, что $A^k=0$. Доказать, что $(E-A)^{-1}=E+A+...+A^{k-1}$, где E – единичная матрица.*

Решение. Найдем произведение матриц $B=E-A$ и $C=E+A+...+A^{k-1}$:
$BC=(E-A)\left(E+A+...+A^{k-1}\right)=E+A+...+A^{k-1}-A-A^2-...-A^k=E$, следовательно, $C=B^{-1}$.

3. *Найти наибольшее и наименьшее возможные значения определителя третьего порядка, все элементы которого равны 0 или 1.*

Решение. Разложим определитель третьего порядка по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Поскольку $a_{ij}\in\{0;1\}$, $i, j=1,2,3$, то любой минор второго порядка может быть равен либо 0, либо ±1. Следовательно, $\Delta\le 3$, причем равенство возможно лишь в том случае, когда $\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=1$, а $\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-1$. Одновременное выполнение этих равенств невозможно, следовательно $\Delta\le 2$. Так как $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2$, то $\max\Delta=2$.

При перестановке местами любых двух строк определитель меняет знак, следовательно $\min\Delta=-\max\Delta=-2$.

4. *На плоскости даны точки A и B. Найти множество точек M плоскости, удовлетворяющих условию $AM^2-BM^2=a^2$.*

Решение. Расположим систему координат так, чтобы точка A совпадала с началом координат, а точка B лежала на оси Ox. Тогда точки A и B имеют координаты $A(0;0)$, $B(x_0;0)$. Пусть $M(x;y)$, тогда $AM^2=x^2+y^2$, $BM^2=\left(x-x_0{}^2\right)+y^2$, и уравнение искомого множества точек имеет вид

$$x^2+y^2-(x-x_0)^2-y^2=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{x_0^2+a^2}{2x_0}.$$

Таким образом, множество точек M плоскости, удовлетворяющих условию $AM^2-BM^2=a^2$ – прямая, перпендикулярная прямой AB.

5. *Векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *удовлетворяют условию* $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$. *Вычислить* $\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{c},\vec{a}\right)$, *если* $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=2$.

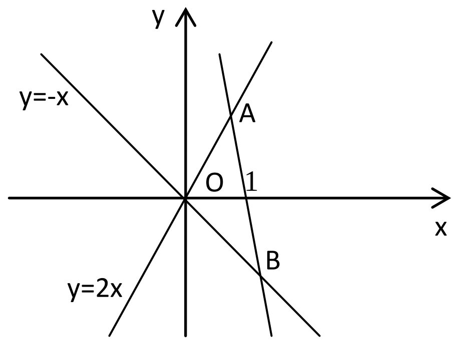
Решение. Возведем в скалярный квадрат обе части равенства $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

$$\vec{c}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+2\left(\vec{b},\vec{c}\right)+2\left(\vec{c},\vec{a}\right).$$

Отсюда $\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{c},\vec{a}\right)=\dfrac{-\vec{a}^2-\vec{b}^2}{2}=-8{,}5$.

6. *Через точку (1; 0) провести прямую, отсекающую от угла, образованного прямыми* $y=2x$ *и* $y=-x$ *и лежащего в правой полуплоскости, треугольник наименьшей площади.*

Решение.



Уравнение искомой прямой AB запишем в виде $y=kx+b$. Так как прямая проходит через точку $(1;0)$, то $b=-k$. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y=2x, \\ y=kx-k \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=-x, \\ y=kx-k \end{cases},$$

выразим координаты точек $A\left(\dfrac{k}{k-2};\dfrac{2k}{k-2}\right)$ и $B\left(\dfrac{k}{k+1};\dfrac{-k}{k+1}\right)$. Площадь треугольника AOB найдем по формуле $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot d$, где $d=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ – расстояние от точки O до прямой AB, а

$$AB=\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}-\frac{k}{k+1}\right)^2+\left(\frac{2k}{k-2}+\frac{k}{k+1}\right)^2}=\frac{3k\sqrt{k^2+1}}{(k+1)(k-2)}.$$

Тогда $S=S(k)=\dfrac{3k^2}{(k+1)(k-2)}$. Найдем производную: $S'(k)=\dfrac{-3k(k+4)}{(k+1)^2(k-2)^2}$.

Несложно показать, что $k=-4$ – точка минимума, и функция $S(k)$ принимает в этой точке наименьшее значение.

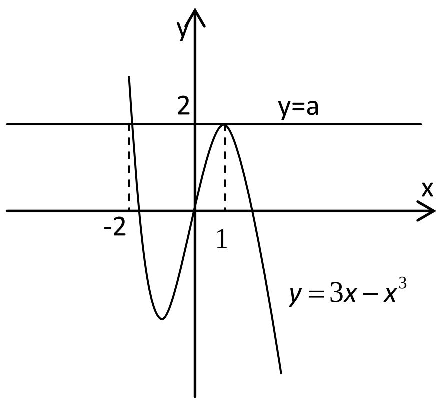
Следовательно, уравнение искомой прямой $y=-4(x-1)$.

7. *Пусть дана непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Доказать, что если касательная во всех точках графика функции $f(x)$ проходит через одну и ту же точку плоскости, то график $f(x)$ есть прямая.*

Решение. Пусть (X,Y) – произвольная точка касательной, (x,y), $y=f(x)$ – точка касания, тогда уравнение касательной имеет вид $Y-y=y'(X-x)$. Так как по условию любая касательная проходит через одну и ту же точку (x_0,y_0), то $y_0-y=y'(x_0-x)$, отсюда $y'=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$. Продифференцируем последнее равенство: $y''=\dfrac{y'(x-x_0)-(y-y_0)}{(x-x_0)^2}=0$. Следовательно, $y'=a$, $y=ax+b$ – прямая.

8. *Наибольший корень уравнения $x^3-3x+a=0$ есть функция $\varphi(a)$ параметра a. Найти точки разрыва этой функции и определить их характер.*

Решение. Построим графики функций $y=3x-x^3$ и $y=a$.



Очевидно, что при любом $a>2$ уравнение $x^3-3x+a=0$ имеет единственный корень. Отсюда и из непрерывности функции $f(x)=3x-x^3$ следует непрерывность $\varphi(a)$ при $a>2$. Для $a<2$ наибольший корень уравнения $x^3-3x+a=0$ будет больше 1, причем $\varphi(a)$ будет также непрерывна.

Остается значение $a=2$. Уравнение примет вид $x^3-3x+2=0$, его корни $x_{1,2}=1$, $x_3=-2$, т.е. $\varphi(2)=1$. При этом $\lim\limits_{a\to 2+0}\varphi(a)=-2$, $\lim\limits_{a\to 2-0}\varphi(a)=1$. Следовательно, $a=2$ – точка разрыва первого рода.

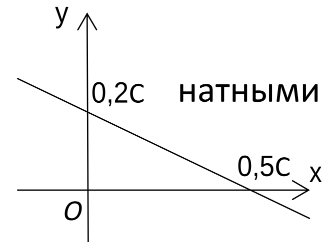
Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ
2014 ***год***

1. *Составить уравнение прямой, параллельной прямой* $2x+5y=0$ *и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна* 5.

Решение. Уравнение прямой, параллельной данной, имеет вид

$$2x+5y=C. \qquad (1)$$

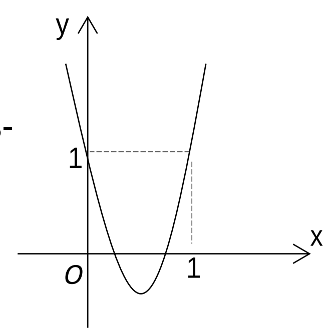
Разделив обе части уравнения на *C*, получим уравнение прямой (1) в отрезках: $\frac{x}{0,5C}+\frac{y}{0,2C}=1$ (см. рисунок).



Площадь треугольника, образованного прямой и координатными осями, определяется равенством $S=\frac{1}{2}\cdot 0,5|C|\cdot 0,2|C|=0,05C^2=5$. Следовательно, $C=\pm 10$, и условию задачи удовлетворяют две прямые $2x+5y\pm 10=0$.

2. *Найти наибольшее возможное значение* a, *при котором квадратный трёхчлен* $f(x)=ax^2-ax+1$ *удовлетворяет неравенству* $|f(x)|\le 1$ *при всех* $0\le x\le 1$.

Решение. Так как $f(0)=f(1)=1$, а абсцисса вершины параболы $x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$, то при $a>0$ возможное расположение параболы $y=f(x)$ показано на рисунке. Очевидно, что для выполнения условия $|f(x)|\le 1$ при всех $0\le x\le 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $y_в=\frac{a}{4}-\frac{a}{2}+1\ge -1$. Отсюда получаем $a\le 8$, следовательно, наибольшее возможное значение $a=8$.



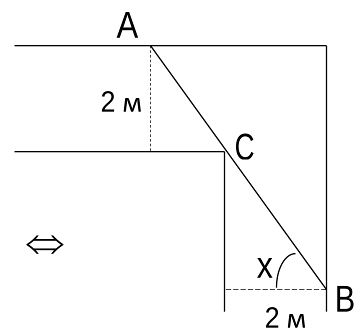
3. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}$.

Решение. Так как $\left(\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\right)' = f(x)$, то по правилу дифференцирования сложной функции $\left(\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right)' = \sin x\cdot\left(x^2\right)' = 2x\sin x$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right)'}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

4. *Какой максимальной длины шест можно пронести в горизонтальном положении по коридору шириной* 2 *метра*, *поворачивающему под прямым углом*?

Решение. Максимальная длина шеста равна минимальной возможной длине отрезка AB (см. рисунок). Очевидно, $AC = \dfrac{2}{\sin x}$, $CB = \dfrac{2}{\cos x}$.



Рассмотрим функцию $l(x) = \dfrac{2}{\sin x} + \dfrac{2}{\cos x}$ и найдем ее наименьшее значение при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Из уравнения $l'(x)=0 \iff$ $-\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} = 0$ находим $x = \dfrac{\pi}{4}$. Несложно показать, что это – точка минимума. Следовательно, максимальная длина шеста равна $l\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}$.

5. *Вычислить определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & h & -1 & \dots & 0 \\ x^2 & hx & h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & h \end{vmatrix}$.

Решение. Порядок определителя равен $n+1$, т.е. $\Delta = \Delta_{n+1}$. Прибавим ко второму столбцу определителя первый, и разложим полученный определитель по элементам 1-й строки:

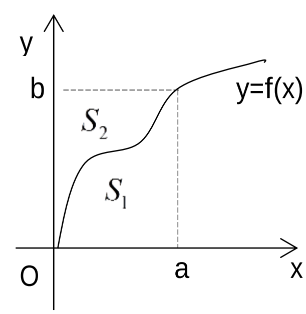
$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ x & x+h & -1 & \dots & 0\\ x^2 & x^2+hx & h & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^n & x^n+hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+h & -1 & 0 & \dots & 0\\ x(x+h) & h & -1 & \dots & 0\\ x^2(x+h) & hx & h & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^{n-1}(x+h) & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ x & h & -1 & \dots & 0\\ x^2 & hx & h & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h\end{vmatrix}=(x+h)\Delta_n.$$

Аналогично, $\Delta_n=(x+h)\Delta_{n-1}$, и т.д. Таким образом,

$$\Delta_{n+1}=(x+h)^{n-1}\Delta_2=(x+h)^{n-1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & h\end{vmatrix}=(x+h)^n.$$

6. *Функция* $y=f(x)$ *возрастает и непрерывна на отрезке* $[0;a]$. *Также известно*, *что* $f(0)=0,\ f(a)=b$ *и* $\int_0^a f(x)dx=s$. *Чему равен* $\int_0^b f^{-1}(y)dy$, *где* $x=f^{-1}(y)$ – *обратная к* $y=f(x)$ *функция*?



Решение. В силу геометрического смысла определенного интеграла, $S_1=\int_0^a f(x)dx=s$ (см. рисунок). Следовательно, $\int_0^b f^{-1}(y)dy=S_2=ab-s$.

7. *Что больше*: 2013^{2014} *или* 2014^{2013}?

Решение. Сравним логарифмы данных чисел, т.е. $2014\ln 2013$ и $2013\ln 2014$. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=x\ln 2013-2013\ln x$. Очевидно, что $f(2013)=0$. Так как $f'(x)=\ln 2013-\dfrac{2013}{x}>0$ при $x\geq 2013$, то функция возрастает, следовательно $f(x)>0$ при $x>2013$. Значит, $2014\ln 2013>2013\ln 2014$ и $2013^{2014}>2014^{2013}$.

Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2015

1. *Существуют ли такие матрицы* A *и* B, *что* $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, *а* $BA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$?

Решение. Предположим, что такие матрицы существуют. Так как AB и BA – квадратные матрицы второго порядка, то и матрицы A и B также квадратные порядка два. Из равенства $AB=E$ следует, что $B=A^{-1}$. Но по определению обратной матрицы $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, что противоречит условию. Следовательно, таких матриц не существует.

2. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Так как

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x \text{ и } \cos(\operatorname{arctg} x)>0,$$

то справедливо равенство

$$\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} x\cos(\operatorname{arctg} x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

3. *Найти наибольшее значение функции* $f(x)=x^3-3x$ *на множестве* $X=\{x\in\mathbb{R}: x^4+36\le 13x^2\}$.

Решение. Так как X – это множество решений неравенства $x^4-13x^2+36\le 0$, то

$$X=[-3;-2]\cup[2;3].$$

Найдем наибольшее значение функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезках $[-3;-2]$ и $[2;3]$. Из уравнения $f'(x)=3x^2-3=0$ находим критические точки функции $x_1=-1$, $x_2=1$, но они не принадлежат множеству X. Следовательно, наибольшее значение функция принимает на одном из концов отрезка. Так как

$$f(-3)=-18,\ f(-2)=-2,\ f(2)=2,\ f(3)=18,$$

то $\max\limits_{x\in X} f(x)=18$.

4. *Вычислить определитель* n *- го порядка, элементы которого определяются формулой* $a_{ij}=\max\{i,j\}$, $i,j=1,\ldots,n$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отнимем от первой строки определителя поледнюю строку, от второй – последнюю строку, умноженную на 2, от третьей – последнюю строку, умноженную на 3 и т.д. и разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца:

$$\Delta = n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix} = n \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot n.$$

5. *Вычислить* $\int\limits_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int\limits_0^{200\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2} \cdot \int\limits_0^{200\pi} |\sin x|\, dx = 200\sqrt{2} \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx =$$

$$= 200\sqrt{2} \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 200\sqrt{2} \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 400\sqrt{2}.$$

6. *Функция* $f(x)$ *определена и возрастает на отрезке* $[0,1]$. *Доказать, что при любом* $\alpha \in (0;1)$ *выполнено неравенство* $\int\limits_0^{\alpha} f(x)dx \le \alpha \int\limits_0^1 f(x)dx$.

Решение. Выполним замену переменной $x = \alpha t,\ dx = \alpha\, dt$:

$$\int\limits_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha \int\limits_0^1 f(\alpha t)dt.$$

Так как функция возрастает на отрезке $[0,1]$ и $\alpha t < t$ при любом $\alpha \in (0;1)$, то справедливо неравенство $f(\alpha t) \le f(t)$. Следовательно,

$$\alpha \int\limits_0^1 f(\alpha t)dt \le \alpha \int\limits_0^1 f(t)dt = \alpha \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

7. *Найти количество корней уравнения* $x^a = \ln x$ *в зависимости от значения параметра* a.

Решение. Исходя из вида графиков функций $y = x^a$ и $y = \ln x$ очевидно, что при $a \le 0$ уравнение имеет единственный корень.

Пусть $a > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^a - \ln x$, определенную и непрерывную на $(0;+\infty)$. Нули этой функции являются корнями уравнения $x^a = \ln x$. Так как

$$f'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{ax^a - 1}{x},$$

то функция убывает при $x < a^{-\frac{1}{a}}$ и возрастает при $x > a^{-\frac{1}{a}}$. Найдем значение функции $f(x)$ в точке минимума $x_0 = a^{-\frac{1}{a}}$:

$$f(x_0) = a^{-1} - \ln a^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\ln a = \frac{1+\ln a}{a}.$$

Если $a > e^{-1}$, то $f(x_0) > 0$, и уравнение не имеет корней.

Если $a = e^{-1}$, то $f(x_0) = 0$, и уравнение имеет единственный корень.

Если $0 < a < e^{-1}$, то $f(x_0) < 0$, следовательно, уравнение имеет 2 корня.

Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2016

1. *Вычислить определитель n-го порядка, все элементы главной диагонали которого равны 3, а все остальные элементы равны 2.*

Решение. Такой определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к каждому из столбцов с номерами 1, 2, …, $n-1$ последний столбец, умноженный на (-1), а затем к последней строке прибавим последовательно 1-ю, 2-ю, и т.д., $n-1$-ю строки. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3+2\cdot(n-1) \end{vmatrix} = 2n+1.$$

2. *Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, имеющий в точке $x=1$ локальный максимум, равный 6, и в точке $x=3$ локальный минимум, равный 2.*

Решение. Так как многочлен $P(x)$ имеет как минимум две точки экстремума, то его производная $P'(x)$ имеет, по крайней мере, два нуля, а, следовательно, является многочленом степени не ниже 2. Поэтому наименьшая возможная степень $P(x)$ равна 3. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Так как, по условию задачи, $P'(1) = P'(3) = 0,\ P(1) = 6,\ P(3) = 2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0, \\ 27a + 6b + c = 0, \\ a + b + c + d = 6, \\ 27a + 9b + 3c + d = 2, \end{cases}$$

решением которой является $a = 1,\ b = -6,\ c = 9,\ d = 2$. Таким образом,

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

3. *Найти прямую, проходящую через точку* $A(3;2)$, *отсекающую положительные отрезки на осях координат и образующую вместе с ними треугольник наименьшей площади.*

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;2)$ и отсекающей положительные отрезки на осях координат, имеет вид

$$y-2=k(x-3),\ k<0.$$

Если $x=0$, то $y=2-3k$, а если $y=0$, то $x=\dfrac{3k-2}{k}$. Следовательно, площадь треугольника, образованного данной прямой и осями координат, определяется формулой

$$S=S(k)=\frac{1}{2}(2-3k)\cdot\frac{3k-2}{k}=-\frac{9}{2}k+6-\frac{2}{k}$$

и представляет собой функцию переменной k. Решив уравнение

$$S'(k)=-\frac{9k^2-4}{2k^2}=-\frac{(3k-2)(3k+2)}{2k^2}=0,$$

найдем $k=-\dfrac{2}{3}$ ($k=\dfrac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи). Так как

$$S'(k)<0 \text{ при } k<-\frac{2}{3} \text{ и } S'(k)>0 \text{ при } -\frac{2}{3}<k<0,$$

то при $k=-\dfrac{2}{3}$ значение площади треугольника будет наименьшим. Значит, уравнение искомой прямой $y-2=-\dfrac{2}{3}(x-3)$, или $y=-\dfrac{2}{3}x+4$.

4. *При каких значениях* a *для любого числа* b *найдется хотя бы одно число* c *такое, что система уравнений*

$$\begin{cases} x+2by=a, \\ bx+(1-b)y=c^2+ac \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение?

Решение. По теореме Кронекера-Капелли, система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

равен рангу ее расширенной матрицы

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2b & a \\ b & 1-b & c^2+ac \end{array}\right].$$

Если определитель системы не равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ b & 1-b \end{vmatrix}=1-b-2b^2\neq 0 \iff b\neq -1,\ b\neq 0{,}5,$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 2$, и система (1) имеет единственное решение при любых значениях a и c.

Пусть $\Delta = 0$ (при $b = -1$ или $b = 0{,}5$), тогда $\operatorname{rang} A = 1$.

При $b = -1$ имеем

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -1 & 2 & c^2 + ac \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & c^2 + ac + a \end{array}\right],$$

и $\operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 1 \Leftrightarrow c^2 + ac + a = 0$.

При $b = 0{,}5$ имеем

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0{,}5 & 0{,}5 & c^2 + ac \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2c^2 + 2ac - a \end{array}\right],$$

и $\operatorname{rang}\left[A \mid B\right] = 1 \Leftrightarrow 2c^2 + 2ac - a = 0$.

Таким образом, нас интересуют такие, и только такие значения a, при которых система квадратных уравнений

$$\begin{cases} c^2 + ac + a = 0, \\ 2c^2 + 2ac - a = 0 \end{cases}$$

имеет решения относительно неизвестной c. Эти значения найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - 4a \ge 0, \\ 4a^2 + 8a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -2\right] \cup \left\{0\right\} \cup \left[4; +\infty\right).$$

5. *Найти прямую, проходящую через точку $A(3;2)$, отсекающую положительные отрезки на осях координат и образующую вместе с ними треугольник наименьшей площади.*

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;2)$ и отсекающей положительные отрезки на осях координат, имеет вид

$$y - 2 = k(x - 3),\ k < 0.$$

Если $x = 0$, то $y = 2 - 3k$, а если $y = 0$, то $x = \dfrac{3k - 2}{k}$. Следовательно, площадь треугольника, образованного данной прямой и осями координат, определяется формулой

$$S = S(k) = \frac{1}{2}(2 - 3k) \cdot \frac{3k - 2}{k} = -\frac{9}{2}k + 6 - \frac{2}{k}$$

и представляет собой функцию переменной k. Решив уравнение

$$S'(k) = -\frac{9k^2 - 4}{2k^2} = -\frac{(3k - 2)(3k + 2)}{2k^2} = 0,$$

найдем $k = -\dfrac{2}{3}$ ($k = \dfrac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи). Так как

$$S'(k)<0 \text{ при } k<-\frac{2}{3} \text{ и } S'(k)>0 \text{ при } -\frac{2}{3}<k<0,$$

то при $k=-\dfrac{2}{3}$ значение площади треугольника будет наименьшим. Значит, уравнение искомой прямой $y-2=-\dfrac{2}{3}(x-3)$, или $y=-\dfrac{2}{3}x+4$.

6. *Доказать, что функция* $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ *дифференцируема при всех* x.

Решение.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Функция дифференцируема при всех $x>0$ и при всех $x<0$. Докажем, что функция дифференцируема в точке $x=0$. Для этого достаточно доказать равенство

$$f'(+0)=f'(-0).$$

Но

$$f'(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{-2x^{-3}}{-x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2x^{-1}}{e^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{-2x^{-2}}{-x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

Для вычисления предела мы дважды воспользовались правилом Лопиталя. Так как, очевидно, $f'(-0)=0$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$, а, следовательно, дифференцируема при всех x.

7. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, *где* $a>0$, $b>0$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{1/x}+b^{1/x}-2}}\right)^{\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x}=(*).$$

Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}+b^{1/x}-2}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a^{1/x}-1\right)+\left(b^{1/x}-1\right)}{1/x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a^{1/x}-1}{1/x}+\lim_{x\to\infty}\frac{b^{1/x}-1}{1/x}\right)=\left[\begin{array}{l} a^{1/x}-1\sim\frac{1}{x}\ln a,\ x\to\infty \\ b^{1/x}-1\sim\frac{1}{x}\ln b,\ x\to\infty \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln a+\ln b\right)=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab}\,.$$

Следовательно,

$$(*)=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}\,.$$

8. *Найти количество корней уравнения* $e^x=ax^2$ *в зависимости от значения параметра* a.

Решение. Исходя из вида графиков функций $y=e^x$ и $y=ax^2$ очевидно, что при $a\le 0$ уравнение не имеет корней. При любых $a>0$ уравнение имеет один отрицательный корень. Найдем количество положительных корней уравнения. Для этого рассмотрим равносильное ему при $a>0,\ x>0$ уравнение

$$x=\ln\left(ax^2\right)\ \Leftrightarrow\ x-\ln a-2\ln x=0. \qquad (2)$$

Корни уравнения (2) являются нулями функции $f(x)=x-\ln a-2\ln x$, определенной и непрерывной на $(0;+\infty)$. Так как

$$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x},$$

то функция $f(x)$ убывает при $x<2$ и возрастает при $x>2$, $x_0=2$ − точка минимума функции и

$$f(2)=2-\ln a-2\ln 2=\ln\frac{e^2}{4}-\ln a.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $f(2)>0\ \Leftrightarrow\ a<\frac{e^2}{4}$: функция положительна при всех $x>0$ и не имеет нулей;

2. $f(2)=0\ \Leftrightarrow\ a=\frac{e^2}{4}$: функция имеет единственный ноль $x=2$;

3. $f(2)<0\ \Leftrightarrow\ a>\frac{e^2}{4}$: так как $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, то, в силу непрерывности, функция $f(x)$ имеет ровно два нуля $0<x_1<2<x_2$.

Таким образом, исходное уравнение не имеет корней при $a\le 0$, имеет один корень при $0<a<\frac{e^2}{4}$, два корня при $a=\frac{e^2}{4}$ и три корня при $a>\frac{e^2}{4}$.

Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2017

1. *Доказать, что если между цифрами числа 1331 записать по равному количеству нулей, то получится точный куб.*

Решение. Справедливо равенство $1331 = 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1 = \left(10+1\right)^3$. Записав между цифрами числа по k нулей, получим число

$$1\cdot 10^{3+3k} + 3\cdot 10^{2+2k} + 3\cdot 10^{1+k} + 1 = \left(10^{1+k}+1\right)^3.$$

2. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^x$, $a, b, c, d > 0$.

Решение. Обозначим $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^x$. Очевидно, что

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a<c; \\ +\infty, & \text{если} \quad a>c; \\ 1, & \text{если} \quad a=c,\ b=d. \end{cases}$$

Пусть $a=c,\ b\neq d$. Тогда

$$A = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+d+b-d}{ax+d}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{b-d}{ax+d}\right)^{\frac{ax+d}{b-d}}\right)^{\frac{b-d}{ax+d}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(b-d)x}{ax+d}} = e^{\frac{b-d}{a}}.$$

Таким образом,

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a<c; \\ +\infty, & \text{если} \quad a>c; \\ 1, & \text{если} \quad a=c,\ b=d; \\ e^{\frac{b-d}{a}}, & \text{если} \quad a=c,\ b\neq d. \end{cases}$$

3. *Доказать, что система уравнений* $AX = B$, *где*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

а элементы матрицы A *определяются равенством* $a_{ij} = i - j$, $i, j = 1,\ldots,n$, *имеет бесконечно много решений.*

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{1\text{-й столбец}- \\ 2\text{-й столбец}}}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{(n+1)\text{-й столбец}- \\ 1\text{-й столбец}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|B]$, и система совместна. Прибавим теперь ко второму столбцу третий, умноженный на (-1), и получим, что $\operatorname{rang} A < n$, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

4. *Доказать, что* $e^x > \ln(1+x)+1$ *при* $x>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$. Так как

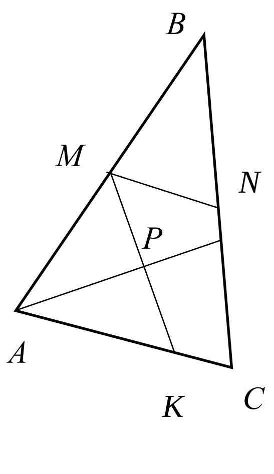
$$f'(x)=e^x-\frac{1}{1+x}>0 \text{ при } x>0$$

(это следует из неравенств $e^x>1$, $\frac{1}{1+x}<1$ при $x>0$), то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0;+\infty)$, следовательно,

$$f(x)>f(0)=0 \Leftrightarrow e^x>\ln(1+x)+1 \text{ при } x>0.$$

5. *Точки* $M(1;2)$ *и* $N(5;4)$ *– середины сторон* AB *и* BC *треугольника* ABC *соответственно. Прямая* $y=x-1$ *– биссектриса угла* BAC. *Найти координаты вершин треугольника.*

Решение. Так как каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то точка K, симметричная точке M относительно прямой $y=x-1$, лежит на стороне AC треугольника. Уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой $y=x-1$, имеет вид $y=-x+3$. Решив систему уравнений



$$\begin{cases} y=x-1, \\ y=-x+3, \end{cases}$$

найдем точку $P(2;1)$ пересечения прямых, являющуюся серединой отрезка MK. Тогда, используя формулы для нахождения координат середины отрезка, найдем точку $K(3;0)$. Так как прямые MN и AC параллельны, то их угловой коэффициент $k=\frac{4-2}{5-1}=\frac{1}{2}$, а уравнение прямой AC имеет вид

$$y=\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow 2y-x+3=0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=x-1, \\ 2y-x+3=0, \end{cases}$$

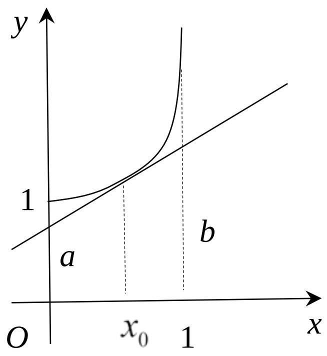
найдем точку $A(-1;-2)$ как точку пересечения прямых AP и AC.

Снова используя формулы для нахождения координат середины отрезка, найдем точки $B(3;6)$ и $C(7;2)$.

6. *Фигура ограничена линиями* $y=x^3+1,\ y=0,\ x=0,\ x=1.$ *В какой точке* (x_0, y_0) *графика функции* $y=x^3+1$ *необходимо провести к нему касательную, чтобы она отсекала от данной фигуры трапецию наибольшей площади?*

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y=x^3+1$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y-x_0^3-1=3x_0^2(x-x_0) \Leftrightarrow y=3x_0^2x-2x_0^3+1.$$



Площадь отсекаемой трапеции (см. рисунок) может быть найдена по формуле

$$S=\frac{a+b}{2}.$$

Так как a и b равны ординатам точек пересечения касательной с прямыми $x=0$ и $x=1$ соответственно, то $a=1-2x_0^3,\ b=3x_0^2-2x_0^3+1$, тогда

$$S=\frac{3x_0^2-4x_0^3+2}{2}.$$

Рассмотрим функцию

$$S(x)=\frac{3x^2-4x^3+2}{2}$$

и найдем ее точки экстремума.

$$S'(x)=\frac{6x-12x^2}{2}=3x-6x^2=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{1}{2}.$$

Так как

$$S''(x)=3-12x,\ S''(0)=3>0,\ S''\left(\frac{1}{2}\right)=-3<0,$$

то $x=0$ и $x=1$– точки локального минимума и максимума соответственно, следовательно, площадь трапеции будет наибольшей, если касательную провести через точку $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$.

7. *Пусть* $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. *Доказать, что существует такое число* $c\in(0;1)$*, что* $f'(c)=0$.

Решение. Так как

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

то функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[0;1]$. Следовательно, в силу утверждения теоремы, существует такое число $c\in(0;1)$, что $f'(c)=0$.