

**Решения задач студенческой олимпиады по
математике БГЭУ 2017**

1. Доказать, что если между цифрами числа 1331 записать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

Решение. Справедливо равенство $1331 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = (10 + 1)^3$. Записав между цифрами числа по k нулей, получим число

$$1 \cdot 10^{3+3k} + 3 \cdot 10^{2+2k} + 3 \cdot 10^{1+k} + 1 = (10^{1+k} + 1)^3.$$

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^x$, $a, b, c, d > 0$.

Решение. Обозначим $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^x$. Очевидно, что

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если } a < c; \\ +\infty, & \text{если } a > c; \\ 1, & \text{если } a = c, b = d. \end{cases}$$

Пусть $a = c$, $b \neq d$. Тогда

$$A = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax+d+b-d}{ax+d} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{b-d}{ax+d} \right)^{\frac{ax+d}{b-d}} \right)^{\frac{b-d}{ax+d} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-d)x}{ax+d}} = e^{\frac{b-d}{a}}.$$

Таким образом,

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если } a < c; \\ +\infty, & \text{если } a > c; \\ 1, & \text{если } a = c, b = d; \\ e^{\frac{b-d}{a}}, & \text{если } a = c, b \neq d. \end{cases}$$

3. Доказать, что система уравнений $AX = B$, где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

а элементы матрицы A определяются равенством $a_{ij} = i - j$, $i, j = 1, \dots, n$, имеет бесконечно много решений.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1\text{-й столбец} - \\ 2\text{-й столбец} \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} (n+1)\text{-й столбец} - \\ 1\text{-й столбец} \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-n & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 3-n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Следовательно, $\text{rang } A = \text{rang } [A|B]$, и система совместна. Прибавим теперь ко второму столбцу третий, умноженный на (-1) , и получим, что $\text{rang } A < n$, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

4. Доказать, что $e^x > \ln(1+x) + 1$ при $x > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$. Так как

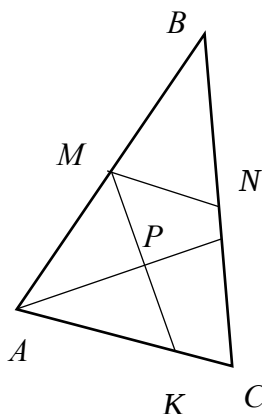
$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0 \quad \text{при } x > 0$$

(это следует из неравенств $e^x > 1$, $\frac{1}{1+x} < 1$ при $x > 0$), то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; +\infty)$, следовательно,

$$f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow e^x > \ln(1+x) + 1 \quad \text{при } x > 0.$$

5. Точки $M(1;2)$ и $N(5;4)$ – середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Прямая $y = x - 1$ – биссектриса угла BAC . Найти координаты вершин треугольника.

Решение. Так как каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то точка K , симметричная точке M относительно прямой $y = x - 1$, лежит на стороне AC треугольника. Уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой $y = x - 1$, имеет вид $y = -x + 3$. Решив систему уравнений



$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = -x + 3, \end{cases}$$

найдем точку $P(2;1)$ пересечения прямых, являющуюся серединой отрезка MK . Тогда, используя формулы для нахождения координат середины отрезка, найдем точку $K(3;0)$. Так

как прямые MN и AC параллельны, то их угловой коэффициент $k = \frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$, а уравнение прямой AC имеет вид

$$y = \frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow 2y - x + 3 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ 2y - x + 3 = 0, \end{cases}$$

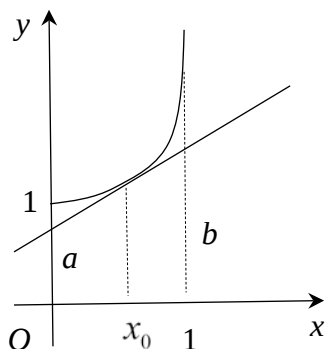
найдем точку $A(-1; -2)$ как точку пересечения прямых AP и AC .

Снова используя формулы для нахождения координат середины отрезка, найдем точки $B(3; 6)$ и $C(7; 2)$.

6. Фигура ограничена линиями $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. В какой точке (x_0, y_0) графика функции $y = x^3 + 1$ необходимо провести к нему касательную, чтобы она отсекала от данной фигуры трапецию наибольшей площади?

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 1$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y - x_0^3 - 1 = 3x_0^2(x - x_0) \Leftrightarrow y = 3x_0^2x - 2x_0^3 + 1.$$



Площадь отсекаемой трапеции (см. рисунок) может быть найдена по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}.$$

Так как a и b равны ординатам точек пересечения касательной с прямыми $x = 0$ и $x = 1$ соответственно, то $a = 1 - 2x_0^3$, $b = 3x_0^2 - 2x_0^3 + 1$, тогда

$$S = \frac{3x_0^2 - 4x_0^3 + 2}{2}.$$

Рассмотрим функцию

$$S(x) = \frac{3x^2 - 4x^3 + 2}{2}$$

и найдем ее точки экстремума.

$$S'(x) = \frac{6x - 12x^2}{2} = 3x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}.$$

Так как

$$S''(x) = 3 - 12x, S''(0) = 3 > 0, S''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0,$$

то $x = 0$ и $x = 1$ — точки локального минимума и максимума соответственно, следовательно, площадь трапеции будет наибольшей, если касательную провести через точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{8}\right)$.

7. Пусть $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Доказать, что существует такое число $c \in (0;1)$, что $f'(c) = 0$.

Решение. Так как

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

то функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[0;1]$. Следовательно, в силу утверждения теоремы, существует такое число $c \in (0;1)$, что $f'(c) = 0$.