Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ
2012 год

1. *Найти матрицу* X *, если* $X - X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *причем* $\det X = 1$.

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $X^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a - d = -1, \\ 2b = 10, \\ 2c = 2, \\ d - a = 1, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ или $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *Составить уравнение касательной к графику функции* $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 3$*, имеющей наибольший угловой коэффициент.*

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в произвольной точке x определяется равенством $k = f'(x) = -3x^2 - 12x$. Функция $f'(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 = -2$ (абсцисса вершины параболы), следовательно, $k_{\max} = f'(-2) = 12$. Так как $f(-2) = -13$, то уравнение искомой касательной имеет вид $y + 13 = 12(x + 2)$, или $y = 12x + 11$.

3. *Среди прямых, проходящих через точку* $P(3;0)$*, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми* $2x - y - 2 = 0$ (l_1) *и* $x + y + 3 = 0$ (l_2)*, делится точкой* P *пополам.*

Решение. Уравнение любой прямой l, проходящей через точку P (кроме прямой $x = 3$, не удовлетворяющей условию задачи), можно записать в виде $y = k(x - 3)$. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ x + y + 3 = 0 \end{cases},$$

найдем точки $M\left(\frac{3k-2}{k-2}; \frac{4k}{k-2}\right)$ и $N\left(\frac{3k-3}{k+1}; \frac{-6k}{k+1}\right)$ пересечения прямой l с прямыми l_1 и l_2 соответственно. Так как точка P должна делить отрезок MN пополам, то

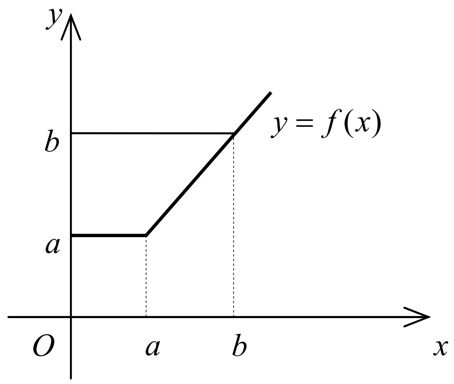
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3k-2}{k-2} + \frac{3k-3}{k+1}\right) = 3, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4k}{k-2} - \frac{6k}{k+1}\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $k = 8$, и уравнение искомой прямой $y = 8x - 24$.

4. *Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции* $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}$, $x\geq 0$, *осью* Oy *и прямой* $y=b,\ 0<a<b$.

Решение. Пусть $x\leq a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=a$. Если же $x>a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+x^n\right)^{\frac{1}{n}}=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{a}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=x$. Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}a, & x\leq a,\\ x, & x>a.\end{cases}$$



Искомая фигура □ трапеция с основаниями b и a и высотой $b-a$. Следовательно, $S=\dfrac{a+b}{2}\left(b-a\right)=\dfrac{b^2-a^2}{2}$.

5. *В матрице* A_{2n} *размеров* $2n\times 2n$ *все элементы главной диагонали равны 7, все элементы побочной диагонали равны 6, а все остальные элементы равны 0. Вычислить* $\det A_{2n}$.

Решение.

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & \dots & 0 & 6\\ 0 & 7 & \dots & 6 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 6 & \dots & 7 & 0\\ \underbrace{6 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 7}_{2n} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы A вычтем из первой строки последнюю, умноженную на $\dfrac{6}{7}$, а затем разложим определитель по элементам первой строки:

$$\det A_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix}7&0&\dots&0&6\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix}7-\dfrac{36}{7}&0&\dots&0&0\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n}=$$

$$=\left(7-\frac{36}{7}\right)\cdot(-1)^2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}7&0&\dots&6&0\\0&7&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\6&0&\dots&7&0\\0&0&\dots&0&7\end{vmatrix}}_{2n-1}.$$

Разложим полученный определитель по элементам последней строки, тогда

$$\det A_{2n}=\left(7-\frac{36}{7}\right)\cdot 7\cdot\det A_{2n-2}=13\cdot\det A_{2n-2},$$

где

$$A_{2n-2}=\left(\underbrace{\begin{matrix}7&0&\dots&0&6\\0&7&\dots&6&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&6&\dots&7&0\\6&0&\dots&0&7\end{matrix}}_{2n-2}\right).$$

Аналогично, $\det A_{2n-2}=13\cdot\det A_{2n-4}$, и т.д. Таким образом,

$$\det A_{2n}=13\cdot\det A_{2n-2}=13^2\cdot\det A_{2n-4}=\ldots=13^{n-1}\cdot\det A_2=13^{n-1}\cdot\begin{vmatrix}7&6\\6&7\end{vmatrix}=13^n.$$

6. *Найти предел* $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$, $a>0$.

Решение. Пусть $a\neq 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n^2+n}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n^2}{n^2+n}\cdot\frac{a^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\dfrac{1}{n^2+n}}\right)=$$

$$=\left[a^{\frac{1}{n^2+n}}-1\sim\frac{\ln a}{n^2+n},\ n\to\infty\right]=\ln a.$$

Если $a=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot 0\right)=0=\ln a$.

7. *Найти количество нулей функции* $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.

Решение. Очевидно, что $f(0) = f(1) = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ – нули функции. Кроме того, $f(4) = -1 < 0$, $f(5) = 6 > 0$, следовательно, в силу непрерывности функции $f(x)$, существует точка $x_3 \in (4;5)$, такая, что $f(x_3) = 0$. Предположим, что существует еще один нуль функции $x_4 \neq 0;\, 1;\, x_3$. По теореме Ролля, производная $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$ должна иметь как минимум три нуля (по одному между каждыми двумя соседними нулями функции $f(x)$), а вторая производная $f''(x) = 2^x \ln 2 - 2$ – как минимум два нуля, что невозможно в силу строгой монотонности функции $f''(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет ровно три нуля.