

**Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ
2013 год**

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Так как $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos(\operatorname{arctg} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

2. Матрица A такова, что $A^k = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{k-1}$, где E – единичная матрица.

Решение. Найдем произведение матриц $B = E - A$ и $C = E + A + \dots + A^{k-1}$:

$BC = (E - A)(E + A + \dots + A^{k-1}) = E + A + \dots + A^{k-1} - A - A^2 - \dots - A^k = E$, следовательно, $C = B^{-1}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения определителя третьего порядка, все элементы которого равны 0 или 1.

Решение. Разложим определитель третьего порядка по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Поскольку $a_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j = 1, 2, 3$, то любой минор второго порядка может быть равен либо 0, либо ± 1 . Следовательно, $\Delta \leq 3$, причем равенство возможно лишь в том случае, когда $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$, а $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -1$. Одновременное выпол-

нение этих равенств невозможно, следовательно $\Delta \leq 2$. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, то

$\max \Delta = 2$.

При перестановке местами любых двух строк определитель меняет знак, следовательно $\min \Delta = -\max \Delta = -2$.

4. На плоскости даны точки A и B . Найти множество точек M плоскости, удовлетворяющих условию $AM^2 - BM^2 = a^2$.

Решение. Расположим систему координат так, чтобы точка A совпадала с началом координат, а точка B лежала на оси Ox . Тогда точки A и B имеют координаты $A(0; 0)$, $B(x_0; 0)$. Пусть $M(x; y)$, тогда $AM^2 = x^2 + y^2$, $BM^2 = (x - x_0)^2 + y^2$, и уравнение искомого множества точек имеет вид

$$x^2 + y^2 - (x - x_0)^2 - y^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x_0^2 + a^2}{2x_0}.$$

Таким образом, множество точек M плоскости, удовлетворяющих условию $AM^2 - BM^2 = a^2$ – прямая, перпендикулярная прямой AB .

5. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$, если $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$.

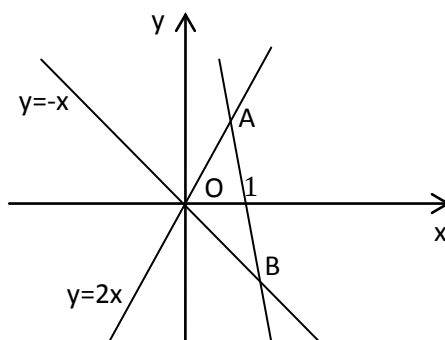
Решение. Возведем в скалярный квадрат обе части равенства $-\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a}).$$

$$\text{Отсюда } (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a}) = \frac{-\vec{a}^2 - \vec{b}^2}{2} = -8,5.$$

6. Через точку $(1; 0)$ провести прямую, отсекающую от угла, образованного прямыми $y = 2x$ и $y = -x$ и лежащего в правой полуплоскости, треугольник наименьшей площади.

Решение.



Уравнение искомой прямой AB запишем в виде $y = kx + b$. Так как прямая проходит через точку $(1; 0)$, то $b = -k$. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = kx - k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x, \\ y = kx - k \end{cases},$$

выразим координаты точек $A\left(\frac{k}{k-2}; \frac{2k}{k-2}\right)$ и $B\left(\frac{k}{k+1}; \frac{-k}{k+1}\right)$. Площадь треуголь-

ника AOB найдем по формуле $S = \frac{1}{2}AB \cdot d$, где $d = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ – расстояние от

точки O до прямой AB , а

$$AB = \sqrt{\left(\frac{k}{k-2} - \frac{k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{2k}{k-2} + \frac{k}{k+1}\right)^2} = \frac{3k\sqrt{k^2 + 1}}{(k+1)(k-2)}.$$

$$\text{Тогда } S = S(k) = \frac{3k^2}{(k+1)(k-2)}. \text{ Найдем производную: } S'(k) = \frac{-3k(k+4)}{(k+1)^2(k-2)^2}.$$

Несложно показать, что $k = -4$ – точка минимума, и функция $S(k)$ принимает в этой точке наименьшее значение.

Следовательно, уравнение искомой прямой $y = -4(x - 1)$.

7. Пусть дана непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Доказать, что если касательная во всех точках графика функции $f(x)$ проходит через одну и ту же точку плоскости, то график $f(x)$ есть прямая.

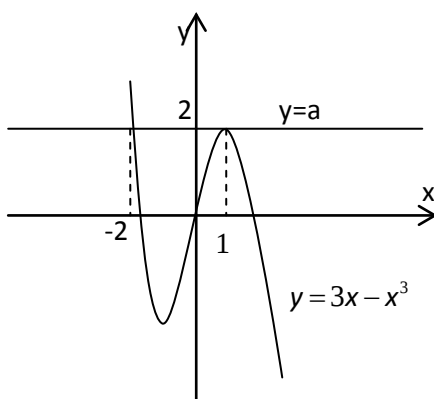
Решение. Пусть (X, Y) – произвольная точка касательной, (x, y) , $y = f(x)$ – точка касания, тогда уравнение касательной имеет вид $Y - y = y'(X - x)$. Так как по условию любая касательная проходит через одну и ту же точку (x_0, y_0) , то

$y_0 - y = y'(x_0 - x)$, откуда $y' = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. Продифференцируем последнее равенство:

$$y'' = \frac{y'(x - x_0) - (y - y_0)}{(x - x_0)^2} = 0. \text{ Следовательно, } y' = a, y = ax + b \text{ – прямая.}$$

8. Наибольший корень уравнения $x^3 - 3x + a = 0$ есть функция $\varphi(a)$ параметра a . Найти точки разрыва этой функции и определить их характер.

Решение. Построим графики функций $y = 3x - x^3$ и $y = a$.



Очевидно, что при любом $a > 2$ уравнение $x^3 - 3x + a = 0$ имеет единственный корень. Отсюда и из непрерывности функции $f(x) = 3x - x^3$ следует непрерывность $\varphi(a)$ при $a > 2$. Для $a < 2$ наибольший корень уравнения $x^3 - 3x + a = 0$ будет больше 1, причем $\varphi(a)$ будет также непрерывна.

Остается значение $a = 2$. Уравнение примет вид $x^3 - 3x + 2 = 0$, его корни $x_{1,2} = 1$, $x_3 = -2$, т.е. $\varphi(2) = 1$. При этом $\lim_{a \rightarrow 2+0} \varphi(a) = -2$, $\lim_{a \rightarrow 2-0} \varphi(a) = 1$. Следовательно, $a = 2$ – точка разрыва первого рода.