Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2018

1. *Вычислить* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2018 \end{vmatrix}$.

Решение.

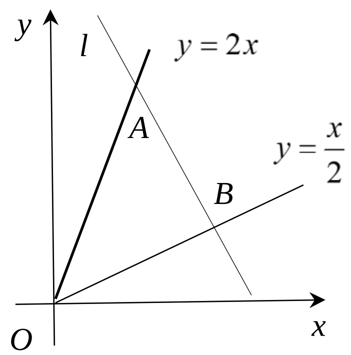
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2018 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\dots\left(-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(-1)^{2017}}{2018} = \frac{-1}{2018}.$$

2. *Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции* $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$, $x\ge 0$, *осями координат и прямой* $x=a$, $a>1$.

Решение. При $0\le x<1$ имеем $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$. Если $x=1$, то $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$. Если $x>1$, то $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}=x$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$. Таким образом, $y=\begin{cases}1, & x\le 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ и искомая площадь равна $\frac{a^2+1}{2}$.

3. *Составить уравнение прямой, удаленной от начала координат на* $2\sqrt{2}$ *и образующей вместе с прямыми* $y=2x$ *и* $y=0{,}5x$ *треугольник наименьшей площади, расположенный в первой четверти.*



Решение. Запишем уравнение искомой прямой l в виде $y=kx+b \Leftrightarrow kx-y+b=0$. Очевидно, что треугольник AOB будет иметь наименьшую площадь при $k<0, b>0$. Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ определяется формулой $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. При $A=k, B=-1, C=b, x_0=y_0=0$ получим расстояние от точки O до прямой l: $d=\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{2}$, поэтому $b=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}$.

Площадь треугольника ABC можно найти по формуле

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\frac{x_A}{\cos\alpha}\cdot\frac{x_B}{\cos\beta}\cdot\sin\angle AOB,$$

где x_A, x_B – абсциссы точек A и B, α и β – углы, которые образуют с осью Ox прямые OA и OB соответственно.

Из систем уравнений

$$\begin{cases} y=2x, \\ y=kx+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x}{2}, \\ y=kx+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1} \end{cases}$$

найдем, соответственно, $x_A=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}}{2-k}$, $x_B=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}}{1-2k}$.

Значение S будет наименьшим при наименьшем значении произведения $x_A\cdot x_B$, т.е. при наименьшем значении функции

$$f(k)=\frac{k^2+1}{(2-k)(1-2k)}.$$

Найдем ее производную:

$$f'(k)=\frac{-5\left(k^2-1\right)}{(2-k)(1-2k)}.$$

Функция $f(k)$ непрерывна на $(-\infty;0)$, единственной ее точкой экстремума на этом промежутке является точка минимума $k=-1$. Следовательно, $\min\limits_{k<0} f(k)=f(-1)$, и $y=-x+4$ – уравнение искомой прямой.

4. *Пусть* $y=f(x)$ *– четная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям* $f(3)=1$, $f'(3)=2$. *Составить уравнение касательной к графику функции* $y=f\left(x^3+2x\right)$ *в точке* $x=-1$.

Решение. Обозначим $g(x)=f\left(x^3+2x\right)$. Уравнение касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке $x=-1$ имеет вид

$$y-g(-1)=g'(-1)(x+1).$$

По условию задачи $g(-1)=f(-3)=f(3)=1$, так как функция $f(x)$ – четная.

Продифференцируем тождественное равенство $f(-x)=f(x)$. Получим

$$f(-x)\cdot(-x)'=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x),$$

то есть <u>производная четной функции является нечетной функцией</u>.

Так как $g'(x)=f'\left(x^3+2x\right)\cdot\left(3x^2+2\right)$, а функция $g(x)$ также является четной, то $g'(-1)=f'(-3)\cdot 5=-5f'(3)=-10$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y-1=-10(x+1)$ или $y=-10x-9$.

5. *Доказать, что если для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $f(x+a) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ **(1),**

то $f(x)$ *– периодическая функция.*

Решение. Так как равенство (1) верно при любых x, то оно останется верным, если вместо x подставить $x+a$:

$$f\big((x+a)+a\big) = f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f\left(x\right)}. \qquad \textbf{(2)}$$

Равенство (2) также выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$. Подставим в (2) $x+2a$ вместо x:

$$f\big((x+2a)+2a\big) = f\left(x+4a\right) = -\frac{1}{f\left(x+2a\right)} = f\left(x\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция $f\left(x\right)$ – периодическая с периодом $T = 4a$.

6. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} = \min\{i, j\}$, $i, j = 1,\ldots,n$, $b_1 = n,\ b_k = b_{k-1} + n - k + 1,\ k = 2,\ldots,n$.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & b_1 + n - 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & b_2 + n - 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & b_{n-1} + 1 \end{array}\right].$$

Вычтем из строки с номером n строку с номером $n-1$, после чего из строки с номером $n-1$ вычтем строку с номером $n-2$, и так далее. Получим

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Следовательно, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.