МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УО «Белорусский государственный экономический университет»

Е.И.Шилкина, М.П. Дымков, В.А. Рабцевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-практическое пособие

Часть 1

Минск 2014

Рекомендовано кафедрой высшей математики

Шилкина, Е.И.

Высшая математика: Часть 1. Учеб.-практ. пособие / Е.И. Шилкина, М.П. Дымков, В.А. Рабцевич. Мн.: БГЭУ, 2014.— 194 с.

Оглавление

Вопросы для повторения и тренировочные задания

Введение

Современный уровень требований, предъявляемых к специалистам по экономике и управлению, требует постоянного ознакомления с передовыми идеями модельной структуризации и анализа, в основе которых лежат математические методы. Эти методы опираются на линейную алгебру, анализ функций одной и многих переменных и некоторые другие разделы математики, которые необходимо изучить студенту экономического вуза.

Учебные планы экономических специальностей по дисциплине «Высшая математика», как правило, предусматривают три самостоятельные и вместе с тем тесно связанные части: 1. Общий курс высшей математики. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. 3. Математическое программирование.

Целью и задачами изучения математических дисциплин в экономическом вузе являются:

1) ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач экономики;
2) привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и приложениям;
3) развить логическое мышление и повысить уровень математической культуры студентов;
4) выработать навыки математического исследования прикладных задач и умение перевести экономическую задачу на математический язык.

Основной формой обучения студента заочной и дистанционной формы обучения является самостоятельная работа над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение тренировочных заданий, ответы на вопросы теста по пройденным разделам. Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов или отдельных его частей является сдача тестов, зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Данное учебно-практическое пособие (УПП) ни в коей мере не заменит учебник по высшей математике, оно лишь служит своеобразным “путеводителем”, обращая внимание студента на принципиальные моменты курса.

Общие рекомендации студенту по самостоятельной работе над математическими курсами

Основной и наиболее плодотворной формой обучения студентов –заочников является самостоятельная работа над учебным материалом, которая может быть представлена в виде следующих этапов: изучение теоретических сведений по учебникам и пособиям, решение задач, самопроверка.

При чтении учебника следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая самостоятельно рекомендуемые к решению задания, восстанавливая все промежуточные вычисления. Весьма полезным является краткое конспектирование изучаемого теоретического материала с выделением в конспекте важнейших формул. Как правило, при сдаче экзамена или зачета, в случае необходимости разрешается воспользоваться таким конспектом.

Чтение учебника или пособия должно сопровождаться решением задач. Решение каждой задачи должно содержать обоснование каждого ее этапа и должно быть доведено до ответа. При этом следует обращать серьезное внимание на правильность арифметических вычислений. Задачи заданного типа необходимо решать до приобретения твердых навыков и только в случае полной уверенности в отработке приемов решения задач данного типа можно пропускать однотипные примеры.

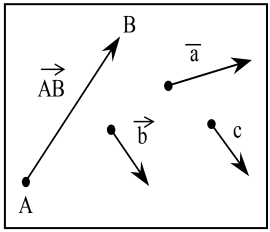
Самопроверка состоит в ответе на теоретические вопросы и решение тренировочных заданий, не заглядывая в ответ. Не стоит расстраиваться и паниковать, если какие-то задания не будут сразу получаться. Нужно попытаться выяснить, из-за чего конкретно не получается правильный ответ, найти аналогичное задание в литературе, а лишь потом обращаться за консультацией, если есть в этом необходимость.

Основные теоретические сведения

Линейная алгебра
и
аналитическая геометрия

1. Многомерное арифметическое пространство

1.1. Геометрическое понятие вектора

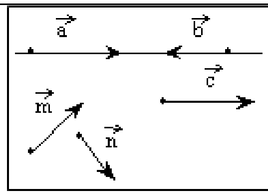


Связанным вектором называется отрезок прямой, для которого указаны его начальная точка и конечная точка, например $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

. *линой* связанного вектора называется расстояние между начальной и конечной точками отрезка. Длину (или модуль) связанного вектора обозначают $\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$, $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$, $\left|\vec{\mathbf{b}}\right|$, $\left|\overline{\mathbf{b}}\right|$. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным или ортом. Если $A\,.\,B$, то связанный вектор называют *нулевым* (обозначение: $\vec{0}$, $\overline{0}$, $\mathbf{0}$) – его длина равна нулю, а направление не определено (можно выбрать любым).

Два ненулевых связанных вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ называют *эквивалентными*, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

Свободным вектором или просто *вектором* называется множество всех эквивалентных между собой связанных векторов. Часто векторы обозначают с помощью строчных букв со стрелкой над ними: $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \ldots$ (или с черточкой наверху: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$). В печатных изданиях векторы обозначают также буквами жирного шрифта: **a, b, c,**… Вектор однозначно задается двумя характеристиками – *длиной* и *напрвлением.*

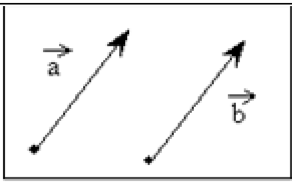
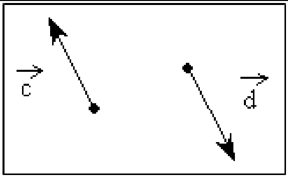
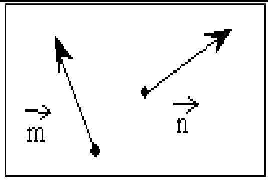


$\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ **коллинеарны**

$\vec{\mathbf{m}}$, $\vec{\mathbf{n}}$ **неколлинеарны**

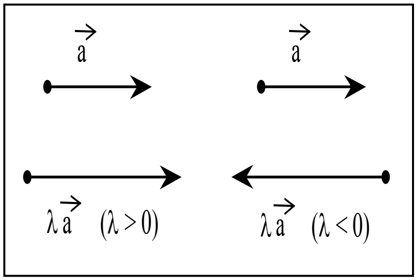
Векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. *Нулевой вектор считается коллинеарным л. бому вектору*. Записывают $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$, если векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ одинаково направлены (говорят *сонаправлены*), и $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$, если эти векторы противоположно направлены.

Два вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются равными (записывается $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$), если они коллинеарны, направлены в одну и ту же сторону и имеют одинаковые длины.

		
$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$ Равные	$\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{d}}$ Противоположные	$\vec{\mathbf{m}} \neq \vec{\mathbf{n}}$ Неравные

Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$ в трехмерном пространстве называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости.

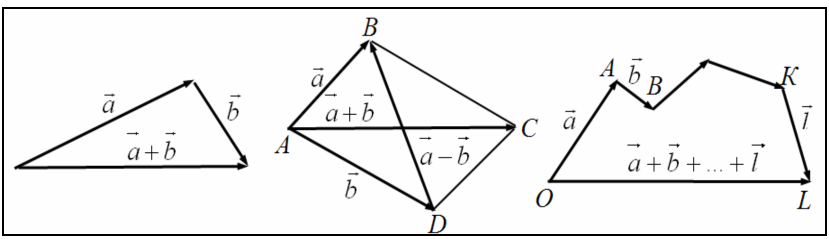
Произведением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{\mathbf{a}}$, коллинеарный вектору $\bar{\mathbf{a}}$, длина которого $\left|\lambda\bar{\mathbf{a}}\right| = |\lambda| \cdot \left|\bar{\mathbf{a}}\right|$; направление совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{a}}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.



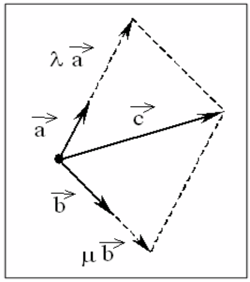
Суммой двух векторов $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{BC}} = \bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\overline{\mathbf{AC}}$ и обозначается $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.

Разностью двух векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{a}} + (-1)\cdot\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \left(-\bar{\mathbf{b}}\right)$ и обозначается $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.

Аналогично определяется сумма нескольких векторов: если векторы $\bar{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{OA}},\ \bar{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{AB}}, \dots, \vec{\mathbf{l}} = \overline{\mathbf{KL}}$ образуют ломаную $OAB...KL$, то суммой этих векторов является вектор $\overline{\mathbf{OL}}$, замыкающий эту ломаную.



Эти две операции обладают привычными для нас свойствами: $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}=\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{a}}+\left(\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}\right)=\left(\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}\right)+\overline{\mathbf{c}}$, $\lambda\left(\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}\right)=\lambda\overline{\mathbf{a}}+\lambda\overline{\mathbf{b}}$ и т.д.



Вектор единичной длины, параллельный $\overline{\mathbf{a}}$ и сонаправленный с ним, называется ортом вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и обозначается $\overline{\mathbf{a}}^0$: $\overline{\mathbf{a}}^0=\overline{\mathbf{a}}/\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$. Любой ненулевой вектор можно представить в виде произведения единичного вектора (его орта) на его длину: $\vec{\mathbf{a}}=\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cdot\vec{\mathbf{a}}^0$

Линейной комбинацией *векторов* $\overline{\mathbf{a}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ *с коэффициентами* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ *называется вектор* $\overline{\mathbf{b}}$ *вида*

$$\overline{\mathbf{b}}=\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1+\ldots+\lambda_k\overline{\mathbf{a}}_k,\quad \text{или}\quad \overline{\mathbf{b}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{\mathbf{a}}_i$$

Иначе говоря, **вектор** $\overline{\mathbf{b}}$ ***разлагается по векторам*** $\overline{\mathbf{a}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ ***(линейно выражается через них)***.

Система векторов $\overline{\mathbf{a}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_n$ называется **линейно-зависимой**, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1+\ldots+\lambda_n\overline{\mathbf{a}}_n=\overline{\mathbf{0}}$.

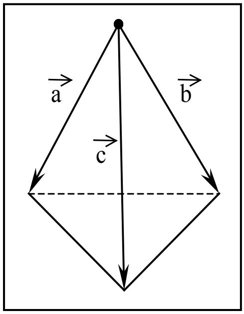
Если равенство $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{\mathbf{a}}_i=\overline{\mathbf{0}}$ возможно лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, то система векторов $\left\{\overline{\mathbf{a}}_j\right\}_{j=1}^{n}$ называется **линейно независимой**.

Базис и ранг системы векторов: базис – ее максимальная линейно независимая подсистема, **ранг** – количество векторов в базисе.

Любой вектор системы единственным способом разлагается по базису. Все базисы одной системы состоят из одинакового числа векторов, равного ее рангу. Базисов может быть много.

Базисом на плоскости (*в* R^2) является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости. Базис обозначают $\left(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}\right)$. Если $\left(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}\right)$ – произвольный базис на плоскости, то любой вектор $\overline{\mathbf{c}}$ этой плоскости единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ т. е. $\vec{\mathbf{c}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$. Числа λ, μ называют *координатами вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *в базисе* $(\vec{a}\,; \vec{b}\,)$ и записывают $\bar{\mathbf{c}}$ = (λ; μ) или $\bar{\mathbf{c}}$ (λ; μ).

Базисом в пространстве R^3 называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$. Любой вектор $\vec{d}$ пространства R^3 можно единственным способом разложить по этому базису, т.е. записать его в виде $\vec{\mathbf{d}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} + \delta\vec{\mathbf{c}}$. Числа λ, μ, δ называются координатами вектора $\vec{\mathbf{d}}$ в базисе $(\vec{\mathbf{a}}; \vec{\mathbf{b}}; \vec{\mathbf{c}})$. Вектор $\vec{\mathbf{d}}$ записывают в виде $\vec{\mathbf{d}} = (\lambda; \mu; \delta)$ или $\vec{\mathbf{d}}(\lambda; \mu; \delta)$.



Если $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ – базис в пространстве R^3, то любой вектор $\bar{\mathbf{a}}$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$, т. е. $\bar{\mathbf{a}} = x\bar{\mathbf{e}}_1 + y\bar{\mathbf{e}}_2 + z\bar{\mathbf{e}}_3$. Числа x, y, z называют *координатами вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *в базисе* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и записывают $\bar{\mathbf{a}} = (x; y; z)$ или $\bar{\mathbf{a}}(x; y; z)$.

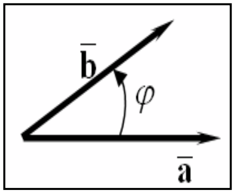
Базисов на плоскости R^2 ***и в пространстве*** R^3 ***бесконечно много. Если базис фиксирован, то каждый вектор однозначно определяется своими координатами. И наоборот – каждому набору координат соответствует единственный вектор.***

Операциям над векторами соответствуют операции над их координатами: при сложении векторов складываются их соответствующие координаты; при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны только в том случае, если координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda$, где λ – коэффициент пропорциональности: $\bar{\mathbf{b}} = \lambda\bar{\mathbf{a}}$.

Прямую с выбранным на ней направлением называют *осью*. Ось с задаными началом отсчета и единиччным отрезком называют *коор-*

динатной осью. Например, орт любого ненулевого связанного вектора задает некоторую координатную ось.



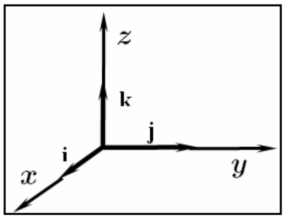
Углом между двумя векторами (или между вектором и осью, или между двумя осями) называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть один вектор (ось), чтобы он совпал по направлению с другим вектором (осью). Очевидно, что $0 \le \varphi \le \pi$.

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\pi/2$.

Если векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ в R^3 единичные и взаимно перпендикулярные, то они образуют *ортонормированный (декартов прямоугольный*) базис.

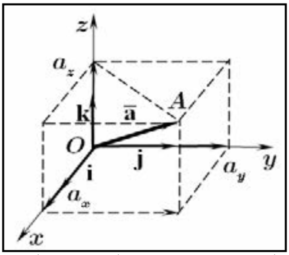
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образует *правую* (левую) *тройку*, если после совмещения их начал путём параллельного переноса, кратчайший поворот от первого вектора $\bar{\mathbf{a}}_1$ ко второму вектору $\bar{\mathbf{a}}_2$ виден из конца третьего вектора $\bar{\mathbf{a}}_3$, совершающимся *против* (по) *часовой стрелки*.

Для ортонормированного базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ в R^3, образующего правую тройку, приняты обозначения $\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{i},\ \bar{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{j},\ \bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{k}$.



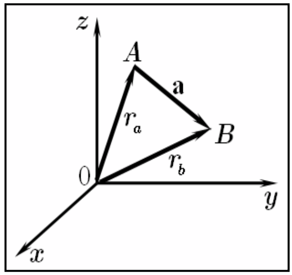
В пространстве R^3 с ортонормированным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ связывают *декартову прямоугольную систему координат*, задав дополнительно точку O – начало координат. Оси Ox, Oy, Oz, проведённые через точку O параллельно векторам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, называют *координатными осями.* Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy - осью ординат и ось Oz - осью апликат. Орты координатных осей Ox, Oy, Oz – векторы $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ соответственно.

Поскольку векторы $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ образуют *декартов прямоугольный базис* в пространстве R^3, то любой вектор из R^3 выражается через $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$, причем коэффициенты разложения находятся единственным образом и их называют *координатами вектора в базисе* $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ (*декартовыми прямоугольными координатами вектора)*. В частности,



радиус-вектор $\overline{\mathbf{OM}}$ произвольной точки $M(x, y, z)$ имеет разложение $\overline{\mathbf{OM}} = x \cdot \bar{\mathbf{i}} + y \cdot \bar{\mathbf{j}} + z \cdot \bar{\mathbf{k}}$, т.е. $\overline{\mathbf{OM}} = (x, y, z)$.

Координатами точки *M* называют координаты ее радиус-вектора $\overline{\mathbf{OM}}(x, y, z)$ и пишут $M(x, y, z)$ или $M = (x, y, z)$.

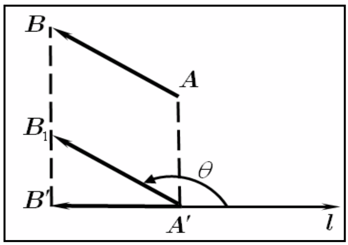


Точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяют (см. рис.) вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k},$$

т.е. $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$. Итак, *чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.*

Длину вектора $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ и длину отрезка AB можно вычислить по формуле $\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Здесь и далее, если явно не оговорено другое, подразумеваются *декартовы прямоугольные координаты.*



Проекцией вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}}$ (или на ось, параллельную и сонаправленную $\bar{\mathbf{b}}$) называют число $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\theta$, где θ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.

В ортонормированном базисе координаты *x, y, z* вектора $\bar{\mathbf{a}}$ совпадают с его проекциями на базисные орты $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$:

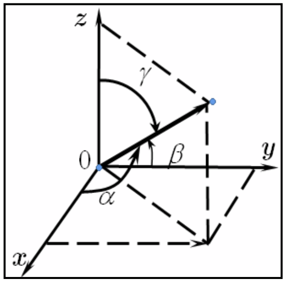
$$x = a_x = \text{пр}_i\mathbf{a},\quad y = a_y = \text{пр}_j\mathbf{a},\quad z = a_z = \text{пр}_k\mathbf{a},$$

при этом $|\bar{\mathbf{a}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\bar{\mathbf{a}} = \mathrm{x}\bar{\mathbf{i}} + \mathrm{y}\bar{\mathbf{j}} + \mathrm{z}\bar{\mathbf{k}}$ и векторами $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ соответственно. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{\mathbf{a}}$. Имеют место формулы:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$



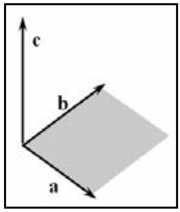
Часто вместо $\overline{\mathbf{a}} = x\overline{\mathbf{i}} + y\overline{\mathbf{j}} + z\overline{\mathbf{k}}$ пишут $\overline{\mathbf{a}}\{x;\, y;\, z\}$.

Аналогичные определения приняты на множестве векторов плоскости.

В пространстве R^3 определены еще две операции над векторами.

Векторным произведением $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ (или $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$) упорядоченной пары неколлинеарных векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ из R^3 называется вектор $\overline{\mathbf{c}}$, удовлетворяющий следующим трём требованиям:

1) $|\overline{\mathbf{c}}| = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$;



2) $\overline{\mathbf{c}}$ перпендикулярен каждому из векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$;

3) $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обладает свойствами:

а) Длина вектора $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ (т.е. $|\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}|$) равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$;

б) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a}$; в) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$; г) $(\lambda\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

в) Если $\overline{\mathbf{a}} = x_1 \cdot \overline{\mathbf{i}} + y_1 \cdot \overline{\mathbf{j}} + z_1 \cdot \overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{b}} = x_2 \cdot \overline{\mathbf{i}} + y_2 \cdot \overline{\mathbf{j}} + z_3 \cdot \overline{\mathbf{k}}$,

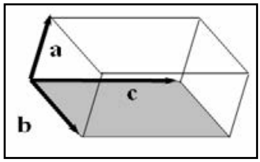
то $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\overline{\mathbf{i}} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\overline{\mathbf{j}} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\overline{\mathbf{k}}$,

или, в символической записи, $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ называется число $(\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}) \cdot \overline{\mathbf{c}}$. Смешанное произведение векторов **a**, **b, c** (обозначается $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$ или $\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{b}}\,\overline{\mathbf{c}}$) обладает свойствами:

а) $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = 0$;

б) для некомпланарной тройки векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ произведение $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) > 0$ в том и только в том случае, если **a**, **b, c** образуют правую тройку, и $\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\right) < 0$ в том и только в том случае, если $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ образуют левую тройку;



в) $\left|\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\right)\right|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$;

г) $\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\right) = \left(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}\right) = (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = -\left(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}\right) = -\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}\right) = -\left(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\right)$.

д) Если $\overline{\mathbf{a}} = x_1 \cdot \overline{\mathbf{i}} + y_1 \cdot \overline{\mathbf{j}} + z_1 \cdot \overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{b}} = x_2 \cdot \overline{\mathbf{i}} + y_2 \cdot \overline{\mathbf{j}} + z_3 \cdot \overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{c}} = x_3 \cdot \overline{\mathbf{i}} + y_3 \cdot \overline{\mathbf{j}} + z_3 \cdot \overline{\mathbf{k}}$,

то $\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (см. стр. 34).

Векторы $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\overline{c} = (x_3; y_3; z_3)$ в пространстве R^3 образуют базис (некомпланарны) тогда и только тогда, когда определитель матрицы (см. стр. 34), составленной из их координат в каком-либо базисе, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Итак, свойства геометрических векторов могут быть представлены аналитически через соотношения между их координатами. В пространствах большой размерности, где количество базисных векторов больше трех, этот подход (представление векторов их координатами) является единственно возможным. В его основу положено понятие *арифметического вектора.*

1.2. Арифметические векторы. Линейные операции над векторами. *n*-мерное арифметическое пространство

Упорядоченная совокупность $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n вещественных чисел называется *n-мерным вектором*, а числа x_i $(i = \overline{1,n})$ – координатами вектора.

Если, например, некоторое предприятие выпускает n видов продукции в количестве $x_1, x_2, ..., x_n$ единиц соответственно, то вектор $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ является n - мерным вектором.

Суммой n-мерных векторов $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называется n-мерный вектор $\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$.

Произведением n-мерного вектора $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на вещественное число α называют n-мерный вектор $\overline{\mathbf{c}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{a}} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ ... \ , \alpha a_n)$.

Введенные операции над n-мерными векторами, называемые *линейными операциями*, удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения);

2. $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения) ;

3. $\alpha \cdot (\overline{\beta \cdot \mathbf{a}}) = (\alpha\beta) \cdot \overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность умножения) ;

4. $\alpha \cdot (\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \alpha\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов) ;

5. $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \beta\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

6. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$, где $\overline{\mathbf{0}} = (0, 0, ..., 0)$;

7. $1 \cdot \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$, для всех $\overline{\mathbf{a}}$.

8. Для всех $\overline{\mathbf{a}}$ существует вектор $-\overline{\mathbf{a}}$, такой, что $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{0}$.

Совокупность всех n-мерных векторов, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения и умножения на число, подчиняющимся 1–8, называется *n-мерным линейным векторным пространством*. Если координаты векторов – вещественные числа, то пространство называют *арифметическим* и обозначают R^n.

Ненулевые векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{\mathbf{b}} = \alpha \overline{\mathbf{a}}$, где $\alpha \neq 0$. Это означает, что у коллинеарных векторов их одноименные координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \alpha$$

Пространство R^n можно рассматривать и как точечное, т.е. упорядоченный набор n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называть точкой. При этом точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ – начало отсчета, координаты точки M – это координаты ее *радиус-вектора* $\overline{\mathbf{OM}}$. В этом случае пишут $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1.3. Скалярное произведение n-мерных векторов. Модуль вектора. Угол между n-мерными векторами. Расстояние между точками *n*-мерного пространства

Скалярным произведением n-мерных векторов $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называется число, обозначаемое $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ и равное сумме произведений соответствующих координат:

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Если, например, предприятие реализует 4 вида товаров в количествах 10, 20, 15 и 5 единиц соответственно по ценам 2, 3, 4 и 6 денежных единиц, то скалярное произведение вектора цен $\overline{\mathbf{c}} = (2, 3, 4, 6)$ на вектор объемов продаж $\overline{\mathbf{x}} = (10, 20, 15, 5)$ даст ожидаемую выручку, которая составит $(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{x}}) = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 5 = 20 + 60 + 60 + 30 = 170$ (денежных единиц).

Модулем (*длиной*) n-мерного вектора $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ называется число $|\bar{\mathbf{a}}| = \sqrt{(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}})} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ... + a_n^{\,2}}$.

Углом ϕ между n-мерными векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется угол, косинус которого вычисляется по формуле:

$$\cos\phi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ... + a_n^{\,2}} \cdot \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + ... + b_n^{\,2}}}.$$

Расстоянием $d(A, B)$ между точками $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ n-мерного пространства называется длина вектора $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, т.е. $d(A, B) = \sqrt{(\overline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{AB}})} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$.

Справедливы следующие свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$ (коммутативность);

2. $(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$ (вынесение числового множителя);

3. $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ (дистрибутивность);

4. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) \geq 0$, причем знак равенства выполняется лишь при условии $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ (неотрицательность скалярного квадрата вектра).

Линейное n-мерное векторное пространство, в котором введена операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая свойствам 1– 4, называется *евклидовым пространством.*

2. Системы векторов

2.1. Линейная зависимость векторов. Системы векторов.

Вектор $\bar{\mathbf{b}}$ называется *линейной комбинацией* m векторов n-мерного пространства $\bar{\mathbf{a}}_1,\ \bar{\mathbf{a}}_2,\ ...,\ \bar{\mathbf{a}}_m$ с коэффициентами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, если $\bar{\mathbf{b}} = \lambda_1\bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\bar{\mathbf{a}}_2 + ... + \lambda_m\bar{\mathbf{a}}_m$. Например, если $\bar{\mathbf{b}} = (3,\ 1,\ 4,\ 5)$, $\bar{\mathbf{a}}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 8)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (4, -2,\ 2, -6)$, то $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}}_1 + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{a}}_2$.

Система векторов $\overline{\mathbf{a}}_1,\ \overline{\mathbf{a}}_2,\ \dots,\ \overline{\mathbf{a}}_m$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все одновременно равны нулю, что линейная комбинация $\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \dots + \lambda_m\overline{\mathbf{a}}_m$ обращается в нулевой вектор, т.е.

$$\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \dots + \lambda_m\overline{\mathbf{a}}_m = \overline{\mathbf{0}} \qquad (2.1)$$

Если равенство (2.1) возможно только при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\ \overline{\mathbf{a}}_2,\ \dots,\ \overline{\mathbf{a}}_m$ называются *линейно независимыми*.

Например, векторы $\overline{\mathbf{a}}_1 = (1,\ 3,\ 5,\ 7)$ и $\overline{\mathbf{a}}_2 = (2,\ 6,\ 10,\ 14)$ являются линейно зависимыми, так как $2 \cdot \overline{\mathbf{a}}_1 - 1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_2 = \overline{0}$.

Справедливы следующие **свойства линейной зависимости**:

а) если среди векторов системы есть нулевой вектор, то система линейно зависима;

б) если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима;

в) любая подсистема линейно независимой системы векторов является линейно независимой;

г) для того, чтобы система векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \dots, \overline{\mathbf{a}}_m$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов линейно выражался через остальные;

д) диагональная система векторов линейно независима;

е) диагональная система единичных векторов *n*-мерного пространства линейно независима;

ж) любой вектор *n*-мерного пространства является комбинацией единичных векторов этого пространства.

Например, в R^3 $\overline{\mathbf{a}}(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.

2.2. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по базису

Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов называется ее *базисом*. Система векторов может иметь несколько базисов, но все они содержат одинаковое количество векторов, которое называется *рангом* данной системы векторов. Если система векторов n-мерного пространства содержит более чем n векторов, то она обязательно будет линейно зависимой.

Базисом n-мерного пространства R^n называется любая совокупность n линейно независимых векторов этого пространства. Любой вектор n-мерного пространства $\overline{\mathbf{x}} \in R^n$ можно единственным образом разложить по любому базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$ этого пространства, т.е. $\overline{\mathbf{x}} = x_1\overline{\mathbf{a}}_1 + x_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + x_n\overline{\mathbf{a}}_n$ причем числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в данном базисе.

2.3. Эквивалентные системы векторов

Две системы n-мерных векторов:

$$\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_k \tag{2.2}$$

и

$$\overline{\mathbf{b}_1}, \overline{\mathbf{b}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{b}_l} \tag{2.3}$$

называются *эквивалентными*, если любой вектор системы (2.2) линейно выражается через (2.3) и наоборот.

Можно доказать, что ранги эквивалентных систем равны. Преобразования системы векторов, не изменяющие ее ранг, называются *эквивалентными*. Такими преобразованиями являются:

1) изменение нумерации векторов;
2) удаление нулевого вектора;
3) удаление линейной комбинации векторов;
4) умножение любого вектора системы на число, отличное от нуля;
5) прибавление к одному из векторов системы линейной комбинации остальных векторов системы.

Ортогональной системой векторов n-мерного евклидова пространства называется такая система из n векторов, в которой каждый из векторов ортогонален другому; т.е. система $\overline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{a}}_2$, ... , $\overline{\mathbf{a}}_n$ называется ортогональной, если $(\overline{\mathbf{a}}_i, \overline{\mathbf{a}}_j) = 0$ при $i \neq j$.

Доказано, что любая ортогональная система векторов евклидова пространства является его базисом. Если, помимо ортогональности, каждый из векторов системы является единичным, т.е. $(\overline{\mathbf{e}}_i, \overline{\mathbf{e}}_i) = 1$, то такой базис называется ортонормированным. Такой базис является наиболее удобным для решения задач аналитической геометрии.

3. Матрицы и определители

3.1. Матрицы. Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn действительных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Матрицы обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, …, а их элементы – строчными буквами: $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots, a_{ij}$ – элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Кроме квадратных скобок, в обозначении матриц употребляют круглые скобки, двойные вертикальные черточки, например:

$$\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| = \left(a_{ij}\right)\left(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n\right) \text{ или } \mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ – j-й столбец матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$.

Матрица, состоящая из одной строки и n столбцов, называется *матрицей – строкой* или *строчной матрицей*, а матрица, содержащая один столбец и m строк, называется *матрицей – столбцом* или *столбцевой матрицей*.

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы: $\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{B}_{e\times k}$, если $m = l$, $n = k$ и $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$) называется *квадратной матрицей*, а число $m = n$ – ее *порядком*. В этом случае вводятся понятия главной и побочной диагоналей.

Главную диагональ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют элементы диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол квадратной матрицы; *побочную диагональ* образуют элементы $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}$ диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол той же матрицы.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. Ее обозначают буквой $\mathbf{O}$ или $\mathbf{O}_{m\times n}$.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю. Например, матрица

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(3;-1;5)$$

является диагональной матрицей третьего порядка.

Диагональная матрица вида $\mathrm{diag}(1;1;\ldots,1)$ называется *единичной* и обозначается буквой Е или E_n:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, называется *верхней* (*нижней*) *треугольной* матрицей. Например, матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

является нижней треугольной матрицей третьего порядка.

Матрица произвольных размеров называется *трапециевидной*, если она имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{kk} \neq 0$.

3.2. Операции над матрицами и их свойства

Сложение матриц. Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $\mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ называется такая матрица $\mathbf{C} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$. Кратко пишут $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (переместительное свойство);

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (сочетательное свойство);

3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ (роль нулевой матрицы).

Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на число α называется такая матрица $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, что $b_{ij}=aa_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n)$.

Кратко пишут $\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot a$ или $\mathbf{B}=a\cdot\mathbf{A}$. Из определения произведения матрицы на число вытекает, что:

1) $(ab)\cdot\mathbf{A}=a\cdot(b\mathbf{A})$ (сочетательное свойство относительно числового множителя);

2) $a\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$ (распределительное свойство относительно суммы матриц);

3) $(a+b)\,\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$ (распределительное свойство относительно суммы чисел);

4) $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$ (роль числового множителя 1);

5) $0\cdot\mathbf{A}=0$ (роль нуля).

Разностью двух матриц $\mathbf{A}_{m\times n}$ и $\mathbf{B}_{m\times n}$ называется матрица $\mathbf{C}_{m\times n}$, каждый элемент c_{ij} которой равен разности элементов a_{ij} и b_{ij}:
$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},(i=1,2,\ldots,m);\left(j=1,2,\ldots,n\right)$. Кратко записывают
$\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Прежде чем ввести следующую операцию над матрицами, изучим некоторые правила обращения с символом $\boldsymbol{\Sigma}$.

Символ $\boldsymbol{\Sigma}$.

Для записи суммы слагаемых одинакового вида, различающихся только индексами, используется символ суммирования. Например,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_n\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_k\beta_k+\ldots+\alpha_n\beta_n\ .$$

Индекс k называется индексом суммирования. В качестве индекса суммирования может быть употреблена любая буква, причем справедливы следующие правила обращения с символом Σ:

1) индекс суммирования может быть изменен:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{p=1}^{n} a_p \ ;$$

2) множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы: $\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$;

3) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

4) два знака суммы можно переставить: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

Умножение матрицы на матрицу

Произведением матрицы $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m\times n}$ на матрицу $\mathbf{B} = (b_{kj})_{n\times p}$ справа (или матрицы *B* на матрицу *A* слева) называется такая матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times p}$, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$

Произведением матрицы А на матрицу В справа обозначается $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ (так же обозначается произведение матрицы В на матрицу А слева). Правило умножения матриц формулируется следующим образом: чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, нужно элементы i-й строки матрицы А умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В и полученные произведения сложить.

Произведение АВ существует только тогда, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В (такие матрицы называются *согласованными*). Оба произведения АВ и ВА можно определить лишь в том случае, если число столбцов матрицы А совпадает с числом строк матрицы В, а число строк матрицы А совпадает с числом столбцов матрицы В; тогда $\text{А} = \mathbf{A}_{m\times n}$, $\text{В} = \text{В}_{n\times m}$. При этом обе матрицы AB и BA, как легко видеть, являются квадратными, но порядки их различны при $m \neq n$. Для того, чтобы оба произведения AB и BA были определены и имели одинаковый порядок, необходимо и достаточно, чтобы A и B являлись квадратными матрицами одного порядка.

Приведем несколько примеров умножения матриц:

1) произведение $m\times n$ матрицы A на $n\times 1$ матрицу столбец X есть $m\times 1$ матрица столбец:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

В обратном порядке эти матрицы перемножить нельзя;

2) произведение $m\times 1$ матрицы-столбца A на $1\times n$ матрицу-строку B есть $m\times n$ матрица:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix};$$

3) произведение $1\times n$ матрицы A на $n\times 1$ матрицу B есть 1×1 матрица:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{bmatrix};$$

4) пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2)+3\cdot0\\ 4\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot2 & 4\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -5\\ 2 & -4\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot4 & 1\cdot2+(-1)\cdot0 & 1\cdot3+(-1)\cdot(-1)\\ 0\cdot1+(-2)\cdot4 & 0\cdot2+(-2)\cdot0 & 0\cdot3+(-2)\cdot(-1)\\ 2\cdot1+0\cdot4 & 2\cdot2+0\cdot0 & 2\cdot3+0\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\ -8 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}.$$

Таким образом, AB $\neq$ BA;

5) пусть $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot(-1)+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}-1\cdot1+1\cdot1 & -1\cdot1+1\cdot1\\ -1\cdot1+1\cdot1 & -1\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{O}.$$

Таким образом, AB = BA = O, хотя A $\neq$ O, B $\neq$ O.

Рассмотрим ***свойства умножения матриц*** при условии существования всех произведений.

1) (AB) · C = A · (BC) (сочетательное свойство).

2) (A + B) · C = A·C + B·C; A· (B + C) = A·B + A·C (распределительное свойство относительно суммы матриц).

3) α(AB) = (αA)B; A(αB) = (Aα)B.

4) $E_{m\times m}\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot E_{n\times n}=A_{m\times n}$ (роль единичной матрицы).

5) $O_{m\times m}\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot O_{n\times n}=O_{m\times n}$ (роль нулевой матрицы).

Выше отмечалось, что оба произведения AB и BA определены и имеют одинаковый порядок, если A и B есть квадратные матрицы одного порядка. Но и в этом случае не всегда AB = BA. Например, если

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ то $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$. Таким образом, вообще говоря $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *перестановочными* или *коммутирующими*, если $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$. Если $\mathbf{A}$ – произвольная квадратная матрица n-го порядка, а $\mathbf{D}$ – диагональная матрица того же порядка, у которой все диагональные элементы равны между собой (такая матрица называется *скалярной*), то $\mathbf{AD}=\mathbf{DA}$.

Многочлены от матриц

Пусть $\mathbf{A}$ – произвольная квадратная матрица n-го порядка, k – натуральное число. Тогда *k-й степенью* матрицы $\mathbf{A}$ называется произведение k матриц, каждая из которых равна $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^k=\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}}_{k\ раз}$.

Нулевой степенью $\mathbf{A}^0$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\neq\mathbf{O})$ называется единичная матрица, порядок которой равен порядку $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^{\mathrm{o}}=\mathbf{E}$.

Пусть $f(t)=\alpha_o t^m+\alpha_1 t^{m-1}+\ldots+\alpha_m$ есть целая рациональная функция аргумента t (многочлен), где α_o, α_1, ..., α_m действительные числа. Тогда *многочленом* $f(\mathbf{A})$ *от матрицы* $\mathbf{A}$ называется матрица $f(\mathbf{A})=\alpha_o\mathbf{A}^m+\alpha_1\mathbf{A}^{m-1}+\ldots+\alpha_m\mathbf{E}$; порядок матрицы $f(\mathbf{A})$ совпадает с порядком матрицы A. Если $f(\mathbf{A})$ есть нулевая матрица: $f(\mathbf{A})=0$, то многочлен $f(t)$ называется *аннулирующим многочленом* матрицы $\mathbf{A}$, а сама матрица $\mathbf{A}$ называется *корнем многочлена* $f(t)$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$, $f(t)=t^2-2t+3$, то

$$f(\mathbf{A})=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Транспонирование матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Матрица, получающаяся из А заменой строк столбцами без изменения порядка их следования, называется *транспонированной* по отношению к матрице А и обозначается A' или A^T. Таким образом,

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Транспонированием называется операция перехода от матрицы А к матрице A'.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A')' = A$; 2) $(\alpha A)' = \alpha A'$; 3) $(A + B)' = A' + B'$; 4) $(AB)' = B'A$.

Если для произвольной квадратной матрицы А выполняется равенство $A' = A$, то матрица А называется симметрической. Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Например, матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ является симметрической.

3.3. Определитель матрицы.

3.3.1. Определители второго порядка

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.1)$$

Её коэффициенты составляют квадратную матрицу второго порядка

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad (3.2)$$

а свободные члены – матрицу столбец $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Уравняем коэффициенты при x_2, для чего первое уравнение умножим на a_{22}, второе – на a_{12}. Вычитая затем из первого уравнения второе, получим $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$. Аналогично, исключая из системы (3.1) неизвестное x_1, получим $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=$ $=a_{11}b_2-b_1a_{21}$. Предполагая, что $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, находим единственное решение системы (3.1):

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3.3}$$

Число $\Delta=\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ называется определителем (детерминантом) матрицы (3.2) или определителем второго порядка и обозначается

$$\Delta=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{3.4}$$

Таким образом, определитель второго порядка есть число, равно произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали. Слагаемые $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются членами определителя второго порядка.

Формулы (3.3) выражают решение системы (3.1.) в явном виде через ее коэффициенты и свободные члены и имеют важное значение для теоретических направлений линейной алгебры.

Если обозначить через $\Delta_1(\Delta_2)$ определители, полученные из определителя (3.4) заменой первого (соответственно второго) столбца столбцом свободных членов: $\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$, то формулы (3.3) примут вид: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\Delta\neq 0$. Эти формулы называются формулами Крамера. Оказывается, аналогичные формулы имеют место и для систем линейных уравнений с квадратной матрицей порядка более двух. Для обоснования таких формул и решения многих других задач линейной алгебры понадобится понятие определителя n-го порядка.

3.3.2. Определители n-го порядка

Пусть имеется произвольная квадратная матрица n-го порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

Каждой такой матрице поставим в соответствие число, называемое определителем, соответствующим этой матрице. При $n = 1$ матрица (3.5) имеет вид $\mathbf{A} = [a_{11}]$ и, по определению, будем считать определителем этой матрицы (определителем первого порядка) само число a_{11}, т.е. $\det \mathbf{A} = a_{11}$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Минором M_{ik} элемента a_{ik} матрицы (3.5) назовем определитель $(n-1)$-го порядка, соответствующий матрице, полученной из (3.5) вычеркиванием i-й строки и k-го столбца. Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} матрицы (3.5) назовем произведение множителя $(-1)^{i+k}$ на минор M_{ik}, т.е. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$. Определителем порядка n, соответствующим матрице (3.5), назовем число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) называется разложением определителя n-го порядка по первой строке. По аналогии с (3.6) выпишем разложение определителя второго порядка по элементам второй строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} =$$

$$= -a_{21} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{11} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Получаем результат, совпадающий с (3.4).

Оказывается, справедливы две основные теоремы (теоремы Лапласа), утверждающие возможность разложения определителя n-го порядка по любым строке или столбцу.

Теорема 3.1. Для любого номера строки i, $i = 1, 2, \ldots, n$ справедлива формула:

$$\Delta = \det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

называемая разложением определителя n-го порядка по i-й строке.

Теорема 3.2. Для любого номера столбца k, $k = 1, 2, \ldots, n$ справедлива формула:

$$\Delta = \det A = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \ldots + a_{nk} A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

называемая разложением определителя n-го порядка по k-му столбцу.

Удобнее вычислять определитель, разлагая его по элементам той строки (столбца), которая содержит наибольшее количество нулевых элементов. Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 7 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (7 - 10) - 14 \cdot (0 - 4) = -12 + 56 = 44.$$

3.3.3. Определители третьего порядка

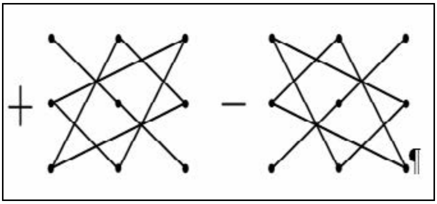
Вычислим определитель третьего порядка, разлагая его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \tag{3.7}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



Каждое из шести слагаемых в (3.7) называется членом определителя третьего порядка и есть произведение трех элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Чтобы составить выражение (3.7), можно воспользоваться схемой Саррюса (или правилом треугольников), согласно которой со знаком плюс берутся произведения элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком минус берутся произведения элементов побочной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали:

3.3.4. Свойства определителей

1. Определитель матрицы, полученной из данной транспонированием, равен определителю данной матрицы: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$.

Это свойство является прямым следствием теоремы 3.2 и утверждает, что все свойства, сформулированные для строк определителя, будут справедливы и для его столбцов.

2. При перестановке местами двух строк, определитель меняет знак на противоположный, сохраняя при этом свою абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

4. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на одно и то же число, то сам определитель умножится на это число.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (ca_{ik}) A_{ik} = c \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. Общий множитель элементов любой строки можно выносить за знак определителя.

Следствие 2. Если определитель содержит нулевую строку, то он равен нулю.

Следствие 3. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.

5. Если каждый элемент i-й строки определителя есть сумма двух слагаемых: $\mathrm{a_{ik}} = \mathrm{a'_{ik}} + \mathrm{a''_{ik}}$, то определитель есть сумма двух определителей:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i2} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left(a'_{ik} + a''_{ik} \right) A_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a''_{ik} A_{ik} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2 .$$

6. Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

7. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольное число α, то определитель не изменится.

Пример 3.1. Вычислить определитель треугольной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Решение. Применяя последовательно формулу (3.6), получим

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

Итак, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Аналогично можно показать, что определитель матрицы, у которой равны нулю все элементы, находящиеся выше (ниже) побочной диагонали, равен произведению числа $(-1)^{n(n-1)/2}$ и всех элементов побочной диагонали.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4\cdot 3}{2}} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 40$.

Пример 3.2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. К первой и к четвертой строкам прибавим вторую строку, к третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на два и разложим полученный определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя третью строку к первой и второй строкам, получим:

$$\Delta = 3\cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(21-24) = -9.$$

Теорема 3.3. Определитель произведения квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц.

3.4. Обратная матрица, ее свойства и вычисление

Квадратная матрица А n-го порядка называется *невырожденной* (неособенной), если ее определитель отличен от нуля: $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$. Если $\det \mathbf{A} = 0$, то матрица А называется вырожденной.

Матрица В называется обратной к матрице А, если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$, где Е – единичная матрица. Обратную матрицу принято обозначать $\mathbf{A}^{-1}$. Можно показать, что если для данной матрицы А существует обратная, то она единственная.

Теорема 3.4. Для того, чтобы матрица А имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы А была невырожденной. Тогда обратная матрица находится по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (3.8)$$

или $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det}\widetilde{\mathbf{A}}$, где $\widetilde{\mathbf{A}}$ – присоединенная к матрице А. Ее элементами служат алгебраические дополнения транспонированной матрицы A'.

Пример 3.3. Найти $\mathbf{A}^{-1}$, если она существует, для матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, т.е. если $\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Находим последовательно:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = d, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -c,$$

$$A_{12} = (-1)^{2+1} M_{21} = -b, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a.$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Пример 3.4. Найти $\mathbf{A}^{-1}$, если она существует для $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. Вычисляем $\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Проверкой убеждаемся, что

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Для невырожденных матриц имеют место следующие свойства:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$; 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3. $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$; 4. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, справедливость которых рекомендуется проверить самостоятельно.

3.4.1. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

Матричным назовем уравнение, в котором роль неизвестного играет некоторая матрица *X*.

Простейшими примерами таких уравнений могут служить уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$, $\mathbf{XB}=\mathbf{C}$, $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$, где X и C – прямоугольные матрицы равных размеров, *A* и *B* – квадратные матрицы соответствующих размеров. Если предположить, что матрицы A и B невырожденные, то эти уравнения имеют одно и только одно решение $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, $\mathbf{X}=\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$ и $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$ соответственно. Действительно, рассмотрим, например, уравнение $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$, где $\det\mathbf{A}\neq 0$. Умножая слева обе части этого уравнения на A^{-1}, получим: $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, $\mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

Пример 3.5. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначая $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$, получим $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$. Если $\det\mathbf{A}\neq 0$, $\det\mathbf{B}\neq 0$, то $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$.

Находим $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-6+5=-1$, $\mathbf{A}^{-1}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$,

$$\det\mathbf{B}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{vmatrix}=40-42=-2,$$

$$\mathbf{B}^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}8 & -6\\ -7 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

3.4.2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований ее строк.

Пусть А – невырожденная матрица. Назовем *элементарными преобразованиями строк* этой матрицы:

1. Перемену двух строк местами.

2. Умножение всех элементов строки на число, не равное нулю.

3. Прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на некоторое число.

Применяя указанные элементарные преобразования строк к матрице

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right],$$

$$[\mathbf{E}|\mathbf{B}]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right].$$

Поскольку $\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{A}|\mathbf{E}]=[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mid\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}]=[\mathbf{E}\mid\mathbf{A}^{-1}]$, то $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. Отсюда получаем следующий способ нахождения обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ (при условии, что $\det\mathbf{A}\neq 0$):

1. Записываем матрицы А и Е рядом через черту: $[\mathbf{A}|\mathbf{E}]$.

2. С помощью элементарных преобразований над строками полученной матрицы приводим ее к виду $[\mathbf{E}\mid\mathbf{B}]$.

3. Выписываем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$.

Пример 3.6. С помощью элементарных преобразований над строками найти матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, обратную матрице $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Выпишем матрицу $\left[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}\right]$, указывая выполняемые элементарные преобразования над строками (римскими цифрами указан номер строки):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}:2\\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\mathrm{I}-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{III}\\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{III}\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Тогда $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -3/2\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Проверка. $\mathbf{AA}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -3/2\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & -3/2\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

3.5. Ранг матрицы

3.5.1. Понятие минора k-го порядка матрицы. Определение ранга матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A_{m\times n}$. Пусть k – натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k \le \min(m, n)$. Выберем в матрице А k строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, где $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$ и k столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, где $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, составим определитель k-го порядка, который обозначим $M^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ и назовем его минором k-го порядка матрицы А. Можно показать, что из $m\times n$ матрицы $A_{m\times n}$ можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.[1]

Например, если матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & -1 \end{bmatrix}$, то

$$M^{1,2}_{3,4} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad M^{1,2,3}_{2,3,4} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нетрудно проверить,что все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю. Таким образом, в матрице А существует минор 2-го порядка, отличный от нуля (например, $M^{1,2}_{3,4}$), а все миноры третьего порядка равны нулю.

Определение. *Рангом матрицы* называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Из этого определения вытекает, что если ранг матрицы равен r, то среди миноров этой матрицы есть по крайней мере один минор r-го порядка, отличный от нуля (его будем называть базисным минором), а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю. Ранг матрицы А обо-

---

[1] C_n^k обозначено число сочетаний из n элементов по k элементов: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$.

значается $r(\mathbf{A})$. По определению, ранг нулевой матрицы $\mathbf{O}$ равен нулю; тогда ранг $r(\mathbf{A})$ произвольной матрицы $\mathbf{A}_{m \times n}$ удовлетворяет неравенству $0 \le r(\mathbf{A}) \le \min(m,n)$.

Поскольку вычислять ранг матрицы по определению достаточно трудоемко, то с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к такому виду, из которого ранг матрицы очевиден.

3.5.2. Элементарные преобразования. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1. Транспонирование.
2. Перемена местами двух строк или двух столбцов.
3. Умножение всех элементов строки или столбца на число *c*, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки или столбца соответствующих элементов другой строки или столбца, умноженных на одно и то же число.

Теорема 3.5. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Отметим, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.9)$$

где на главной диагонали стоят r единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Ясно, что ранг такой матрицы равен r, тогда по теореме 3.5. ранг матрицы А равен r.

Пример 3.7. Вычислить ранг матрицы А с помощью элементарных преобразований, если $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 11 & -1\end{bmatrix}$.

Решение. Вычитая утроенную первую строку из третьей, а затем вторую строку из третьей, получим:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 11 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -0\end{bmatrix},$$

где знаком ~ обозначено, что соединяемые им матрицы имеют один и тот же ранг.

Вычитая теперь из второго столбца удвоенный первый, а из третьего столбца – утроенный первый, получим

$$\mathrm{A} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Наконец, из третьего столбца вычтем удвоенный второй, а к четвертому столбцу прибавим второй, в результате чего матрица приведется к виду (3.9): $\mathrm{A} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, откуда $r(\mathbf{A})=2$.

Замечание. При вычислении ранга матрицы с помощью элементарных преобразований не обязательно получать вид (3.9), достаточно привести матрицу к трапециевидной форме, количество ненулевых строк в которой равно рангу матрицы.

3.5.3. Понятие линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Другое определение ранга матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $\mathbf{A}_{m\times n}$. Поскольку каждую строку такой матрицы можно считать n-мерным вектором, то матрице А соответствует система m векторов-строк n-мерного пространства: $\overline{\mathbf{a}}_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n})$, $\overline{\mathbf{a}}_2=(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n})$, …, $\overline{\mathbf{a}}_m=(a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})$. Перенося определение линейной зависимости векторов на строки матрицы, будем называть строки матрицы линейно зависимыми, если существуют такие действительные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, не все одновременно равные нулю, что линейная комбинация строк матрицы с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ обращается в нулевую строку, т.е. выполняется равенство

$$\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1+\lambda_2\overline{\mathbf{a}}_2+\ldots+\lambda_m\overline{\mathbf{a}}_m=\overline{\mathbf{0}} \qquad (3.10)$$

Если равенство (3.10) возможно лишь для тривиальной линейной комбинации, в которой $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$, то строки матрицы А называются линейно независимыми.

Например, строки матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&-1\\3&7&11&-1\end{bmatrix}$ линейно зависимы:

$$3\overline{\mathbf{a}}_1+\overline{\mathbf{a}}_2-\overline{\mathbf{a}}_3=3(1,2,3,0)+(0,1,2,-1)-(3,7,11,-1)=(0,0,0,0)=\overline{\mathbf{0}}.$$

Как и в случае векторов, строки матрицы являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них линейно выражается через остальные.

Теорема 3.6. Если ранг матрицы равен r, то в этой матрице существует r линейно независимых строк, через которые линейно выражаются все остальные ее строки.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному количеству линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие 2. Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

Теперь можно сформулировать **другое определение ранга матрицы**: рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

4. Системы линейных алгебраических уравнений

4.1. Основные понятия

Системой n линейных уравнений с m неизвестными (переменными) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, a_{ij} $(j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа, называемые *коэффициентами* i-го $(i = \overline{1,m})$ уравнения; b_i $(i = \overline{1,m})$ – заданные вещественные числа, называемые *свободными членами*.

Решением системы (4.1) называется такой упорядоченный набор значений неизвестных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, при подстановке которых в систему (4.1) все ее уравнения обращаются в тождества. Два решения ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) и ($x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$) называются различными, если хотя бы для одного значения i, $i = \overline{1,m}$, равенство $x_i^0 = x_i^1$ не выполняется.

Система (4.1) называется *совместной* (*разрешимой*), если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной* (*неразрешимой*).

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Если ввести матрицу A, составленную из коэффициентов при неизвестных:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

матрицу–столбец неизвестных $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ и матрицу–столбец $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ свободных членов, то систему (4.1) можно переписать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Расширенной матрицей системы (4.1) называется матрица

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

получаемая из матрицы $\mathbf{A}$ добавлением к ней справа столбца свободных членов.

Критерием совместности системы (4.1) является

Теорема Кронекера-Капелли: для совместности системы (4.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\mathbf{A}$ равнялся рангу расширенной матрицы $\mathbf{A}_b$.

При выполнении этого условия, если $r(\mathbf{A}) = r(\widetilde{\mathbf{A}}) = r$, то в случае $r = n$ система (4.1) является определенной (имеет единственное решение), а в случае $r < n$ является неопределенной.

4.2. Система *n* линейных уравнений с n неизвестными. Правило Крамера

Если в системе (4.1) число уравнений m равно числу неизвестных n, то она примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.2}$$

Так как матрица $\mathbf{A}$ системы (4.2) – квадратная, то при условии $\det \mathbf{A} \neq 0$ существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ и тогда (4.2), являясь частным случаем матричного уравнения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, имеет единственное решение $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Такой метод решения системы (4.2) называется *матричным* или **методом обратной матрицы**.

Другим методом решения системы (4.1) в случае выполнения условия $\det \mathbf{A} \neq 0$ является **правило Крамера**: если определитель матрицы $\mathbf{A}$ системы (4.2) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое из формул:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = \overline{1, n},$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя матрицы $\mathbf{A}$ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов, .

Пример 4.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$ матричным методом.

Решение. Выпишем матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Найдем ее определитель

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 2 - 1 - 6 = -16 \neq 0 .$$

Следовательно, матрица $\mathbf{A}$ неособенная и для нее существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Найдем алгебраические дополнения матрицы $\mathbf{A}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2+2) = -4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+1 = 7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\,.$$

Тогда обратная матрица для A

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-16} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}0625 & -0{,}4375 & 0{,}25 \\ -0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Используя равенство $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$, получим

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}0625 & -0{,}4375 & 0{,}25 \\ -0{,}1875 & 0{,}3125 & 0{,}25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25\cdot 2 + 0{,}25\cdot 2 + 0\cdot 7 \\ 0{,}0625\cdot 2 - 0{,}4375\cdot 2 + 0{,}25\cdot 7 \\ -0{,}1875\cdot 2 + 0{,}3125\cdot 2 + 0{,}25\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 1, \\ 3x_1 - \ x_2 + 2x_3 = 1, \\ \ x_1 + 4x_2 - \ x_3 = 2 \end{cases}$

по формулам Крамера.

Решение. Выпишем матрицу системы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$ и вычислим ее определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0.$$

Значит, система является определенной. Для нахождения ее решения вычисляем вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменяя в определителе Δ 1-ый, 2-ой и 3-й столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 12 + 4 + 2 + 3 - 8 = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 6 - 1 + 3 - 8 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 12 + 1 - 18 - 8 = -14.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1; \qquad x_2 = \frac{0}{14} = 0; \qquad x_3 = \frac{-14}{14} = -1.$$

4.3. Метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений

Метод Гаусса применяется для решения систем m линейных уравнений с n неизвестными, заданной в общем виде (4.1). Этот метод иначе называют методом последовательного исключения неизвестных.

Элементарными преобразованиями системы (4.1) называются:

1) перемена местами любых двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей какого-либо из уравнений системы на число $\lambda \neq 0$;

3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на произвольное число λ;

4) удаление из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$

Можно доказать, что *элементарные преобразования системы* (*4.1*) *приводят к системе, равносильной (эквивалентной) исходной*.

Метод Гаусса состоит из двух частей: прямого и обратного хода. В результате *прямого хода* система приводится к равносильной системе ступенчатого или треугольного вида с помощью элементарных преобразований (если при этом процессе не обнаружится несовместность системы). Второй этап решения задачи, называемый *обратным ходом*, состоит в последовательном нахождении значений неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ из полученной в результате прямого хода системы специального вида.

Решение системы методом Гаусса обычно осуществляют, работая с расширенной матрицей коэффициентов системы, в которой каждой строке соответствует уравнение исходной системы.

Пример 4.3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Решение. Переставив первое и третье уравнение системы, получим расширенную матрицу вида:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \tag{4.5}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то с помощью первого уравнения исключим x_1 из всех остальных уравнений, для чего первую строку матрицы (4.5) умножим на (-2) и сложим с третьей, а затем вычтем первую строку из четвертой. Получим:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \tag{4.6}$$

Так как в новой матрице (4.6) $a'_{22} \neq 0$, то теперь с помощью второго уравнения исключим x_2 из третьего и четвертого уравнения, для чего от третьей строки вычтем вторую, умноженную на 3 и из четвертой строки вычтем вторую, умноженную так же на 3. Получим матрицу вида:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -4 \end{array}\right] \tag{4.7}$$

Так как в новой матрице (4.7) $a''_{33} \neq 0$, то можно с помощью третьего уравнения исключить x_3 из четвертого уравнения, для чего от четвертой строки матрицы (4.7) вычтем третью, умноженную на 3. В результате придем к матрице:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right] \tag{4.8}$$

Система, соответствующая матрице (4.8) является системой треугольного вида. Выпишем ее:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1, \\ x_2 - 2x_4 &= 2, \\ x_3 + 5x_4 &= -4, \\ -7x_4 &= 8. \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится с помощью обратного хода. Двигаясь от последнего уравнения к первому, получим:

$$-7x_4 = 8,\ x_4 = -\frac{8}{7};$$

$$x_3 + 5x_4 = -4,\ x_3 = -4 - 5\cdot\frac{8}{7},\ x_3 = \frac{12}{7};$$

$$x_2 - 2x_4 = 2,\quad x_2 = 2x_4 + 2,\quad x_2 = 2 - \frac{16}{7} = -\frac{2}{7};$$

$$x_1 = x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = -\frac{1}{7} + \frac{24}{7} + \frac{8}{7} - 1 = \frac{23}{7}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{23}{7}$, $\qquad x_2 = -\frac{2}{7}$, $\qquad x_3 = \frac{12}{7}$, $\qquad x_4 = -\frac{8}{7}$.

Существуют различные **методы приведения матрицы** к ступенчатому виду. Для ручного счета удобны правила Гауссова исключения, реализуемые с помощью так называемого разрешающего элемента, который при вычислениях заключается в рамку и всегда должен быть отличен от нуля. Первый шаг (исключение неизвестной x_1) прямого хода выполняется с разрешающим элементом $a_{11} \neq 0$, второй шаг (исключение неизвестного x_2) с помощью $a'_{22} \neq 0$ (если $a'_{22} = 0$, то надо переставить уравнения так, чтобы оказалось $a'_{22} \neq 0$, а если все a'_{22}, $i = \overline{2,m}$, то пытаемся исключить неизвестную x_3 и т.д.). Пересчет элементов матрицы выполняется по следующим правилам:

1) элементы разрешающей строки и всех выше расположенных строк остаются неизменными;

2) элементы разрешающего столбца, находящиеся ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;

3) все прочие элементы матрицы вычисляются по *правилу прямоугольника*; преобразованный элемент a_{ij}' новой матрицы равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \boxed{a_{ks}} & \cdots & \cdots & a_{kj} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{is} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad a_{ij}' = a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj}$$

Здесь a_{ks}, a_{ij} – главная диагональ, $a_{is} \ldots a_{кj}$ – побочная диагональ.

Пример 4.4. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + \ \ x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{c:ccc|c} \boxed{2} & 2 & -1 & 1 & 4 \\ \hdashline 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Элемент $a_{11} = 2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Первую строку составляем без изменения, остальные элементы первого (разрешающего) столбца заполняем нулями, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2\cdot 3-4\cdot 2 & 2\cdot(-1)-4\cdot(-1) & 2\cdot 2-4\cdot 1 & 2\cdot 6-4\cdot 4 \\ 0 & 2\cdot 5-8\cdot 2 & 2\cdot(-3)-8\cdot(-1) & 2\cdot 4-8\cdot 1 & 2\cdot 12-8\cdot 4 \\ 0 & 2\cdot 3-3\cdot 2 & 2\cdot(-2)-3\cdot(-1) & 2\cdot 2-3\cdot 1 & 2\cdot 6-3\cdot 4 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

В полученной матрице элементы второй и третьей строки разделим на 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

На втором шаге разрешающим является элемент $a'_{22} = -1 \neq 0$. Первые две строки и первый столбец переписываем без изменения, под разрешающим элементом записываем нули, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1\cdot 1-(-3)\cdot 1 & -1\cdot 0-(-3)\cdot 0 & -1\cdot(-4)-(-3)\cdot(-2) \\ 0 & 0 & -1\cdot(-1)-0\cdot 1 & -1\cdot 1-0\cdot 0 & (-1)\cdot 0-0\cdot(-4) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

В полученной матрице элементы третьей строки разделим на 2 и на третьем шаге разрешающим является элемент $a'_{33} = 1 \neq 0$. Элементы первых трех строк сохраняем без изменений, под разрешающим элементом запишем нуль. Остальные элементы пересчитаем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot(-1)-1\cdot 0 & 1\cdot 0-1\cdot(-1) \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Так как система привелась к треугольному виду, то она имеет единственное решение. Найдем его, выписав систему, соответствующую последней матрице:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ -\ x_2 + x_3 \qquad &= -2, \\ x_3 \qquad &= -1, \\ -\ x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_4 = -1$, $x_3 = -1$, $x_2 = x_3 + 2 = 1$, $2x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 4$, $2x_1 = -2 \cdot 1 + (-1) - (-1) + 4$, $2x_1 = 2$, $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

Пример 4.5. Решить систему уравнений.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Начиная с расширенной матрицы системы, подвергая ее последовательно гауссовым исключениям, получим:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-10} & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & -16 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Матрица системы приведена к ступенчатому виду. Последней матрице соответствует система уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -10x_3 + 8x_4 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Она имеет бесконечное множество решений. Первым ненулевым элементам ступенек соответствуют переменные x_1 и x_3 (*базисные переменные*). Оставшиеся переменные x_2 и x_4 – свободные, им придадим произвольные значения: $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, $C_1, C_2 \in R$.

В последнем уравнении подставим $x_4 = C_2$, тогда $-10x_3 = -2 - 8C_2$, $x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}C_2$. Подставим x_3 и x_4 в первое уравнение системы: $2x_1 + 3x_2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5}C_2 + C_2 = 1$. Тогда $2x_1 = \frac{6}{5} - 3C_1 - \frac{1}{5}C_2$,

$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{10}C_2$,

Ответ: система имеет бесконечное множество решений вида

$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{10}C_2$, $x_2 = C_1$, $x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}C_2$. $x_4 = C_2$ где $C_1, C_2 \in R$.

5. Геометрия пространства $\mathbf{R}^n$

5.1. Прямые в $\mathbf{R}^2$

5.1.1. Уравнение линии на плоскости $\mathbf{R}^2$

Уравнением линии на плоскости Oxy называется равенство, содержащее переменные x и y, вида $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют все точки данной линии и только они. Для вывода уравнения линии часто используются формулы:

а) расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5.1}$$

б) деление отрезка в данном отношении: если точка $M(x, y)$ делит отрезок, определяемый точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. в отношении $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, то координаты точки M определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ , \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ . \tag{5.2}$$

В частности, если точки M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и формулы (5.2) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ , \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ . \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1; 3)$ и $B\,(3; 1)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомой линии, тогда, согласно условию, имеем $AM = BM$ или по (5.1)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}\ .$$

Возведя обе части равенства в квадрат и упрощая, получим

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1\,,$$

откуда получаем $y = x$. Это серединный перпендикуляр, восставленный из середины отрезка AB.

5.1.2. Общее уравнение прямой

Прямая L на плоскости определяется однозначно, если известны точка $M_o = (x_o, y_o)$, через которую она проходит и ненулевой вектор $\overline{\mathbf{n}} = (A, B)$, перпендикулярный прямой L. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой L, $\overline{\mathbf{r}} = (x, y)$ и $\overline{\mathbf{r}}^0 = (x_0, y_0)$ – радиус-векторы точек M и M_0 соответственно. Под радиус-вектором точки M понимается вектор $\overline{\mathbf{OM}}$ с началом в точке O и концом в точке M. Уравнение

$$(\overline{\mathbf{n}},\ \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}^{\mathbf{o}}) = 0 \qquad (5.4)$$

называется уравнением прямой в векторной форме. В координатной форме (5.4) принимает вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5.5)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Справедлива теорема: всякое уравнение первой степени относительно x и y (т. е уравнение вида (5.5)) определяет на плоскости некоторую прямую и наоборот, всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени. Заметим, что вектор $\overline{\mathbf{n}} = (A, B)$ определяется с точностью до постоянного множителя.

Частные случаи:

1. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением (5.5), проходит через начало координат.
2. $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ (или $y = b$, где $b = -C/B$), параллельна оси Ox.
3. $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ (или $x = a$, где $a = -C/A$), параллельна оси Oy.
4. $B = 0$; $C = 0$; $A \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax = 0$ (или $x = 0$, поскольку $A \neq 0$), совпадает с осью Oy.
5. $B = C = 0$; $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By = 0$ (или $y = 0$, поскольку $B \neq 0$), совпадает с осью Ox.

Поскольку уравнение (5.5) охватывает все возможные положения прямой на плоскости, оно называется *общим уравнением прямой*.

5.1.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Углом наклона прямой L к оси Ox называется угол α, отсчитываемый от положительного направления оси до прямой L против движения часовой стрелки (рис. 5.1.). Если прямая параллельна оси Ox, то полагают $\alpha = 0$. Таким образом, угол наклона α удовлетворяет неравенству $0 \le \alpha < \pi$.

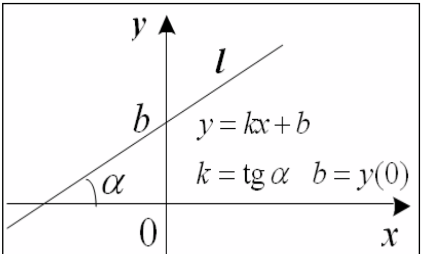


Рис. 5.1

Угловым коэффициентом прямой называется число, равное тангенсу угла наклона прямой к оси Ox: $k = \mathrm{tg}\,\alpha$. Из определения следует:

1) величина k может принимать любые действительные значения, т.е. $k \in R$;

2) прямая, параллельная оси ординат, не имеет углового коэффициента, поскольку в этом случае $\alpha = \pi/2$;

3) всякая прямая, не параллельна оси Oy, имеет единственный угловой коэффициент k;

4) каждому числу $k \in R$ соответствует единственное значение угла наклона L, $\alpha \in [0, \pi)$.

Если точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ принадлежат прямой L, причем $x_1 \ne x_2$, то угловой коэффициент k находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (5.6)$$

Прямая L на плоскости определится однозначно, если известны точка $B = (0, b)$, принадлежащая этой прямой и угловой коэффициент k этой прямой (Рис. 5.1). В этом случае уравнение прямой L имеет вид

$$y = kx + b \qquad (5.7)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Число b, называемое *начальной ординатой*, показывает величину направленного отрезка, отсекаемого прямой L на оси ординат. При $B \ne 0$ общее уравнение прямой (5.5) легко преобразуется в уравнение прямой с угловым коэффициентом (5.7):

$$k = -A/B, \quad b = -C/B.$$

Частные случаи:

1. $b=0,\ k\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $y=kx$, проходит через начало координат;

2. $k=0,\ b\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $y=b$, параллельна оси Ox;

3. $k=0,\ b=0$. Прямая, определяемая уравнением $y=0$, совпадает с осью Ox.

5.1.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении. Уравнение пучка прямых

Если точка $M_0=(x_0,\, y_0)$ принадлежит прямой L и известен угловой коэффициент k этой прямой, то ее уравнение имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{5.8}$$

и называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении*. Если k "пробегает" все действительные значения $k\in R$, то уравнение (5.8) описывает множество прямых, проходящих через точку M_0 и называется *уравнением пучка прямых с центром в* M_0.

5.1.5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1=(x_1,\, y_1)$ и $M_2=(x_2,\, y_2)$, $x_1\neq x_2,\ \ y_1\neq y_2$. Тогда ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{5.9}$$

При $x_1=x_2, (y_1=y_2)$ уравнение прямой L примет вид $x=x_1$ $(y=y_1)$. Если точка $M_3=(x_3,\, y_3)$ лежит на прямой L, определяемой уравнением (5.9), то выполняется условие принадлежности трех точек одной прямой:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \tag{5.10}$$

Вектор $\overline{\mathbf{M_1M_2}}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ – направляющий вектор прямой L.

Уравнения прямой по направляющему ветру $\overline{\mathbf{a}}(l,m)$ и точке $(x_0,\, y_0)$:

каноническое $\qquad \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$

параметрическое $\qquad \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases} \quad t\in R$

5.1.6. Уравнение прямой в отрезках

Если известны a и b, где a – абсцисса точки пересечения прямой L с осью Ox, b – ордината точки пересечения прямой L с осью Oy, причем $ab\neq 0$ (рис. 5.2.), то прямая L определяется однозначно, и ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5.11)$$

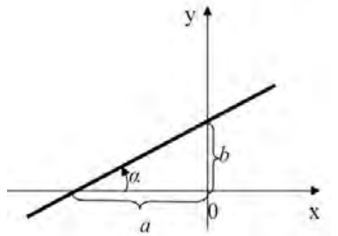


Рис. 5.2

При $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ уравнение (5.5) приводится к уравнению (5.11), где $a=-C/A$, $b=-C/B$. Отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, удобно использовать при построении прямой.

5.1.7. Нормальное уравнение прямой

Если обе части уравнения (5.5) умножить на число $\lambda=\pm 1/\sqrt{A^2+B^2}$ (нормирующий множитель), выбрав знак λ из условия $\lambda C<0$ (при $C=0$ знак λ выберем произвольно), то получится уравнение

$$x\cos\phi+y\sin\phi-p=0, \qquad (5.12)$$

которое называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь $p>0$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а ϕ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox, $0\leq\phi<2\pi$, (рис. 5.3).

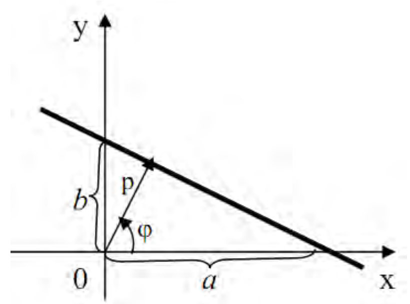


Рис. 5.3

5.1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая L задана уравнением (5.12) и дана точка $M_0 = (x_0, y_0)$, лежащая вне этой прямой. Тогда расстояние d от точки M_0 до прямой L находится по формуле:

$$d = \left| x_o \cos\phi + y_o \sin\phi - p \right| \ . \tag{5.13}$$

Если уравнение прямой L дается в виде (5.5), то

$$d = \frac{\left| Ax_o + By_o + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \tag{5.14}$$

5.1.9. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть две прямые L_1 и L_2, каждая из которых не параллельна оси Oy, заданы уравнением: $L_1 : y = k_1 x + b_1$ и $L_2 : y = k_2 x + b_2$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Углом ϕ между прямыми L_1 и L_2 называется угол, отсчитываемый от первой прямой до второй против движения часовой стрелки. Справедлива формула

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} . \tag{5.15}$$

Если прямые параллельны, то $k_1 = k_2$.

Если прямые перпендикулярны, то $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Случай, когда одна из прямых параллельна оси Oy, исследуется без специальных формул.

Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол ϕ определится по формуле

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2},$$

и прямые L_1 и L_2 будут:

параллельны, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

и перпендикулярны, если $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

5.1.10. Точка пересечения двух прямых

Пусть две прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Для нахождения точки $M_1 = (x_1, y_1)$ их пересечения необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то система (5.16) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_1 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то система (5.16) неопределенная и совместная (имеет бесчисленное множество решений). В этом случае две прямые сливаются в одну.

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то система (5.16) несовместна, а прямые L_1 и L_2 параллельны, следовательно, не имеют точек пересечения.

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то при $k_1 \neq k_2$ координаты точки пересечения $M_1 = (x_1, y_1)$ находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \qquad y_1 = \frac{k_1b_1 - k_1b_2}{k_2 - k_1}.$$

5.2. Прямая и плоскость в пространстве

5.2.1. Канонические уравнения прямой

Прямая L в пространстве определяется однозначно, если известны точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая прямой и ненулевой вектор $\overline{\mathbf{S}} = (m, n, p)$, параллельный прямой (направляющий вектор).

Уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{5.17}$$

называются *каноническими уравнениями прямой.*

5.2.2. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Прямая L в пространстве определяется однозначно, если известны две различные точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\left(\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} \neq \overline{0}\right)$, лежащие на этой прямой. В этом случае прямая L задается уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{5.18}$$

Если точка $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$ лежит на прямой, определяемой уравнениями (5.18), то выполняются условия принадлежности трех точек одной прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\ . \tag{5.19}$$

5.2.3. Векторное и параметрические уравнения прямой

Если известны точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая прямой L, и ее направляющий вектор $\overline{\mathbf{S}} = (m, n, p)$, то обозначая через $M = (x, y, z)$ произвольную точку прямой, через $\overline{\mathbf{r}}^{o}$ и $\overline{\mathbf{r}}$ радиус-векторы точек M_o и M соответственно, получаем векторное уравнение прямой

$$\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}^{o} + \overline{\mathbf{M}_0\mathbf{M}}\,. \tag{5.20}$$

Используя коллинеарность векторов $\overline{\mathbf{S}}$ и $\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{M}}$, заключаем, что $\overline{\mathbf{r}}^{o} = \overline{\mathbf{r}}^{o} + t\overline{\mathbf{S}}$ (векторное параметрическое уравнение прямой), или

$$x = x_o + tm,\ \ y = y_o + tn,\ \ z = z_o + tp \tag{5.21}$$

– параметрические уравнения прямой. В уравнениях (5.21) параметр t «пробегает» все действительные значения.

5.2.4. Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых

Углом между двумя прямыми L_1 и L_2 с уравнениями

L_1: $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ и L_2: $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$

называется угол γ между их направляющими векторами $\overline{\mathbf{S}}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{\mathbf{S}}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Имеет место формула

$$\cos\gamma = \frac{\left(\overline{S_1}, \overline{S_2}\right)}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} . \tag{5.22}$$

Если выполняется условие $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$ то прямые L_1 и L_2 перпендикулярны. При условии, что $\overline{\mathbf{S}}_1 = \lambda \overline{\mathbf{S}}_2$ или $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ прямые L_1 и L_2 параллельны. Если, кроме того, прямые L_1 и L_2 имеют общую точку, они совпадают.

Условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.23}$$

является необходимым и достаточным условием нахождения двух прямых в одной плоскости (условие компланарности двух прямых). Если выполняется условие (5.23) и не выполняется условие параллельности прямых L_1 и L_2, то прямые L_1 и L_2 пересекаются.

5.2.5. Общее уравнение плоскости

Плоскость P в пространстве определяется однозначно, если известны точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0),$ принадлежащая плоскости и ненулевой вектор $\overline{\mathbf{n}} = (A, B, C)$, перпендикулярный этой плоскости (нормальный вектор плоскости или вектор нормали). Пусть $D = -Ax_o - By_o - Cz_o,$ – произвольная точка плоскости P, $\overline{\mathbf{r}}^{o}$ и $\overline{\mathbf{r}}$ радиус-векторы точек M и M_0 соответственно.

Уравнение

$$\left(\overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0\right) = 0 \tag{5.24}$$

называется векторным уравнением плоскости P. Из (5.24) следует уравнение плоскости в координатной форме

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

Обозначая $D=-Ax_o-By_o-Cz_o$, получаем общее уравнение плоскости P с нормальным вектором $\overline{\mathbf{n}}=(A,B,C)$:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (5.25)$$

причем $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Верно и *обратное утверждение*: всякое линейное относительно *x, y, z* уравнение вида (5.25) при $A^2+B^2+C^2\neq 0$ задает в пространстве некоторую плоскость.

Частные случаи:

1. $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость, определяемая уравнением (5.25) параллельна оси *Ox*.
2. $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость параллельна оси *Oy*.
3. $C=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость параллельна оси *Oz*.
4. $D=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$. Плоскость проходит через начало координат.
5. $A=B=0, C\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость перпендикулярна оси *Oz* (параллельна плоскости *xOy*).
6. $A=C=0, B\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость перпендикулярна оси *Oy* (параллельна плоскости *xOz*).
7. $B=C=0,\ A\neq 0,\ D\neq 0$. Плоскость перпендикулярна оси *Ox* (параллельна плоскости *yOz*).
8. $A=D=0, B\neq 0,\ C\neq 0$. Плоскость проходит через ось *Ox*.
9. $B=D=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$. Плоскость проходит через ось *Ox*.
10. $C=D=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0$. Плоскость проходит через ось *Oz*.
11. $A=B=D=0,\ C\neq 0$. Плоскость совпадает с плоскостью *xOy* $(z=0)$.
12. $A=C=D=0,\ C\neq 0$. Плоскость совпадает с плоскостью *xOz* $(y=0)$.
13. $B=C=D=0,\ A\neq 0$. Плоскость совпадает с плоскостью *yOz* (*x*= 0).

5.2.6. Уравнение плоскости в отрезках

Плоскость *P*, пересекающая ось *Ox* в точке (*a,* 0, 0), ось *Oy* в точке (0*, b,* 0) и ось *Oz* в точке (0, 0*, c*), имеет уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5.26)$$

Уравнение (5.26) называется уравнением плоскости в отрезках.

При $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ из общего уравнения плоскости (5.25) получается уравнение плоскости в отрезках, если положить $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. Отрезки a, b, c, отсекаемые плоскостью на осях координат, удобно использовать при построении плоскости.

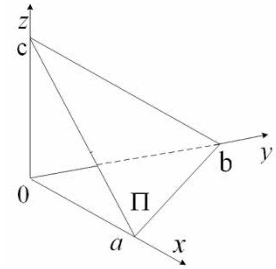


Рис. 5.4

5.2.7. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, т.е. условие (5.19) не выполняется. Тогда уравнение плоскости P, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.27)$$

5.2.8. Нормальное уравнение плоскости

Если обе части уравнения (5.25) умножить на нормирующий множитель $\lambda = \pm 1 / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, выбирая знак перед радикалом из условия $\lambda \cdot D < 0$ (в случае, когда $D = 0$, знак выбирается произвольно), то получится нормальное уравнение плоскости

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \qquad (5.28)$$

Здесь направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ есть координаты единичного вектора нормали $\overline{n^o} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, проведенного к плоскости P из начала координат. Каждое общее уравнение плоскости может быть приведено к нормальному виду, причем

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $p = \dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак перед радикалом выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $p \geq 0$).

5.2.9. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость Р задана уравнением (5.28) и дана точка $M_o = (x_o, y_o, z_o)$, лежащая вне этой плоскости. Тогда расстояние α от точки M_o до плоскости P находится по формуле

$$d = |x_o \cos\alpha + y_o \cos\beta + z_o \cos\gamma - p|. \tag{5.29}$$

Если плоскость P задана уравнением (5.25), то расстояние d вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . \tag{5.30}$$

5.2.10. Взаимное расположение двух плоскостей

Углом между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, называется угол φ между их нормальными векторами $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Для нахождения этого угла используют формулу

$$\cos\phi = \cos(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} . \tag{5.31}$$

Если выполняется условие $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$ то плоскости перпендикулярны. При $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ плоскости параллельны, а если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости сливаются в одну – совпадают.

5.2.11. Общие уравнения прямой

Всякую прямую L в пространстве может рассматривать как линию пересечения двух плоскостей P_1 и P_2, заданных своими общими уравнениями. Уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \end{cases} \tag{5.32}$$

где числа A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 не пропорциональны, называются общими уравнениями прямой L. Направляющий вектор $\overline{\mathbf{S}} = (m, n, p)$ этой прямой может быть найден по формуле

$$\overline{\mathbf{S}} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \qquad (5.33)$$

Выбирая любое решение $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ системы (5.32) получаем точку $M_0 \in L$ и, следовательно, можем записать канонические уравнения прямой L вида (5.17).

5.2.12. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть прямая L задана уравнениями (5.17), а плоскость P – уравнением (5.25). *Углом между прямой L и плоскостью P* называется угол φ, образованный прямой L и ее проекцией на плоскость P. Для вычисления угла φ используется формула

$$\sin\phi = \frac{|\ (\overline{n}, \overline{S})\ |}{|\overline{n}||\overline{S}|} = \frac{|\ Am + Bn + Cp\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (5.33)$$

Если выполняется равенство

$$Am + Bn + Cp = 0, \qquad (5.34)$$

то прямая L и плоскость P параллельны. Если же справедливы соотношения

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \qquad (5.35)$$

то прямая L и плоскость P перпендикулярны.

Если условие (5.34) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в единственной точке $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Координаты этой точки найдутся из равенств:

$$\begin{cases} x_1 = x_o + mt_1 \\ y_1 = y_o + nt_1 \\ z_1 = z_o + pt_1, \end{cases} \qquad (5.36)$$

где t_1 есть то единственное значение параметра t, при котором прямая L и плоскость P пересекаются:

$$t_1 = \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0$, то прямая L и плоскость P параллельны (они не пересекаются ни при одном значении t).

Если $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$, то прямая L лежит на плоскости P (они имеют бесчисленное множество точек пересечения).

5.3. Гиперплоскость в пространстве R^n

Множество точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют векторному уравнению

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{x}}) = a_\text{o}, \tag{5.37}$$

называется *гиперплоскостью пространства* R^n. Здесь $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ – действительные числа, $n > 3$. При $n = 2$ уравнение (5.37) задает прямую на плоскости R^2, при $n = 3$ – плоскость в пространстве R^3. Если $a_\text{o} = 0$, то гиперплоскость проходит через начало координат. Гиперплоскость (5.37) пересекает ось координат Ox_i в точке $A_i = (0, 0, \ldots, a_o/a_i, 0, \ldots, 0)$. Если $a_i = 0$, то гиперплоскость Ox_i не пересекает. Частным случаем уравнения (5.37) является линейное уравнение $x_i = 0$. В n-мерном пространстве оно определяет координатную гиперплоскость.

Пусть имеются две гиперплоскости $Г_1$ и $Г_2$, заданные уравнениями $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{x}}) = a_\text{o}$ и $(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{x}}) = b_\text{o}$ соответственно.

Если выполняется условие $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \; = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_\text{o}}{b_\text{o}}$, то гиперплоскости $Г_1$ и $Г_2$ совпадают.

Если выполняются равенства $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \; \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} \neq \dfrac{a_\text{o}}{b_\text{o}}$, то гиперплоскости $Г_1$ и $Г_2$ параллельны.

Пересечением гиперплоскостей $Г_1$ и $Г_2$ называется множество решений системы

$$\begin{cases} (\overline{a}, \overline{x}) = a_\text{o} \\ (\overline{b}, \overline{x}) = b_\text{o} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_\text{o} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = b_\text{o}\,. \end{cases} \tag{5.38}$$

Если система (5.38) совместна, то гиперплоскости пересекаются. Еесли $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 2$, где $\mathbf{A}_{2\times n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$, то система (5.38) по теореме Кронекера-Капелли будет совместна: в этом случае $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \widetilde{\mathbf{A}} = 2$, где $\widetilde{A}_{2\times(n+1)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_\text{o} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_\text{o} \end{pmatrix}$.

Если $\operatorname{rang}\mathbf{A}=1$ и $a_0 \neq b_0$, то $\operatorname{rang}\mathbf{A} \neq \operatorname{rang}\widetilde{\mathbf{A}}=2$ и система (5.38) несовместна, т.е. гиперплоскости параллельны. При $\operatorname{rang}\mathbf{A}=\operatorname{rang}\widetilde{\mathbf{A}}=1$ система совместна и гиперплоскости совпадают. Если рассматривать пересечение $(n-1)$ гиперплоскостей, то при условии $\operatorname{rang}\mathbf{A}=\operatorname{rang}\widetilde{\mathbf{A}}=n-1$, где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов полученной системы, получим общие уравнения прямой в пространстве R^n.

5.4. Выпуклые множества

Пусть заданы две несовпадающие точки $M'=(x_1', x_2', \dots, x_n')$ и $M''=(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ пространства R^n. Обозначим через $\overline{\mathbf{r}}'$ и $\overline{\mathbf{r}}''$ – радиус-векторы точек M' и M'' соответственно.

Отрезком n-мерного пространства, соединяющим точки M' и M'', называется множество точек $M=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этого пространства, радиус-векторы которых $\overline{r}$ находится по формуле

$$\overline{\mathbf{r}}=(1-t)\overline{\mathbf{r}}'+t\overline{\mathbf{r}}'', \tag{5.39}$$

где параметр t принимает значения от нуля до единицы, $\mathrm{t}\in[0,1]$.

Множество $A \subset \mathrm{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых точек M', M'', $M' \in A$, $M'' \in A$, отрезок, соединяющий эти точки, также принадлежит множеству A. Пустое множество $\varnothing$ по определению считается *выпуклым*.

Справедлива *теорема*: пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

В n-мерном пространстве примерами выпуклых множеств могут служить отрезок, гиперплоскость и само пространство R^n.

Точка M_0 называется *внутренней* точкой данного выпуклого множества A, если существует окрестность этой точки, в которой содержатся только точки множества A. Точка M' называется *граничной* точкой данного выпуклого множества A, если в любой сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся как точки множества A, так и точки, не принадлежащие множеству A. Точка M'' называется *угловой* точкой выпуклого множества A, если она является граничной и не лежит внутри отрезка, соединяющего любые две точки области. При $n=2$ внутренние, граничные и угловые точки показаны на рис. 5.5.

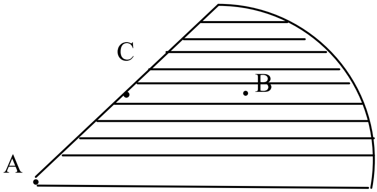


Рис. 5.5

A – угловая точка;

B – внутренняя точка;

C – граничная точка.

Выпуклое множество A называется *ограниченным*, если существует число $N > 0$, такое, что для любой точки $M \in A$, ее радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}$ удовлетворяет неравенству $|\bar{\mathbf{r}}| < N$. В противном случае выпуклое множество называется *неограниченным*.

Выпуклое множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Например, множество решений линейного неравенства $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}) \le a_o$ является выпуклым замкнутым множеством.

Справедлива теорема: множеством решений линейного неравенства $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}) \le a_o$ является одно из полупространств, на которые делит гиперплоскость $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}) = a_o$ пространство R^n, включая и эту гиперплоскость, другое же полупространство вместе с этой же гиперплоскостью является решением неравенства $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}) \ge a_o$. При $n = 2$ данное утверждение позволяет решать линейные неравенства с двумя переменными: прямая, заданная общим уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 = a_o$ разбивает плоскость на две полуплоскости, причем координаты любой точки одной из них удовлетворяют неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 < a_o$, а другой – неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 > a_o$, Чтобы узнать, какая именно из двух полуплоскостей определяется данным неравенством, достаточно проверить одну произвольно выбранную точку (удобнее всего начало координат), подставив ее координаты в левую часть неравенства.

Пример 5.2. Дан треугольник $A(5;-4)$, $B(-1;2)$, $C(5;1)$. Найти точки, в которых медианы делятся на три равные части.

Решение. Координаты точки K (рис. 5.6.) определяется по формуле:

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Тогда $\quad x_K = \dfrac{5-1+5}{3} = 3$, $y_K = \dfrac{-4+2+1}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

Итак, $K(3; -\frac{1}{3})$.

Координаты точек L, M, N, которым являются серединами отрезков AK, BK и CK соответственно, определим по формулам (5.3) деления отрезка пополам:

$$x_L = \frac{x_A + x_K}{2} = \frac{5+3}{2} = 4,\ y_L = \frac{y_A + y_K}{2} = \frac{-4-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{13}{6};\ L(-4; -\tfrac{13}{6});$$

$$x_M = \frac{x_B + x_K}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1,\quad y_M = \frac{y_B + y_K}{2} = \frac{2-\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{6};\ M(1; \tfrac{5}{6});$$

$$x_N = \frac{x_C + x_K}{2} = \frac{5+3}{2} = 4,\quad y_N = \frac{y_C + y_K}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3};\quad N(4; \tfrac{1}{3}).$$

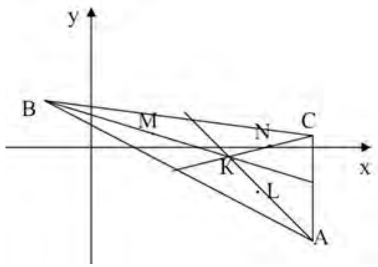


Рис. 5.6

Пример 5.3. Даны две смежные вершины $A(2; 5)$ и $B(5; 3)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(-2; 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Для вершины A противоположной является вершина C, для B – вершина D. Точка M делит отрезки AC и BD пополам (рис. 5.7) Поэтому координаты точек C и D можно найти, воспользовавшись формулами деления отрезка пополам: $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

С одной стороны:

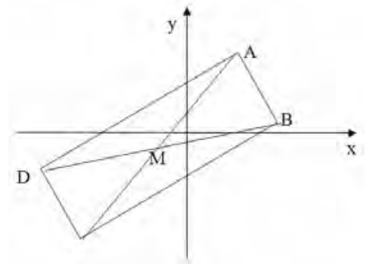


Рис. 5.7

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad -2 = \frac{2 + x_C}{2};$$

$-4 = 2 + x_C$, откуда $x_C = -6$;

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}; \quad 0 = \frac{5 + y_C}{2},$$

откуда $y_C = -5$; $C(-6;-5)$.

С другой стороны: $x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2}$; откуда

$$-2 = \frac{5 + x_D}{2}; \quad -4 = 5 + x_D, \; x_D = -9; \quad y_M = \frac{y_B + y_D}{2};$$

откуда $0 = \dfrac{3 + y_D}{2}$, $y_D = -5$; $D(-9;-3)$.

Зная теперь координаты всех вершин параллелограмма и воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две данные точки $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, можем составить уравнения сторон параллелограмма.

Уравнение AB: $\dfrac{y-3}{5-3} = \dfrac{x-5}{2-5}$, $2x + 3y - 19 = 0$.

Уравнение BC: $\dfrac{y+5}{3+5} = \dfrac{x+6}{5+6}$, $8x - 11y - 7 = 0$.

Уравнение CD: $\dfrac{y+5}{-3+5} = \dfrac{x+6}{-5+6}$, $2x + 3y + 27 = 0$

Уравнение AD: $\dfrac{y-5}{-3-5} = \dfrac{x-2}{-9-2}$, $8x - 11y + 39 = 0$.

6. Теория пределов последовательностей

Одной из основных операций математического анализа является операция предельного перехода. Эта операция в различных ее формах лежит в основании многих конструкций дифференциального и интегрального исчисления, являясь по сути дела фундаментом для математического анализа.

6.1. Числовые последовательности

Мы начинаем изучение понятия предела с простейшего частного случая, а именно — с предела числовой последовательности.

6.1.1. Числовые последовательности, их виды и арифметические операции над ними.

Понятие числовой последовательности известно из курса средней школы и может быть введено следующим образом.

Определение 6.1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Числа δ называются *членами* или *элементами последовательности*, число n - номером элемента последовательности x_n.

Числовая последовательность обозначается x_n, $n = 1, 2, ...$ или (x_n) или $|x - x_0|$. Числовая последовательность является функцией натурального аргумента, т.е. $x_n = f(n)$, где $f : N \to R$. Так, например:

1) формула $x_n = 2n - 1$ числам натурального ряда $1, 2, 3, 4, 5, ...$ ставит в соответствие последовательность нечетных чисел

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, ...; \qquad (6.1)$$

2) формула $x_n = 1 - 2n$ задает числовую последовательность

$$-1, -3, -5, -7, -9, \ldots , \qquad (6.2)$$

которая является убывающей арифметической прогрессией с разностью $d = -2$;

3) формула $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ задает возрастающую последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots; \qquad (6.3)$$

4) формула $x_n = \dfrac{4n-1}{3n-1}$ задает убывающую последовательность неправильных дробей

$$.. \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{19}{14}, \ldots \qquad (6.4)$$

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной,* если существуют числа m и M такие, что $m \le x_n \le M$ для всех x_n. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху,* если существует число M такое, что $x_n \le M$ для всех $n \in N$ и *ограниченной снизу,* если существует число x_0 такое, что $x_n \ge m$.

Определение 6.3. Последовательность $\{x_n\}$ *называется:*

возрастающей, если $x_n \le x_{n+1}$, *для всех* $n \in N$;

строго возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$, $n \in N$;

убывающей если $x_n \ge x_{n+1}$, *для всех* $n \in N$;

строго убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in N$.

Например, последовательности (6.1), (6.2) являются неограниченными, причем (6.1) является неограниченно возрастающей (строго), а (6.1) – неограниченно убывающей (строго). Последовательности (6.3) и (6.4) являются ограниченными. Члены последовательности (6.3), хотя и возрастают с увеличением n, но при этом остаются меньше $\dfrac{1}{2}$; а члены последовательности (6.4), убывая, по мере возрастания n, остаются больше $\dfrac{4}{3}$.

Определение 6.4. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Определение 6.5. Суммой, разностью, произведением и частным последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательности $\{z_n\}$, члены которых образованы соответственно по правилам:

$$z_n = x_n + y_n; \quad z_n = x_n - y_n; \quad z_n = x_n \cdot y_n; \quad z_n = \frac{x_n}{y_n} \text{ (при } y_n \neq 0\text{)}.$$

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число C называется последовательность $\{Cx_n\}$.

6.1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и связь между ними.

Для описания характера изменения переменных величин удобно использовать понятия бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Определение 6.6. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует номер N, зависящий от ε, т.е. $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех α_n с номерами $A > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Следует подчеркнуть, что термин «бесконечно малая» здесь используется не для обозначения малости отдельно взятого значения переменной величины (она на отдельных стадиях может быть и вовсе не малой), а только для описания характера изменения данной величины, которая лишь в процессе своего изменения способна в конце концов сделаться меньшей произвольно взятого числа ε.

Пример 6.1. Доказать, что последовательность $(\alpha_n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$ является бесконечно малой.

Решение. Зададим любое $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ получаем $g(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Если взять номер $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где символ $[x]$ означает целую часть числа x, то для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Например, при $\varepsilon = 0{,}1$, $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = [10] = 10$ и при $n > 10$ верно неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < 0{,}1$; при

$\varepsilon = 0{,}01$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < 0{,}01$ при всех $n > N$, где $N = \left[\dfrac{1}{0{,}01}\right] = 100$. Так как ε может быть сколько угодно малым и для любого такого ε способ нахождения $N = N(\varepsilon)$ указан, то последовательность $\{\alpha_n\} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ является бесконечно малой.

Бесконечно малым последовательностям, в некотором смысле, противопоставляются бесконечно большие.

Определение 6.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого положительного числа A существует такой номер N, зависящий от A, т.е. $N = N(A)$, такой, что для всех x_n с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Пример 6.2. Доказать, что последовательность $(x_n) = (-1)^n n$ является бесконечно большой.

Решение. Зададим любое $A > 0$. Из неравенства $|x_n| > A \Leftrightarrow \left|(-1)^n n\right| > A$ получаем $n > A$. Если взять номер $N = [A]$, то для всех $n > N$ будет выполняться требуемое неравенство $|x_n| > A$. Например, при $A = 100{,}5$ $N = 100$; при $A = 100000$, $N = 100000$. Так как A может быть сколь угодно большим, то последовательность $\{x_n\} = \left\{(-1)^n n\right\}$ будет бесконечно большой.

Связь между бесконечно малыми и большими последовательностями устанавливает следующая теорема:

Теорема 6.1. Если последовательность (x_n) бесконечно большая и все ее члены отличны от нуля $(x_n \neq 0)$, то последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ будет бесконечно малой. Верно и обратное утверждение: если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $(\alpha_n \neq 0)$, то последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Заметим, что всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной, а бесконечно большая последовательность — неограниченной. Вместе с тем, не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

6.1.3. Свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 6.2. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Так, например, числовая последовательность $\{\delta_n\} = \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ есть бесконечно малая последовательность, т.к. последовательности $\{\alpha_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$, $\{\beta_n\} = \left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\{\gamma_n\} = \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ есть бесконечно малые последовательности.

Теорема 6.3. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 6.4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть последовательность бесконечно малая.

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на число (константу) есть последовательность бесконечно малая.

Например, последовательность $\{\beta_n\} = \left(\frac{100000}{n}\right)$, равная произведению числа $c = 100000$ на бесконечно малую последовательность $f(x)$ есть бесконечно малая последовательность.

6.2. Сходящиеся последовательности

6.2.1. Определение предела последовательности.

Определение 6.8. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного действительного числа ε существует такой номер N, зависящий от $x \to \infty$, $N = N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся,* в противном случае – *расходящейся.*

Замечание. Иногда формально договариваются трактовать бесконечно большие последовательности как последовательности, сходящиеся к пределу ∞. Такая формализация позволяет использовать для бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ следующую символику: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ следует, что $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. Это означает, что при $y = e^x > N$ все члены последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к числу a, находятся в ε-окрестности точки a. Таким образом, геометрический смысл предела последовательности следующий: если последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a, то какую бы малую окрестность V_ε точки a ни взять, начиная с некоторого номера $N = N(\varepsilon)$ все члены последовательности $\{x_n\}$ попадают и остаются в этой ε-окрестности; вне V_ε-окрестности имеется лишь конечное число членов этой последовательности.

Пример 6.3. Доказать, что число $a = \dfrac{1}{2}$ является пределом числовой последовательности $\{x_n\} = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$.

Решение. Зададим любое $\varepsilon > 0$ и решим относительно $x = x_0$ неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Имеем $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, откуда $2(2n+1) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ $|x - x_0| > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Значит, выбирая $N = \left[\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$ при всех $n > N$ получим, что выполняется неравенство $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, что и доказывает тот факт, что $\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1}$.

Между понятиями предела и бесконечно малыми последовательностями существует тесная *взаимосвязь*: если $\{x_n\}$ сходится и имеет пределом число a, то разность $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой последовательностью; если $\{x_n\}$ можно представить в виде суммы постоянного числа a и бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$, т.е. $\{x_n\} = \{a + \alpha_n\}$, то $\{x_n\}$ сходится к a.

6.2.2. Свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 6.5. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Теорема 6.6. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 6.7. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a и $a>0$ $(a<0)$, то, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n>0 \quad (x_n<0)$.

Теорема 6.8. (арифметические действия над сходящимися последовательностями): Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к a и b соответственно, т.е. $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Теорема 6.9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если, начиная с некоторого номера, $x_n \geq y_n$, то $a \geq b$.

Теорема 6.10. Пусть для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, выполнены неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 6.11. Для того, чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.

С помощью этой теоремы можно установить, что монотонно возрастающая и ограниченная последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится. Пределом в данном случае является число, обозначаемое после Эйлера буквой e: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, причем $e = 2,7182818...$ – иррациональное число и является весьма характерным для анализа, как для арифметики 1 или для геометрии π.

7. Предел и непрерывность функции

Понятие функциональной зависимости наряду с операцией предельного перехода лежат в основе построения математического анализа. Ниже даются необходимые определения и факты.

7.1. Понятие функции одной переменной.

Прежде, чем перейти к изучению другой более сложной формы операции предельного перехода, основанной на понятии предела (или предельного значения) функции, уточним само понятие функции.

7.1.1. Определение функции. Элементарные функции.

Пусть даны два множества X и Y, элементы которых будем обозначать x и y, соответственно. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$, то говорят, что на множестве X *задана функция* $y = f(x)$; пишут также $f\colon\ X \to Y$ или $x \to f(x)$. Множество X называется *областью определения* $D(f) = X$, а множество $E(f) \subset Y$ — *областью значений* функции. При этом x называется независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной или функцией.

Множество пар $\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$ называется *графиком* функции f.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X = \{x\}$, а $Y = \{y\}$ - множество ее значений. Если каждому значению $y \in Y$ соответствует только одно значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, то на множестве Y определена функция $x = g(y)$, для которой множеством значений является множество X. Функция g: $y \to x$ называется *обратной* к функции f, а обе функции f и g называются взаимообратными.

Функции могут задаваться различным способом: аналитическим выражением (формулой), при помощи таблиц или графиков, посредством некоторого алгоритма, реализуемого компьютерной программой и т. д.

Основными элементарными функциями являются: постоянная $y = const$, степенная $y = x^{\alpha}$, показательная $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, логарифмическая $y=\log_a x,\ a>0, a\neq 1$, тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos\ x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos\ x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Все функции, получаемые из элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, а также конечного числа операций взятия функции от функции (суперпозиция функций), *составляют класс элементарных функций.* Например, функция $y=\sqrt{1-x^2}$ является элементарной, а ее графиком является верхняя половина окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

7.1.2. Свойства функции одной независимой переменной.

Функция $y=f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной (нечетной),* если для всех $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, $(f(-x)=-f(x))$.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что для всех $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (неубывающей)* на множестве X, если для всех $x_1,x_2\in X$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)\le f(x_2)$). Функция $y=f(x)$ называется *убывающей (невозрастающей*) на множестве X, если для всех $x_1,x_2\in X$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ ($f(x_1)\ge f(x_2)$). Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными.*

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число M такое, что $f(x)\le M$ для всех $x\in X$.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число m, что $f(x)\ge m$ для всех $x\in X$.

Функция $y=f(x)$, ограниченная и сверху, и снизу на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве.

7.1.3. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.

Посредством функциональной зависимости могут быть описаны многие соотношения в области экономики. Например:

1) Функция спроса – зависимость спроса $D(demand)$ на некоторый товар в зависимости от его цены $p(price)$: $D = f(p)$;

2) Функция предложения – зависимость предложения $S(supply)$ на некоторый товар в зависимости от его цены p: $S = g(p)$;

3) Функция полезности – субъективная числовая оценка полезности u $(utility)$ количества $f(x)$ некоторого товара для данного индивида: $u = g(x)$;

4) Однофакторная производственная функция – зависимость объема y продукции от объема $b]$ используемого ресурса: $y = f(x)$;

5) Функция издержек – зависимость издержек I на производство x единиц продукции;

6) Налоговая ставка – зависимость налоговой ставки N, выраженной в процентах, от величины годового дохода $f(x)$.

Конкретный вид функциональной зависимости определяется с учетом обстоятельств и имеющейся информации.

7.2. Предел функции

Перейдем теперь к изучению более сложной формы операции предельного перехода, основанного на понятии предела (или предельного значения) функции. Ниже это понятие дается в двух эквивалентных формах – вначале, опираясь на ранее изученное понятие предела последовательности, а затем вовсе не использующее его.

7.2.1. Понятие предела функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором числовом множестве $X = \{x\}$ и точка x_0 является предельной точкой этого множества (x_0 называется предельной точкой множества $x \in X$, если в любой ε-окрестности этой точки есть точки множества X, отличные от x_0).

Определение 7.1. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, \ldots$, сходящейся к x_0, причем $x_n \neq x_0$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к числу A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Данное определение предела функции в точке называется определением на языке последовательностей или определением предела по Гейне.

Определение 7.2. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in X$ ($x \neq x_0$), удовлетворяющих неравенству $[a, b] < \delta$, выполняется неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Данное определение предела функции в точке $x = x_0$ называют определением на языке «$(A \neq B)$,» или определением предела по Коши. Можно доказать теорему, что оба определения предела эквивалентны.

Определение 7.3. Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $c \in [a, b]$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $f(c) = C, \ldots$, для которой $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$), соответствующая последовательность значений функции $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к числу A.

Правый предел (предел справа) обозначается

$$\lim_{x \to x_0,\ x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A,$$

а левый предел (предел слева)

$$\lim_{x \to x_0,\ x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

Правый и левый пределы называют *односторонними пределами* функции в точке.

Теорема 7.1. Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют предел справа и предел слева и они равны: $f(x_0 - 0) = f(x + 0) = A$.

Определение 7.4. Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (x_n) значений аргумента соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции сходится к A: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

7.2.2. Теоремы о пределах функций.

Ниже приведены основные свойства предела функции и арифметических операций над функциями, имеющими предел, с помощью которых во многих случаях упрощается вычисление пределов.

Теорема 7.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы A и B, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то:

1. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = cA;$$

3. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = AB;$$

4. Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0.$$

Пример 7.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^5 - x^3}{x^2 - x + 2}$.

Решение. Найдем предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - x + 2) = \lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2 = 1^2 - 1 + 2 = 2 \neq 0.$$

Значит, можно применить теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^5 - x^3}{x^2 - x + 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^5 - x^3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x + 2)} = \frac{2\cdot 1^5 - 1^3}{2} = \frac{1}{2}.$$

7.2.3. Замечательные пределы.

Здесь приведены два важных предельных соотношения, широко используемых в математике и ее приложениях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{(первый замечательный предел)} \qquad (7.1)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \text{(второй замечательный предел)} \qquad (7.2)$$

Приведенные замечательные пределы часто используются при вычислении других пределов.

Пример 7.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{2x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{2x}{3x}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^{2}}\ .$$

Пример 7.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Сделаем замену $\dfrac{1}{x}=y$. Тогда при $x\to 0$ имеем, что $y\to\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$.

7.2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Для изучения асимптотического поведения функций и для установления их эквивалентности используются понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Определение 7.5. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x=x_0$, если ее предел в этой точке равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0+0, x\to x_0-0$.

Например, функция $y = x^4 - 1$ является бесконечно малой при $x = 1$ и при $x = -1$; функция $y = x^{-3}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, функция $y = e^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$.

Теорема 7.3. Алгебраическая сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Теорема 7.4. Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$— бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Определение 7.6. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$, если для любого $M > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любых $x \in X$, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Если же выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$), то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Теорема 7.5. Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$; если $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, причем $g(x_0) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то $\dfrac{1}{g(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$. Например, $f(x) = x - 2$ бесконечно малая при $x \to 2$, тогда $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x-2}$ – бесконечно большая при $x \to 2$.

7.2.5. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и пусть существует предел отношения $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$.

Определение 7.7. Если $k = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

если $0 < |k| < \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* и пишут $\alpha(x) = O(\beta(x))$ или $\beta(x) = O(\alpha(x))$;

если $k = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* и пишется $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

если $k = \infty$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка* чем $\beta(x)$ (соответственно $\beta(x)$ — бесконечная малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и пишется $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

Пример 7.4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$:

а) $\alpha(x) = \dfrac{3}{x^2}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = \infty$; б) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x}$, $\beta(x) = x$, $x_0 = 0$;

в) $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \sin 3x$, $x_0 = 0$; г) $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;

д) $\alpha(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $\beta(x) = x$, $x_0 = 0$.

Решение. Имеем

а) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 \cdot x}{x^2 \cdot 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} = 0, \Rightarrow \alpha(x) = o(\beta(x));$$

б) $$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty, \Rightarrow \beta(x) = o(\alpha(x));$$

в) $$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha(x) = O(\beta(x));$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1\Rightarrow\alpha(x)\sim\beta(x)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$. Данный предел не существует, значит $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – несравнимые бесконечно малые.

7.2.6. Раскрытие неопределенностей.

Часто встречаются арифметические предельные выражения, для вычисления которых уже недостаточно знания пределов каждой функции по отдельности, а нужно учитывать и закон их совместного изменения. Это так называемые «неопределенные выражения».

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$, то выражение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x\to x_0$ называется *неопределенностью типа* $\dfrac{0}{0}$; если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно большие функции при $x\to x_0$, то выражение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x\to x_0$ называется *неопределенностью типа* $\dfrac{\infty}{\infty}$, а выражение $\alpha(x)-\beta(x)$ – *неопределенностью типа* $\infty-\infty$.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, а $\beta(x)$ – бесконечно большая функции при $x\to x_0$, то $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ называется *неопределенностью типа* $0\cdot\infty$.

Аналогично определяются неопределенности $1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$. Раскрыть неопределенность означает найти предел, если он существует, соответствующего выражения, а это зависит от поведения функций, входящих в выражение.

Пример 7.5. Найти $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$, если а) $c=2$; б) $c=1$; в) $c=\infty$.

Решение. а) Применяя теорему о пределе частного, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+7x-9)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-2)}=\frac{2\cdot 2^2+7\cdot 2-9}{2^2+2-2}=\frac{13}{4};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$. Здесь нельзя применить теорему о пределе частного, так как предел знаменателя и числителя равен нулю. Значит, имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+\frac{9}{2})}{(x-1)(x+2)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+\frac{9}{2})}{(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+9}{x+2}=\frac{2\cdot 1+9}{1+2}=\frac{11}{3};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$. В этом случае и числитель, и знаменатель при $x\to\infty$ стремятся к бесконечности, т.е. являются бесконечно большими функциями. Имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}.$$

Так как $\frac{7}{x}$, $\frac{9}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$, то числитель стремится к 2, а знаменатель — к 1, и поэтому искомый предел равен $\frac{2}{1}=2$.

Пример 7.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x=\sin 0=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}5x=\operatorname{tg}0=0$, то здесь мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем функцию $\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$ так, чтобы использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. В итоге получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}\cdot\cos 5x\right)=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x\right)=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 1}\cdot 1=\frac{3}{5}.$$

Пример 7.7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{5x+2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+2)=\infty$, то имеем дело с неопределенностью типа 1^{∞}. Поэтому преобразуем данное выражение так, чтобы использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{5x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x+2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{(5x+2)2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+4}{x}}=e^{10}$$

Пример 7.8. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{3\sqrt{x}-3}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 1}(3\sqrt{x}-3)=3\cdot\sqrt{1}-3=0, \quad \lim_{x\to 1}(\sqrt{2x-1}-1)=\sqrt{2\cdot 1-1}-1=0,$$

то имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженные выражения для числителя и знаменателя, соответственно. Применяя формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и сокращая затем дробь на $(x-1)$, получим ответ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{3\sqrt{x}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x-1}+1)(3\sqrt{x}+3)}{(3\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+3)(\sqrt{2x-1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1-1)3(\sqrt{x}+1)}{(9x-9)(\sqrt{2x-1}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)3(\sqrt{x}+1)}{9(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x-1}+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{3}.$$

7.3. Непрерывность функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа – понятие непрерывности функций.

7.3.1. Непрерывность функции в точке и на множестве.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и x_0 является предельной точкой множества X, причем $x_0\in X$ (это означает, что $f(x_0)$ существует).

Определение 7.8. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{7.3}$$

Равенство (7.3) равносильно условию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. Это означает, что для непрерывной функции знаки предела «$\lim$» и функции f можно переставлять.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *справа*, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \qquad (7.4),$$

и *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \qquad (7.5)$$

Для выполнения равенства (7.3) необходимо и достаточно, чтобы для функции $f(x)$ существовали в точке x_0 предел справа и предел слева, они были равны друг другу и равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \qquad (7.6)$$

Если переписать равенство (7.3) в виде $\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ и ввести обозначения: $\Delta x = x - x_0$ (*приращение аргумента* в точке x_0) и $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (*приращение функции* в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx), то Определение 7.8 перефразируется следующим образом: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (7.7)$$

Пример 7.9. Показать, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$, т.е. в любой точке области определения.

Решение. Придавая аргументу x приращение Δx в точке x_0, вычислим соответствующее ему приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3 =$$

$$= x_0{}^3 + 3x_0{}^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3 = \Delta x \cdot (3x_0{}^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x (3x_0{}^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 0 \cdot (3x_0{}^2 + 3x_0 \cdot 0 + 0) = 0,$$

а это, согласно (7.7), и означает, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$.

Определение 7.9. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$.

7.3.2. Арифметические действия над непрерывными функциями.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 7.6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $cf(x)$ ($c-$ постоянная), $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Эта теорема верна для любого конечного числа непрерывных функций. Например, если даны три непрерывные функции $f_1(x)=3x^2$, $f_2(x)=5$ и $f_3(x)=x^2-x-2$ (их непрерывность на всей числовой прямой доказывается аналогично примеру (7.9), то непрерывными всюду будут и функции

$$f_1(x)+f_2(x)-f_3(x),\ f_1(x)f_2(x)f_3(x) \text{ и } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Дробно–рациональная функция $\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{f_3(x)}$ имеет разрыв в точках $x_1=-1$ и $x_2=2$, где знаменатель $f_3(x)=x^2-x-2$ обращается в нуль.

7.3.3. Непрерывность сложной и обратной функции.

Теорема 7.7. Если функция $z=g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z)$ непрерывна в точке $z_0=g(x_0)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 7.8. Если функция $y=f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то обратная функция $x=f^{-1}(y)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[A,B]$, где $A=f(a), B=f(b)$.

Из теорем 7.6, 7.7, 7.8 следует вывод, что все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

7.3.4. Точки разрыва функции и их классификация.

Определение 7.10. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в этой точке не является непрерывной или же $f(x)$ в этой точке не определена, но определена в достаточно малой ее окрестности.

Определение 7.11. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если для $f(x)$ в этой точке существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, но они не равны друг другу: $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$. Величина $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 7.12. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если существуют конечные, равные друг другу односторонние пределы, но они не равны значению функции в точке x_0 или $f(x_0)$ не существует: $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$.

Чтобы устранить разрыв в точке x_0, достаточно положить $f(x_0) = f(x_0+0) = f(x_0-0)$.

Определение 7.13. Если x_0 – точка разрыва функции $f(x)$ и хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Пример 7.10. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Данная функция является постоянной при $x \in (-\infty\,;0)$ и при $x \in (0\,;+\infty)$, поэтому на этих промежутках является непрерывной. Точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода, так как

$$f(x_0-0) = f(-0) = \lim_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1,$$

$$f(x_0+0) = f(+0) = \lim_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Оба односторонних предела существуют, но они не равны друг другу.

Пример 7.11. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Решение. Данная функция определена при $x \in (-\infty\,;2) \cup (2\,;+\infty)$ и на этом множестве является непрерывной, как элементарная функция.

Исследуем теперь точку $x_0 = 2$, для чего вычислим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = \left[\dfrac{1}{2-0-2}\right] = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = \left[\dfrac{1}{2+0-2}\right] = +\infty$.

Значит, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.

7.3.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение 7.14. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Определение 7.15. Если функция $f(x)$ определена на множестве X и существует $x_0 \in X$ такое, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, то число $f(x_0)$ называется *наибольшим (наименьшим) значением функции* $f(x)$ *на множестве* X.

Теорема 7.9 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 7.10 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшего значения M. Это означает, что найдутся такие точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Теорема 7.11 (Больцано-Коши о промежуточном значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = A, f(b) = B$ $(A \ne B)$, то для любого числа C, $A < C < B$, найдется хотя бы одна точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = C$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка x_0, в которой функция обращается в нуль, т.е. $f(x_0) = 0$.

8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Математический анализ, основным содержанием которого является дифференциальное и интегральное исчисление, переплетаясь с другими разделами, составляет ту основу, на которой держится большинство разветвлений современной математики. В математической экономике, например, при анализе *производственных функций* широко используются понятия производной и дифференциала.

8.1. Производная

В данном разделе излагаются основные положения дифференциального исчисления функций одной переменной.

8.1.1. Понятие производной функции в точке. Односторонние и бесконечные производные.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 8.1. *Производной* функции f в точке x_0 называется число, обозначаемое $f'(x_0)$, равное пределу отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ в этой точке к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{8.1}$$

или, если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, то при $\Delta x \to 0$ будет $x \to x_0$ и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8.1a}$$

Определение 8.2. Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Определение 8.3. Если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а предел (8.1) равен бесконечности ($+\infty$ или $-\infty$), то говорят о бесконечной производной.

Определение 8.4. Пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{8.2}$$

и

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{8.3}$$

называются *правосторонней* и *левосторонней* производной, соответственно.

Для существования производной $f'(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали обе односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и они были равны друг другу: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Производная обозначается и другими способами, например:

$$f'(x_0),\ f'_x(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \frac{dy(x_0)}{dx},\ f'(x)\Big|_{x=x_0} \text{ и т. д.}$$

Пример 8.1. Пользуясь определением производной, вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \sqrt{x+3}$.

Решение. Имеем: $x_0 = -2,\quad f(x_0) = \sqrt{-2+3} = 1,\quad x_0 + \Delta x = -2 + \Delta x,$

$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{-2 + \Delta x + 3} = \sqrt{1 + \Delta x}$, $\Delta f(x_0) = \sqrt{1+\Delta x} - 1$.

Согласно (8.1) находим

$$f'(-2) = \left[\begin{array}{l} \text{числитель и знаменатель} \\ \text{умножим на } \sqrt{1+\Delta x} + 1 \end{array}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{1+\Delta x} - 1)(\sqrt{1+\Delta x} + 1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{(1+\Delta x)^2} - 1^2)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 8.2. Пользуясь определением производной, вычислить $f'(0)$ для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Имеем: $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 0$, $x_0 + \Delta x = \Delta x$,

$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}$. Согласно (8.1) находим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\frac{\Delta x}{(\Delta x)^3}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Таким образом, имеем бесконечную производную.

Пример 8.3. Найти по определению производной $f'(0)$, если $f(x)=|x|$.

Решение. Имеем: $x_0=0,\ f(x_0)=|0|=0,\ x_0+\Delta x=\Delta x.$ Тогда

$$f(x_0+\Delta x)=|0+\Delta x|=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, & \text{если}\quad \Delta x>0,\\ -\Delta x, & \text{если}\quad \Delta x<0.\end{cases}$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \Delta x>0,\\ -1, & \text{если}\quad \Delta x<0.\end{cases}$$

Сравнивая полученный результат с (8.2) и (8.3), заключаем, что $f'_+(0)=1,\quad f'_-(0)=-1,$ а значит, $f'(0)$ не существует.

8.1.2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Угол между кривыми.

На кривой $y=f(x)$ выберем две различные точки M_0 и M_1 (рис.8.1) и через них проведем единственную прямую l, которая называется *секущей* к графику. Используя уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0\,;f(x_0))$ и $M_1(x_1\,;f(x_1))$, которое имеет вид $\dfrac{y-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$, получим уравнение секущей

$$y=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+f(x_0) \tag{8.4}$$

Сравнивая уравнение (8.4) с уравнением прямой с угловым коэффициентом, заключаем, что угловой коэффициент k секущей l имеет вид

$$k=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

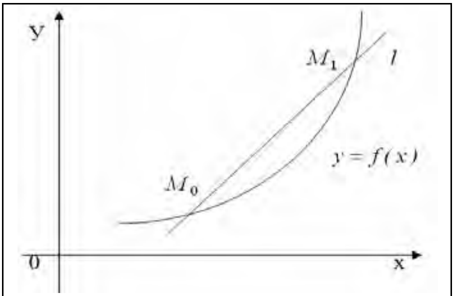


Рис.8.1.

Определение 8.5. Если точка M_1, двигаясь по графику непрерывной функции f, приближается к точке M_0, а секущая l при этом стремится к некоторому предельному положению, то это *предельное положение секущей* называется *касательной* к графику функции f в точке x_0.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x_0}=f'(x_0)$ и уравнение секущей (8.4) перейдет в уравнение касательной:

$$y=f'(x_0)\,(x-x_0)+f(x_0) \tag{8.5}$$

Таким образом, производная функции $y=f(x)$, вычисленная в точке $x=x_0$, есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0\,;f(x_0))$. В этом и состоит *геометрический смысл производной.*

Определение 8.6. Прямая, перпендикулярная к касательной в точке M_0, называется *нормалью* к кривой $y=f(x)$ в точке M_0.

Из условия $k_1k_2=-1$ перпендикулярности прямых заключаем, что угловой коэффициент $k_н$ нормали выражается через угловой коэффициент $k_{кас}$ касательной по формуле $k_н=-\dfrac{1}{k_{кас}}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{8.6}$$

Пример 8.4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3$ в точке $M_0(2\,;8)$.

Решение. Имеем $f(x)=x^3$, $f'(x)=(x^3)'=3x^2$;
$f(x_0)=f(2)=8$; $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2=12$. Используя уравнение (8.5), получаем уравнение касательной : $y=12(x-2)+8$ или $y=12x-16$. Используя уравнение (8.6), получаем уравнение нормали :

$$y=8-\frac{1}{12}(x-2) \text{ или } 12y=96-x+2 \text{ или } x+12y-98=0.$$

Если $f'(x_0)=\pm\infty$, то уравнение касательной имеет вид $x=x_0$.

Определение 8.7. Пусть две кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ пересекаются в точке (x_0,y_0), т.е. $y_0=f(x_0)=g(x_0)$. *Углом* α *между заданными кривыми* называется *угол между касательными* к кривым, проведенным в точке их пересечения:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{g'(x_0)-f'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}$$

8.1.3. Физический смысл производной.

С физической точки зрения разностное отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ является средней скоростью изменения функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, а тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ называется мгновенной скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x_0.

Так, например, если функция $S = f(t)$ задает зависимость пути S, пройденного некоторым телом, от времени t, то производная $f'(t) = v(t)$ является скоростью движения; если функция $V = f(t)$ выражает зависимость количества производимой продукции от времени t, то ее производная $V' = f'(t) = p(t)$ является производительностью труда в момент времени t.

8.1.4. Непрерывность дифференцируемой функции.

Теорема 8.1. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение верно не всегда. Существуют непрерывные в точке x_0 функции, не имеющие в этой точке производной (пример 8.3).

8.1.5. Основные правила дифференцирования.

Пусть D_1 — множество точек из области определения функции $y = f(x)$, в каждой из которых существует производная $f'(x)$. Тогда каждому значению $x \in D_1$ соответствует $f'(x)$, т.е. задана новая функция $y = f'(x)$ с областью определения D_1. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием* и осуществляется по некоторым формальным правилам. Напомним эти правила.

Теорема 8.2. Производная постоянной равна нулю: т.е. если $y = C$, то $y' = C' = 0$.

Теорема 8.3. Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ имеют производные в точке x, то в этой точке имеют производные сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $g(x) \neq 0$), причем :

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных;

2) $(uv)' = u'v + uv'$ – производная произведения равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго сомножителя;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ – производная частного равна дроби, знаменателем которого является квадрат знаменателя, а числителем служит разность между произведением производной числителя на знаменатель и произведением числителя на производную знаменателя.

Следствие: $(cu)' = c \cdot u'$ – постоянный множитель выносится за знак производной;

4) $(uv...w)' = u'v...w + uv'...w + \cdots + uv...w'$

Теорема 8.4. (производная сложной функции). Если функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0 и $F'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$.

Теорема 8.5. (производная обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 является строго монотонной, непрерывной и существует производная $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$, определенная в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, строго монотонная, непрерывная и обратная функция имеет производную

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{8.8}$$

8.1.6. Таблица производных основных элементарных функций.

Запишем таблицу производных основных элементарных функций, учитывая правило дифференцирования сложной функции:

1. $y = c = const,$ $\qquad y' = 0.$
2. $y = x,$ $\qquad y' = 1.$
3. $y = u,$ $\qquad y' = u'.$
4. $y = u^{\alpha} \quad (\alpha = \text{const}),$ $\qquad y' = \alpha\, u^{\alpha-1} \cdot u'.$
5. $y = \sqrt{u}\ ,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\ .$
6. $y = \dfrac{1}{u},$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{u^2}\,.$
7. $y = a^u \ (a > 0,\ a \neq 1),$ $\qquad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$
8. $y = e^u,$ $\qquad y' = e^u \cdot u'.$
9. $y = \log_a u,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}.$
10. $y = \ln u,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{u}.$
11. $y = \sin u,$ $\qquad y' = \cos u \cdot u'$
12. $y = \cos u,$ $\qquad y' = -\sin u \cdot u'.$
13. $y = \operatorname{tg} u,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}\,.$
14. $y = \operatorname{ctg} u,$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$
15. $y = \arcsin u,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,.$
16. $y = \arccos u,$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $y = \operatorname{arctg} u,$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2.}$
18. $y = \operatorname{arcctg} u,$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2.}$

8.1.7. Производная степенно-показательной функции.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке $x \in X$, причем на X определена функция $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$. Тогда функция y имеет производную в точке x, причем ее можно найти с помощью логарифмического дифференцирования (8.9): так как $y = f(x) = (u(x))^{v(x)}$ ($u(x) > 0$),

то $\ln|y| = \ln\left|(u(x))^{v(x)}\right| = v(x) \cdot \ln(u(x))$.

Тогда $\left(\ln|y|\right)' = v'(x)\ln(u(x)) + \dfrac{v(x)u'(x)}{u(x)}$.

Учитывая, что $\left(\ln|y|\right)' = \dfrac{y'}{y}$, получаем окончательно

$$y' = (u(x))^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln(u(x)) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right). \qquad (8.10)$$

Формулу (8.10) не следует заучивать, надо запомнить прием, использованный при выводе этой формулы.

8.1.8. Примеры вычисления производных.

Приведем несколько типичных примеров вычисления производных.

Пример 8.5. Найти производные следующих функций:

1) $y = \arcsin\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$; 2) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 3) $y = \ln(e^{mx} + e^{-mx})$;

4) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$; 5) $y = \dfrac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}}$; 6) $y = \sqrt[x]{\dfrac{1}{x}}$.

Решение.

$$1)\ \left(\arcsin\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)' = \frac{\left(\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)^2}} = \frac{\dfrac{-2x(a^2 + x^2) - 2x(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}}{\sqrt{\dfrac{(a^2 + x^2)^2 - (a^2 - x^2)^2}{(a^2 + x^2)^2}}} =$$

$$= \frac{-4a^2x}{(a^2 + x^2)\sqrt{4a^2x^2}} = -\frac{2a}{a^2 + x^2}.$$

2) $$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} = \frac{\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \frac{1+x+1-x}{1+x}} =$$

$$= -\frac{1}{2(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

3) $$(\ln(e^{mx}+e^{-mx}))' = \frac{(e^{mx}+e^{-mx})'}{e^{mx}+e^{-mx}} = \frac{(e^{mx})'+(e^{-mx})'}{e^{mx}+e^{-mx}} =$$

$$= \frac{e^{mx}(mx)'+e^{-mx}\left(-mx)'\right)}{e^{mx}+e^{-mx}} = \frac{e^{mx}m+e^{-mx}(-m)}{e^{mx}+e^{-mx}} = \frac{m(e^{mx}-e^{-mx})}{e^{mx}+e^{-mx}}.$$

4) Здесь, предварительно упростим выражение для y, а затем будем его дифференцировать. Имеем:

$$y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} = \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{x^2+1-x^2} =$$

$$= 2\ln(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Теперь дифференцируем: $y' = \left(2\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right)' = \dfrac{2(\sqrt{x^2+1}-x)'}{\sqrt{x^2+1}-x} =$

$$= \frac{2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{2\,\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

5) Вначале найдем логарифм от функции y:

$$\ln y = \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{4}\ln(x-2) - \frac{7}{3}\ln(x-4).$$

Дифференцируя это равенство, находим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x-4}.$$

Тогда $$y'=y\left(\frac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{4(x-2)}-\frac{7}{3(x-4)}\right)=$$

$$=\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}}\left(\frac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{4(x-2)}-\frac{7}{3(x-4)}\right)=\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}}=$$

$$=\frac{30(x^2-6x+8)-9(x^2-5x+4)-28(x^2-3x+2)}{12(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=-\frac{(7x^2+51x-148)(x-1)^{\frac{3}{2}}}{12(x-2)^{\frac{7}{4}}(x-4)^{\frac{10}{3}}}.$$

6. $y=\sqrt[x]{\dfrac{1}{x}}$.

Вначале найдем логарифм от функции y:

$\ln y=\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x}\ln x=-\dfrac{\ln x}{x}$. Дифференцируя это равенство,

получим: $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}$ или $y'=-y\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}$.

Отсюда: $y'=\sqrt[x]{\dfrac{1}{x}}\left(\dfrac{\ln x-1}{x^2}\right)$.

Наибольшие затруднения встречаются при дифференцировании **сложной функции**, поэтому следует запомнить, что дифференцирование производится в порядке, обратном тому, который существует при вычислении частного значения функции y для определенного значения аргумента x.

Пример 8.6. Найти производную функции $y=\sin^2 5x$.

Решение. Для вычисления y аргумент x: 1) умножается на 5;

2) отыскивается синус; 3) результат возводится во вторую степень. Следовательно, дифференцирование производится в обратном порядке, т.е. сначала дифференцируем степень, затем синус и, наконец, произведение на постоянную :

$y=2(\sin 5x)(\sin 5x)'=2\sin 5x\cos 5x\cdot(5x)'=2\sin 5x\cos 5x\cdot 5=5\sin 10x$.

Пример 8.7. Продифференцировать функцию $y = \ln^3 \mathrm{tg}(x^2+1)$.

Решение. Замечаем, что при вычислении частного значения функции y при фиксированном x последним действием является возведение в степень, причем, аргумент этого действия – логарифм. Значит, производную степени надо будет умножить на производную аргумента:

$$y' = 3\ln^2 \mathrm{tg}(x^2+1)(\ln \mathrm{tg}(x^2+1))'.$$

Теперь дифференцируем логарифм, его аргументом служит $\mathrm{tg}(x^2+1)$:

$$y' = 3\ln^2 \mathrm{tg}(x^2+1)\frac{1}{\mathrm{tg}(x^2+1)}(\mathrm{tg}(x^2+1))'.$$

Далее дифференцируем тангенс, аргумент которого есть (x^2+1):

$$y' = 3\ln^2 \mathrm{tg}(x^2+1)\frac{1}{\mathrm{tg}(x^2+1)}\frac{1}{\cos^2(x^2+1)}(x^2+1)'.$$

Окончательно получим, что

$$y' = 3\ln^2 \mathrm{tg}(x^2+1)\frac{1}{\mathrm{tg}(x^2+1)}\frac{1}{\cos^2(x^2+1)}2x.$$

8.1.9. Производная неявной функции.

В некоторых задачах встречается неявное задание функции в виде уравнения $f(x,y)=0$, не разрешенного относительно y. При дифференцировании таких функций будем считать x независимой переменной, а y – функцией от x. Значит, при нахождении производной членов, содержащих y, их дифференцируют по y, как промежуточному аргументу и результат умножают на производную аргумента по x. Затем из полученного уравнения, в которое y' входит линейным образом, находят y'.

Пример 8.8. Найти производную неявной функции $xy = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$

Решение. Дифференцируем левую и правую части уравнения, считая, что y есть функция x:

$$(xy)' = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)'; \quad y + xy' = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'}{1 + \frac{x^2}{y^2}};$$

$$y + xy' = \frac{\frac{y - xy'}{y^2}}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}; \quad y + xy' = \frac{y - xy'}{y^2 + x^2}.$$

Теперь из полученного равенства находим y':

$$y(y^2 + x^2) + x(y^2 + x^2)y' = y - xy'; \; x(x^2 + y^2 + 1)y' = y(1 - x^2 - y^2);$$

$$y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2 + 1)}; \qquad y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2 + 1)}.$$

8.2. Дифференциал

Следующим важным понятием в дифференциальном исчислении является понятие дифференциала, имеющее большое значение для анализа и его приложений.

8.2.1. Понятие дифференциала функции в точке. Геометрический смысл дифференциала.

В настоящее время дифференциал чаще всего рассматривают как вторичное понятие, тесно связанное и определяемое через понятие производной.

Определение 8.8. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_o)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (8.10)$$

где $A(x_0)$ не зависит от Δx, $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Линейная относительно Δx часть $A(x_0)\Delta x$ приращения функции Δy

в точке x_0 называется *дифференциалом* функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy.

Если приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ обозначить через dx и назвать *дифференциалом независимой переменной* x, то дифференциал запишется в виде $dy = A(x_0)dx$.

Теорема 8.6. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(x_0)$, при этом $A(x_0) = f'(x_0)$ и

$$dy = f'(x_0)dx \qquad (8.11)$$

Замечание. Разделив обе части выражения (8.11) на dx, получается обозначение для производной

$$y' = \frac{dy}{dx}. \qquad (8.12)$$

До сих пор обозначение $\frac{dy}{dx}$ имело символический характер; сейчас это выражение можно рассматривать как дробь с числителем dy и знаменателем dx (отношение дифференциалов).

Формула (8.11) позволяет находить дифференциалы функций, если известны их производные и выписать по таблице производных таблицу дифференциалов. Так, например, $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ и т.д.

Геометрический смысл значения дифференциала в точке x_0 – это приращение ординаты касательной в этой точке при переходе к точке $x_0 + \Delta x$. На рис. 8.2. дифференциал равен отрезку AB.

Замечание. Если сопоставить определения производной и дифференциала, то можно заключить, что производная характеризует скорость изменения функции в рассматриваемой точке, а дифференциал доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки. Строение дифференциала теоретически проще и практически удобнее, чем строение приращения функции — дифференциал dy есть *линейная* функция, определенная на смещениях Δx от рассматриваемой точки. Этот факт удобно использовать для вычисления приближенных значений функций.

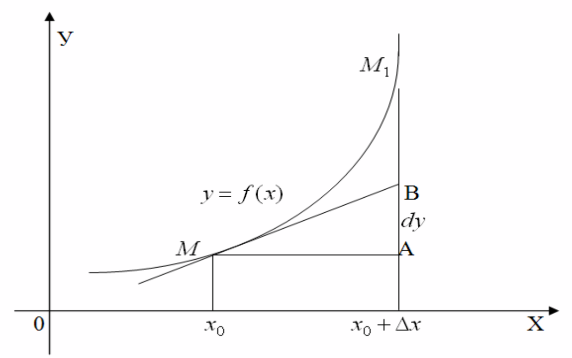


Рис.8.2

Если предположить, что функция $y = f(x)$ является сложной функцией, т.е. $x = g(t)$, и, следовательно, $y = f(g(t)) \equiv g(t)$, то производная (8.12) примет вид $y'_t = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = y'_x \cdot x'_t$ и тогда выражение для дифференциала (8.11) перепишется в виде $dy = y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx$, так как $dx = x'_t \cdot dt$.

Такое свойство дифференциала – равенство дифференциала произведению производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной (независимо от того, является ли эта переменная независимой или, в свою очередь, функцией другой независимой переменной) – называется ***инвариантностью формы*** первого дифференциала относительно выбора переменных.

8.2.2. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Из равенств (8.10) и (8.11) следует, что $\Delta y - dy = \alpha(\Delta x)\Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx. Значит, справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или, в подробной записи,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (8.13)$$

Это равенство часто используется при приближенных расчетах. Для вычисления значения функции в точке $x = x_0 + \Delta x$ берут в некоторой достаточно малой ее окрестности такую точку x_0, чтобы $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ вычислялись легко.

Пример 8.7. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ при $x=0{,}15$.

Решение. $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, $\quad x_0=0, \quad f(x_0)=\sqrt[5]{1}=1, \quad x_0+\Delta x=0{,}15$, $\Delta x=0{,}15.$

Найдем $y=f'(x)$. Здесь удобнее воспользоваться методом логарифмического дифференцирования. Имеем:

$$\ln y=\frac{1}{5}(\ln(2-x)-\ln(2+x)); \quad \frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{2+x}\right)=-\frac{4}{5(4-x^2)}.$$

Откуда $y'=-\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}\cdot\dfrac{4}{5(4-x^2)}$ и $f'(x_0)=-\sqrt[5]{1}\cdot\dfrac{4}{5\cdot 4}=-\dfrac{1}{5}.$

Тогда из (8.13) имеем: $\sqrt[5]{\dfrac{2-0{,}15}{2+0{,}15}}\approx 1-\dfrac{1}{5}0{,}15=0{,}97$

Заметим, что вычисление, например, с помощью четырехзначных таблиц Брадиса дает результат 0,9703.

8.2.3. Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение 8.9. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a,b), так что сама производная $f'(x)$ представляет собой новую функцию от x, которая в свою очередь имеет производную в некоторой точке $x_0\in(a,b)$. Производная функции $y=f'(x)$ в точке x_0 называется производной второго порядка (второй производной) функции $f(x)$ и обозначается $f''(x_0)$.

Аналогично, если существует производная $(n-1)$-го порядка, то производная n-го порядка функции $y=f(x)$ в точке x_0 определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)}(x))'.$$

Определение 8.10. Функция называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если она имеет на этом промежутке непрерывные производные до порядка n включительно $(n=0,1,2,...)$.

Пример 8.8. Найти производную n–го порядка функции $y=\sin x$.

Решение. Имеем $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, далее производные повторяются в том же порядке.

Поскольку $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,
$y'' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}), \ldots,$ то $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 8.11. Значение дифференциала

$$d(dy) = d^2 y = f''(x_0)dx^2$$

называется **вторым дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0. Аналогично определению 8.10 вводится дифференциал n-го порядка $d^n y$ функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

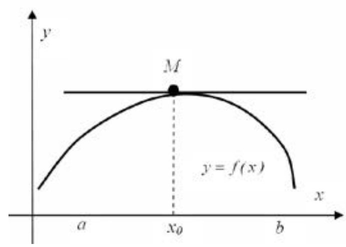
Дифференциалы высших порядков обладают свойствами:

1) $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$;
2) $d^n(cy) = cd^n y$;
3) $d^n(y_1 y_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} y_1 d^k y_2$, где $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ –

число сочетаний из n элементов по k элементов.

8.2.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема 8.7 (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a,b) и в точке $c \in (a,b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Если существует производная в этой точке $f'(c)$, то она необходимо равна нулю: $f'(c) = 0$.



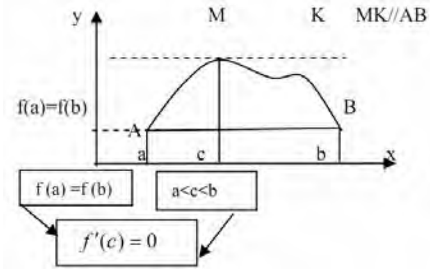
Геометрически – касательная к графику в точке локального экстремума параллельна оси *Ox,* так как $k_{\text{кас}} = f'(c) = 0$.

Теорема 8.8 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

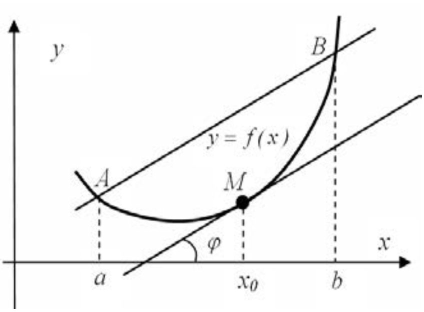
1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) имеет производную на интервале (a,b);

3) на концах интервала принимает равные значения: $f(a)=f(b)$.
Тогда существует точка $c\in(a,b)$, такая, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что на графике функции, удовлетворяющем условию теоремы, обязательно существует точка (по крайней мере, одна) в которой касательная к графику параллельна оси Ox.



Теорема 8.9 (Лагранжа). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a,b). Тогда существует такая точка $c\in(a,b)$, что



$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (8.14)$$

Если в равенстве (8.14) обозначить $\dfrac{c-a}{b-a}=\theta$, откуда $c=a+\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$ (ведь $a<c<b$), то (8.14) перепишется в виде

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a) \qquad (8.15)$$

Положим теперь $a=x$, $b-a=\Delta x$, $b=x+\Delta x$. Тогда $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x,\quad 0<\theta<1.$ (8.16)

Формула (8.16) называется *формулой конечных приращений* в отличие от приближенного равенства $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, которое называется формулой *бесконечно малых приращений*.

Теорема 8.10 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и имеют производные в каждой точке интервала (a,b), причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Тогда существует такая точка $c\in(a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (8.17)$$

Формула (8.17) называется *обобщенной формулой* конечных приращений Коши.

8.2.5. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Используем понятие производной для раскрытия неопределенностей.

Теорема 8.11. Пусть имеется частное двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a, b]$, имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в этом промежутке, за исключением быть может точки $x = a$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда, если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$, т.е. если частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ представляет неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (8.18)$$

Правило (8.18) применимо в тех случаях, когда предел отношения производных существует. Правило применимо и в тех случаях, когда $a = \infty$.

Раскрытие неопределенностей $\infty - \infty$, $0 - \infty$ и 0^0, ∞^0, 1^∞ тоже можно осуществлять с помощью правила Лопиталя, если только преобразовать выражения к виду $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований и логарифмирования.

Пример 8.9. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x})$

г) $\lim\limits_{x\to +0}\sin x \cdot \ln x$; д) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$; е) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$.

Решение.

а) Здесь имеем неопределенность $\frac{0}{0}$ (характер неопределенности указываем в квадратных скобках). Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}=[\ \frac{1-7+4+2}{1-5+4}=\frac{0}{0}\ ]=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-7x^2+4x+2)'}{(x^3-5x+4)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-14x+4}{3x^2-5}=\left[\frac{3-14+4}{3-5}\right]=\frac{7}{2};$$

б) Здесь имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\cdot$$

в) Здесь имеем неопределенность $\infty-\infty$. Приводя дроби к общему знаменателю, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя и получаем ответ. Таким образом:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\ln x})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1\cdot$$

г) Здесь имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Преобразуя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, применяя правило Лопиталя и затем теорему о пределе произведения, получим

$$\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{\sin x})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}tgx\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=-0\cdot 1=0\cdot$$

д) Здесь имеем неопределенность 0^0. Используем равенство $\lim\limits_{x\to x_0} y=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\ln y}$. Находим предел $\ln y$:

$$\lim_{x\to+0}\ln(x^{\frac{3}{1+\ln x}})=\lim_{x\to+0}\frac{3}{1+\ln x}\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{3\ln x}{1+\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Теперь можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\frac{3}{1+\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{(3\ln x)'}{(1+\ln x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{3\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=3$$. Значит, $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}=e^3.$

е) Здесь имеем неопределенность вида ∞^0. Находим предел $\ln y$:

$$\lim_{x\to+0}\ln((ctgx)^{\frac{1}{\ln x}})=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(ctgx)}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln(ctgx))'}{(\ln x)'}=$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}==-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\cos x\sin x}=-\lim_{x\to+0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}=-1\cdot 1=-1.$$

Тогда искомый предел равен $\lim\limits_{x\to+0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$

ж) Здесь имеем неопределенность 1^∞. Снова находим предел $\ln y$:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1-x}\ln(1+x^2)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x^2))'}{(e^x-1-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(1+x^2)'(e^x-1)+(1+x^2)(e^x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2x(e^x-1)+(1+x^2)e^x}=2\cdot$$

Тогда искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^2$.

Заметим, что **правило Лопиталя применимо только тогда, когда справедливы условия теоремы, т.е. когда существует предел отношения производных.** Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{1}=\frac{1+0}{1}=1\cdot$$

Правило Лопиталя здесь ответа не дает, ибо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ не существует.

8.3. Исследование функций с помощью производных

Ниже, кроме демонстрации аппарата дифференциального исчисления в действии, указываются общие приемы анализа качественного поведения функций, что зачастую требуется при конкретной работе. Прежде всего, будет установлен ряд важных теорем, которые эффективны при исследовании дифференцируемых функций, как в локальном, так и в глобальном смысле (т.е. как в окрестности отдельных точек области задания функций, так и на целых участках этой области).

8.3.1. Условия постоянства, возрастания и убывания функций.

Теорема 8.12. Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную при $x \in (a,b)$. Для того, чтобы эта функция сохраняла постоянное значение $f(x) \equiv const$ при $x \in (a,b)$, необходимо и достаточно выполнения условия $f'(x) \equiv 0$ при $x \in (a,b)$.

Теорема 8.13. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда если $f'(x) > 0$ на (a,b), то $f(x)$ строго возрастает на (a,b); если же $f'(x) < 0$,то $f(x)$ строго убывает на (a,b).

Пример 8.10. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln(x^2 + 2x + 5)$.

Решение. Функция определена при $x^2 + 2x + 5 > 0$, т.е. при $x \in (-\infty\,; +\infty)$.

Находим производную $y' = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}(2x + 2) = \dfrac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 5}$.

Поскольку знаменатель дроби $x^2 + 2x + 5$ всегда положителен, то знак производной совпадает со знаком числителя :

$y' > 0,$ если $2(x+1) > 0$, т.е. $x > -1$;

$y' < 0,$ если $2(x+1) < 0$, т.е. $x < -1$.

Значит, функция возрастает на промежутке $(-1, \infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty, -1)$.

8.3.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

Определение 8.12. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0)$ $(f(x_0 + \Delta x) \ge f(x_0))$. Если существует такое $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta x| \ne 0$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0))$, то точка x_0 называется *точкой строгого максимума (минимума).* Точки максимума и минимума называются *точками экстремума.*

Теорема 8.14 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо производная $f'(x_0)$ обращается в нуль, либо не существует.

Простые примеры показывают, что эти необходимые условия экстремума не являются достаточными

Теорема 8.15 (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in (a,b)$, за исключением может быть самой точки x_0, в которой она является непрерывной. Тогда:

а) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка строгого максимума;

б) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка строгого минимума;

в) если $f'(x)$ в окрестности точки x_0 не меняет знак, то экстремума нет.

Коротко можно сказать, что если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка строгого максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 – точка строго минимума. Заметим сразу же, что эти условия, являясь достаточными, не являются необходимыми для экстремума. Иногда вызывает затруднение исследование знака первой производной в окрестности заданной точки.

В ряде случаев бывает удобным применить при изучении точек экстремума следующую теорему.

Теорема 8.16 (второе достаточное условие экстремума). Пусть в точке x_0 для функции $f(x)$ выполняются условия:

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум; если $f''(x_0)<0$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум.

Пример 8.11. Найти точки экстремума функции $y=x^3-6x^2+9x-5$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Находим производную: $y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$. Приравниваем производную к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1,\ x_2=3$. Получили две точки, подозрительные на экстремум (критические точки). Для удобства исследования знака первой производной, запишем ее в следующем виде $y'=3(x-1)(x-3)$. Применим теперь первое достаточное условие экстремума, для чего составим таблицу, в первой строке которой указываем промежутки, на которые разбивают область определения функции критические точки, во второй строке – знаки производной на соответствующем промежутке, в третьей строке – вывод о возрастании (убывании) функции и о наличии экстремума. Таким образом, данная функция имеет два экстремума: максимум $y_{\max}=y(1)=-1$ в точке $x=1$ и минимум $y_{\min}=y(3)=-5$ в точке $x=3$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	—	0	+
y	возрастает ↗	max $y=-1$	убывает ↘	min $y=-5$	возрастает ↗

Пример 8.12. Исследовать функцию $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$ на экстремум.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Находим производную:

$$y'=(3x^{2/3}-x^2)'=3\cdot\frac{2}{3}x^{2/3-1}-2x=2x^{-1/3}-2x=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2x.$$

Приравниваем производную к нулю: $y'=0\Leftrightarrow 2(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x)=0,$

$$\frac{1-x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=0\Leftrightarrow x\sqrt[3]{x}=1,\ x\neq 0 \text{ или } x^4=1,\ x=\pm 1.$$

Получим критические точки $x_1=-1,\ x_2=1$. Далее находим те точки из области определения функции, где производная обращается в бесконечность. Для чего приравняем знаменатель производной к нулю: $\sqrt[3]{x}=0,\Leftrightarrow x=0$ — третья критическая точка. Применяя первое достаточное условие экстремума, составим таблицу:

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	-	∞	+	0	-
y	возрастает ↗	max $y=2$	убывает ↘	min $y=0$	возрастает ↗	max $y=2$	убывает ↘

Таким образом, функция имеет два максимума $y(-1)=2$, $y(1)=2$ и минимум $y(0)=0$.

8.3.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$, следует найти точки из $[a,b]$, в которых производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует. Затем из этих точек определяем все максимумы (минимумы) и вычисляем значения функции на концах отрезка $[a,b]$. Сравнивая между собой по величине значения функции в полученных точках и значения $f(a), f(b)$, находим наибольшее (наименьшее) из них. Оно и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на заданном отрезке.

Пример 8.13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[-1,4]$.

Решение: Находим производную функции: $y'=3x^2-6x$. Она существует во всех точках отрезка. Найдем критические точки, решая уравнение $3x^2-6x=0$, откуда $x_1=0, x_2=2$. Составим таблицу значений функции в критических точках и на концах отрезка:

x	-1	0	2	4
$f(x)$	-3	1	-3	17

Тогда $y_{наиб}=y(4)=17$; $y_{наим}=y(-1)=y(2)=-3$.

8.3.4. Выпуклость и вогнутость графика функции.

Определение 8.13. График функции называется *выпуклым* (или говорят еще *выпуклым вверх*) на отрезке $[a,b]$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом отрезке (рис. 8.3).

В этом случае выполняется неравенство $N_1M = \Delta\, y - dy < 0$.

Определение 8.14. График функции называется *вогнутым* (говорят еще *выпуклым вниз*) на отрезке $[a,b]$, если он расположен выше любой своей касательной на этом отрезке (рис.8.4). В этом случае $M_1N = \Delta\, y - dy > 0$.

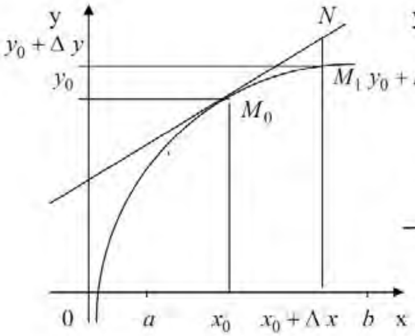


Рис. 8.3

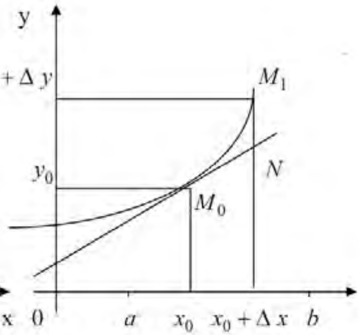


Рис. 8.4

Определение 8.15. Точки графика, в которых выпуклость меняется на вогнутость, называются *точками перегиба*.

Теорема 8.17. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b). Тогда, если $f''(x) < 0$ на (a,b), то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале, а если $f''(x) > 0$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ вогнута на этом интервале.

Теорема 8.18. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a,b) и точка x_0 из этого интервала является точкой перегиба, то выполняется неравенство $f''(x) = 0$.

Теорема 8.19. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть самой точки x_0, в которой функция $f(x)$ непрерывна, то, если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0, то точка x_0 является точкой перегиба функции.

Определение 8.16. Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками по второй производной.

Пример 8.13. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Решение. Найдем
$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x$, $y'' = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1)$.

Решаем уравнение: $y'' = 0$, $3x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Значит, имеем $y'' = 12 \cdot 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$. Так как $y'' > 0$, если $x \in (-\infty; +\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$, то на интервалах $(-\infty; +\frac{1}{3})$ и $(1; +\infty)$ функция вогнута; так как $y'' < 0$, если $x \in (\frac{1}{3}; 1)$, то на $(\frac{1}{3}; 1)$ функция выпукла. Точки $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ являются абсциссами точек перегиба.

8.3.5. Асимптоты графика функции.

Определение 8.17. Прямая L называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние между точками кривой и прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки от начала координат, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика $y = f(x)$.

Теорема 8.20. Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) \qquad (8.19)$$

Определение 8.18. Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной.*

Определение 8.19. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (может быть односторонней) и пусть хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to x_0\pm\infty} f(x) = \infty \qquad (8.20)$$

Тогда прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* функции $y = f(x)$.

Пример 8.14. Найти асимптоты функции $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Решение. Воспользуемся формулами (8.19), (8.20):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3-x^2}}=$$

$$\begin{bmatrix}\textit{числитель и знаменатель дроби}\\ \textit{в подкоренном выражении разделим на } x^3\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1,$$

так $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Так как $k=1$, то

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x-2)}}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x^3}{x-2}-x^2\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2}{(x-2)\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}+x\right)}=\begin{bmatrix}\textit{числитель и знаменатель}\\ \textit{дроби разделим на } x^2\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3-2x^2}}+1\right)}=1.$$

Итак, прямая $y=x+1$ является правосторонней наклонной асимптотой. Аналогично убеждаемся, что прямая $y=-x-1$ является левосторонней наклонной асимптотой. Поскольку при $x\to 2+0$ имеем $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=+\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

8.3.6. Общая схема исследования функций и построения графиков. Для исследования функции и построение ее графика с помощью производной можно рекомендовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Установить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
3. Установить, является ли функция периодической.
4. Исследовать функцию на непрерывность и установить характер точек разрыва, найти вертикальные асимптоты.
5. Найти точки пересечения с осями координат и установить промежутки знакопостоянства.
6. Вычислить первую производную, найти точки, где она равна нулю или не существует (критические точки по первой производной), разбить область определения этими точками и определить участки возрастания, убывания и точки экстремума.
7. Вычислить вторую производную, найти точки, где она равна нулю или не существует (критические точки по второй производной) и определить точки выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.
8. Найти наклонные и горизонтальные асимптоты и начертить график, при необходимости вычислить несколько дополнительных точек графика.

Пример 8.15. Построить график функции $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Решение.

1) Находим область определения функции:

$x-2\neq 0, \quad x\neq 2 \Rightarrow D(y)=(-\infty\,;2)\cup(2\,;+\infty)$.

2-3) Так как область определения несимметрична относительно начала координат, то функция свойством четности и нечетности, а также периодичности, не обладает.

4) Во всех точках области определения функция непрерывна, как элементарная функция. Так как $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2}{x-2}=\left[\dfrac{4}{-0}\right]=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2}{x-2}=\left[\dfrac{4}{+0}\right]=+\infty$, то $x=2$ является точкой разрыва второго рода. Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика.

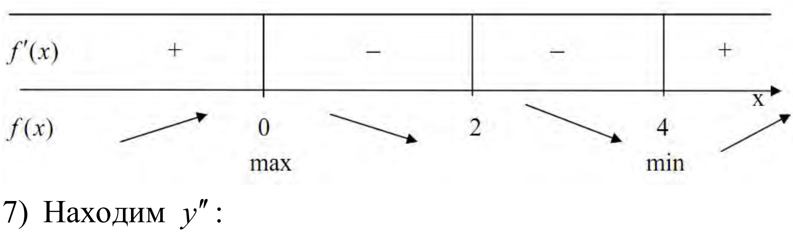
5) Находим точки пересечения с осями координат: если $x = 0$, то $y = 0$; если $y = 0$, то $\dfrac{x^2}{x-2} = 0$. Откуда получаем $x = 0$. Значит, график проходит через начало координат и $y > 0$, если $x > 2$; $y < 0$, если $x \in (-\infty\,;0) \cup (0\,;2)$.

6) Находим первую производную

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{(x^2)'(x-2) - x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} =$$

$\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Решая уравнение $y' = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, находим критические точки по первой производной: $x = 0$ и $x = 4$.

В окрестности точки $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус. Это означает, что $x = 0$ — абсцисса точки максимума. Тогда $y(0) = \dfrac{0^2}{0-2} = 0$, и следовательно $M_1(0,0)$ – точка максимума. В окрестности точки $x = 4$ производная меняет знак минуса на плюс, значит $x = -4$ – абсцисса точки минимума, $y(4) = \dfrac{16}{4-2} = 8$, $M_2(4,8)$ – точка минимума. Таким образом, на интервалах $(-\infty\,;0)$ и на $(4\,;+\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(0\,;2)$ и $(2\,;4)$ — убывает.



7) Находим y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(x^2-4x)'(x-2)^2 - (x^2-4x)((x-2)^2)'}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Так как $y'' > 0$ при $x > 2$, то на интервале $(2;+\infty)$ график вогнутый; так как $y'' < 0$ при $x < 2$, то на интервале $(-\infty;2)$ график выпуклый.

8) Находим асимптоты графика:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2$$

Таким образом, график имеет наклонную асимптоту $y = x + 2$. Строим график, который имеет в нашем случае вид (см. рис. 8.5).

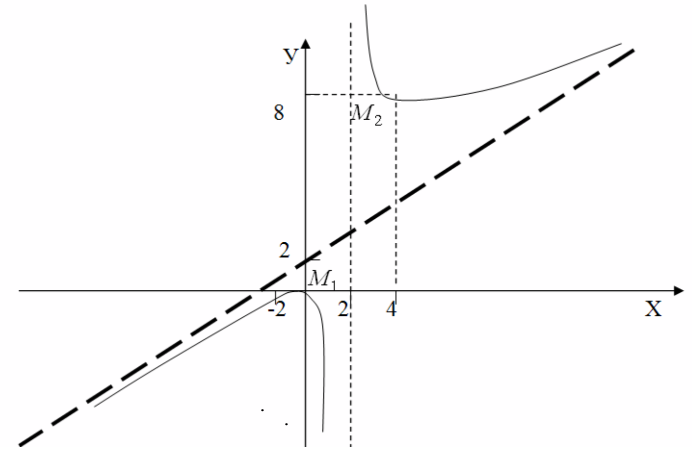


Рис. 8.5.

Вопросы для повторения и тренировочные задания

Во второй части пособия дается краткий перечень вопросов, обязательных для повторения основных теоретических положений по каждому разделу, которые помогают усвоить необходимый материал. Приведенные после этого тренировочные задания стимулируют закрепление навыков оперирования соответствующим математическим аппаратом и более глубокое понимание основных понятий линейной алгебры и математического анализа.

1. Многомерное арифметическое пространство

1. Что называется связанным вектором и как он обозначается?
2. Что называется длиной или модулем связанного вектора?
3. Какие ненулевые векторы называются сонаправленными; противоположно направленными; эквивалентными?
4. Дайте определение свободного вектора или просто вектора.
5. Какие векторы называются коллинеарными; ортогональными?
6. Дайте определение n-мерного вектора и его координат.
7. Приведите пример n-мерного вектора, используемого в экономике.
8. Какие два n-мерных вектора называются равными?
9. Что называется суммой двух векторов $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$?
10. Что называется произведением вектора $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на число λ?
11. Перечислите свойства линейных операций над n-мерными векторами.
12. Дайте определение n-мерного арифметического векторного пространства.
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие коллинеарности n-мерных векторов, заданных координатами.
14. Как вычисляется скалярное произведение n-мерных векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$?
15. Запишите формулу для вычисления модуля (длины) n-мерного вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

16. Запишите формулу для определения угла между n-мерными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
17. Запишите формулу для нахождения расстояния между точками $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ n-мерного пространства.
18. Перечислите свойства скалярного произведения.
19. Дайте определение евклидова пространства.

Тренировочное задание 1

1. Найти вектор $\bar{\mathbf{a}}$, коллинеарный вектору $\bar{\mathbf{x}} = \{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение векторов $\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{a}} = 27$.

2. Вычислить проекцию вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на направление вектора $\overline{\mathbf{b}+\mathbf{c}}$, если $\bar{\mathbf{a}} = \{1,-3,4\}, \bar{\mathbf{b}} = \{3,-4,2\}, \bar{\mathbf{c}} = \{-1,1,4\}$.

3. Дан треугольник ABD с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$, $D(1,2,-1)$. Найти его площадь и длину высоты, проведенную из вершины А.

4. Даны векторы $\bar{\mathbf{a}} = (1; -1; 3; 2)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (2; 2; 1; -1)$. Найдите скалярное произведение этих векторов, их длины и угол между ними.

5. Даны точки А(–2; 1; 3), В(0; –1; 2), С(3; –2; 1). Найдите: а) длину отрезка АВ; б) косинус угла В в треугольнике АВС;
в) $\text{пр}_{(2\overline{\text{BC}}-2\overline{\text{AC}})}\overline{AB}$; г) орт $\overline{AB}^0$ и направляющие косинусы $\overline{AB}$.

6. Дан вектор $\bar{\mathbf{a}} = (3; 0; -1; 3; 2)$ евклидова пространства. Подберите ненулевой вектор $\bar{\mathbf{b}}$, ортогональный вектору $\bar{\mathbf{a}}$.

7. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D, если ее вершины $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$.

8. Показать, что точки $A(1,2,1), B(3,3,3), C(4,1,2)$ и $D(5,4,5)$ лежат в одной плоскости.

Решение тренировочного задания 1

1. Запишем условие коллинеарности двух векторов $\bar{\mathbf{a}} = \lambda\,\bar{\mathbf{x}}$ и полученный вектор $\bar{\mathbf{a}}$ подставим в условие $\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{a}} = 27$;
$\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{x}} \cdot \lambda = 27, \lambda \cdot |\bar{\mathbf{x}}|^2 = 27, \lambda \cdot \left|2^2 + 1^2 + (-2)^2\right| = 27, 9\lambda = 27, \lambda = 3.$
Следовательно $\bar{\mathbf{a}} = 3 \cdot \bar{\mathbf{x}} = \{6,3,-6\}$.

2. Обозначим $\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{d}}$, тогда $\bar{\mathbf{d}} = \{2,-3,6\}$

$$\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{d}}=|\overline{\mathbf{a}}|\cdot|\overline{\mathbf{d}}|\cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{d}}}\right)=|\overline{\mathbf{d}}|\cdot \text{пр}_{\overline{\mathbf{d}}}\overline{\mathbf{a}}\text{, отсюда}$$

$$\text{пр}_{\overline{\mathbf{d}}}\overline{\mathbf{a}}=\frac{\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{d}}}{|\overline{\mathbf{d}}|};\ \text{пр}_{\overline{\mathbf{d}}}\overline{\mathbf{a}}=\frac{1\cdot 2+(-3)\sqrt{(-3)+4\cdot 6}}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{35}{7}=5.$$

3. Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю их векторного произведения. Напомним, что векторное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{a}}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\overline{\mathbf{b}}=\{x_2,y_2,z_2\}$ равно:

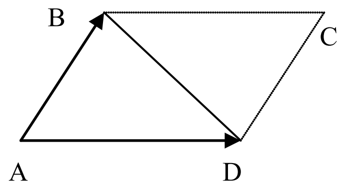
$$\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x\cdot\overline{\mathbf{i}}+y\cdot\overline{\mathbf{j}}+z\cdot\overline{\mathbf{k}},$$

где $x=y_1z_2-y_2z_1$; $y=x_2z_1-x_1z_2$; $z=x_1y_2-x_2y_1$.

Построим параллелограмм $ABCD$ на векторах AB и AD:

$\overline{\mathbf{AB}}=\{1,-1,0\}$; $\overline{\mathbf{AD}}=\{0,1,-2\}$.

$$\overline{\mathbf{AB}}\times\overline{\mathbf{AC}}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\overline{\mathbf{i}}+2\overline{\mathbf{j}}+\overline{\mathbf{k}}$$



$$S_{ABCD}=\left|\overline{\mathbf{AB}}\times\overline{\mathbf{AC}}\right|=\sqrt{4+4+1}=3\ \text{(ккв.ед.}$$

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}=\frac{3}{2}\ \text{(ккв.ед.}$$

Найдем высоту, проведенную из вершины А:

$\mathrm{h}_{\mathrm{A}}=2S_{ABD}\big/\left|\overline{\mathrm{BD}}\right|$; $\overline{BD}\{-1;2;-2\}$, $\left|\overline{\mathbf{BD}}\right|=3$; $\mathrm{h}_{\mathrm{A}}=2\cdot\dfrac{3}{2}:3=1$.

4. Скалярное произведение n-мерных векторов $\overline{\mathbf{a}}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $\overline{\mathbf{b}}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ находим по формуле $\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

Если $\overline{\mathbf{a}}$ = (1; - 1; 3; 2), $\overline{\mathbf{b}}$ = (2; 2; 1; - 4), то

$$\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}}=1\cdot 2+(-1)\cdot 2+3\cdot 1+\ +2\cdot(-1)=2-2+3-2=1.$$

Длину n-мерного вектора $\overline{\mathbf{a}}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ вычисляем по формуле $|\overline{\mathbf{a}}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$.

Тогда $\left|\mathbf{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+9+4} = \sqrt{15}$;

$$\left|\mathbf{b}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1+1} = \sqrt{10}.$$

Угол между n-мерными векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ находим по формуле:

$$\cos\phi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}\ .$$

Тогда в нашем случае

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{6}}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{6}}\right).$$

5. **а)** Расстояние между точками A и B

$$\rho(A, B) = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

б) угол B в треугольнике ABC есть угол между векторами $\overline{\mathbf{BA}}$ и $\overline{\mathbf{BC}}$. Имеем $\overline{\mathbf{BA}}\{-2;\,2;\,1\}$, $\overline{\mathbf{BC}}\{3;\,-1;\,-1\}$,

$$\left|\overline{\mathbf{BA}}\right| = 3,\ \left|\overline{\mathbf{BC}}\right| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11},$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{\mathbf{BA}}\cdot\overline{\mathbf{BC}}}{\left|\overline{\mathbf{BA}}\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{BC}}\right|} = \frac{-2\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-1)}{3\cdot\sqrt{11}} = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}};$$

в) $\overline{\mathbf{AB}}\{2;\,-2;\,-1\}$, $\overline{\mathbf{BC}}\{3;\,-1;\,-1\}$, $\overline{\mathbf{AC}}\{5;\,-3;\,-2\}$,

$$2\overline{\mathbf{BC}} - 3\overline{\mathbf{AC}} = 2(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) - 3(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

отсюда находим

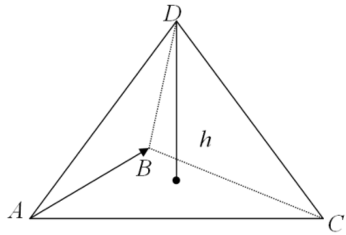
$$\text{пр}_{(2\overline{\mathbf{BC}}\text{-}3\overline{\mathbf{AC}})}\overline{\mathbf{AB}} = \frac{\overline{\mathbf{AB}}\cdot\left(2\overline{\mathbf{BC}} - 3\overline{\mathbf{AC}}\right)}{\left|2\overline{\mathbf{BC}} - 3\overline{\mathbf{AC}}\right|} = \frac{-18-14-4}{\sqrt{81+49+16}} = -\frac{36}{\sqrt{146}};$$

г) $$\overline{\mathbf{AB}}^0 = \frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|} = \frac{1}{3}\{2;\,-2;\,-1\} = \left\{\frac{2}{3};\,-\frac{2}{3};\,-\frac{1}{3}\right\}.$$

Направляющими косинусами вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ являются 2/3, –2/3, –1/3.

6. Так как условие ортогональности векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеет вид $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0$, то координаты вектора $\bar{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ удовлетворяют уравнению $3 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 - 1 \cdot b_3 + 8 \cdot b_4 + 2 \cdot b_5 = 0$. Одним из решений этого уравнения является, например, $b_1 = 1,\ b_2 = 5,\ b_3 = 3,\ b_4 = 0,\ b_5 = 0$, т.е. вектор $\bar{\mathbf{b}} = (1; 5; 3; 0; 0)$. Понятно, что существует бесчисленное множество векторов, ортогональных вектору $\bar{\mathbf{a}}$ = (3; 0; -1; 3; 2).

7. Найдем векторы: $\overline{\mathbf{AB}} = \{2,-2,-3\}$; $\overline{\mathbf{AC}} = \{4,0,6\}$; $\overline{\mathbf{AD}} = \{-7,-7,7\}$.



Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{AC}}$ и $\overline{\mathbf{AD}}$, равен одной шестой модуля смешанного произведения этих векторов.

$V = \frac{1}{6}\left|\overline{\mathbf{AB}} \cdot \overline{\mathbf{AC}} \cdot \overline{\mathbf{AD}}\right|$ или $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$, где h – высота пирамиды, а площадь прямоугольника, построенного на векторах $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{AC}}$ равна половине их векторного произведения: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{\mathbf{AB}} \times \overline{\mathbf{AC}}\right|$.

Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overline{\mathbf{AB}} \cdot \overline{\mathbf{AC}} \cdot \overline{\mathbf{AD}} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

Отсюда V пирамиды $= \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}$.

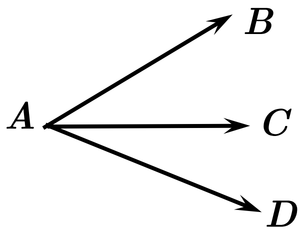
Вычислим векторное произведение векторов:

$$\overline{\mathbf{AB}} \times \overline{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{\mathbf{i}} + 24\bar{\mathbf{j}} + 8\bar{\mathbf{k}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{28}{2} = 14.$$

Найдем высоту пирамиды: $h = \dfrac{3 \cdot V}{S_{ABC}} = \dfrac{3 \cdot 154}{3 \cdot 14} = 11; \quad h = 11.$

8. Точки ***A, B, C*** и ***D*** лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{\mathbf{AB}}(2,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}(3,-1,1)$ и $\overrightarrow{\mathbf{AD}}(4,2,4)$ лежат в одной плоскости. Убедимся, что смешанное произведение этих векторов равно нулю. Действительно,



$$(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\ \overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AD}}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

т.к. первая и третья строки определителя пропорциональны.

2. Системы векторов

1. В каком случае вектор $\overline{\mathbf{b}}$ называется линейной комбинацией m векторов n-мерного пространства $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_m$ с коэффициентами линейной комбинации $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$? Приведите пример.
2. Какая система m векторов n-мерного пространства называется линейно зависимой; линейно независимой?
3. Запомните следующие простейшие свойства линейной зависимости (с их доказательством можно ознакомиться в учебнике):
   а) если среди векторов системы есть нулевой, то она линейно зависима;
   б) если r векторов системы из m векторов $(r < m)$ линейно зависимы, то и вся система линейно зависима;
   в) любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой;
   г) для того, чтобы система $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_m$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов линейно выражался через остальные;
   д) диагональная система векторов линейно независима;
   е) система единичных векторов n-мерного пространства линейно независима;

ж) любой вектор n-мерного пространства является комбинацией единичных векторов этого пространства.

4. Дайте определение базиса (максимальной линейно-независимой подсистемы) данной системы векторов.
5. Могут ли два различных базиса одной и той же системы содержать разное количество векторов?
6. Что называется рангом системы векторов?
7. Что называется базисом n-мерного векторного пространства?
8. Сформулируйте теорему о разложении любого вектора $\overline{\mathbf{a}}$ n-мерного векторного пространства по векторам базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$ и единственности такого разложения.
9. Что называется координатами вектора $\overline{\mathbf{a}}$ в данном базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$?
10. Какие две системы n-мерных векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_m$ и $\overline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{b}}_e$ называются эквивалентными?
11. Совпадают ли ранги эквивалентных систем векторов?
12. Какие преобразования системы векторов называются эквивалентными?
13. Запомните следующие преобразования системы векторов, которые являются эквивалентными:
    а) изменение нумерации векторов;
    б) удаление нулевого вектора;
    в) удаление линейной комбинации векторов;
    г) умножение произвольного вектора системы на число $\alpha \neq 0$;
    д) прибавление к одному из векторов системы линейной комбинации остальных векторов системы.
14. Какая система n векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$ n-мерного евклидова пространства называется ортогональной?
15. Образует ли ортогональная система из n векторов базис n-мерного пространства?
16. Сформулируйте определение ортогонального и ортонормированного базиса евклидового пространства.

Тренировочное задание 2

1. Составьте линейную комбинацию векторов $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (3; 1; 0; 2), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$(4; 0;2;3), $\overline{\mathbf{a}}_3 =$ (0; 1; 0; 2), $\overline{\mathbf{a}}_4 =$ (10; 1; 2; 5) с коэффициентами $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -4$. Являются ли векторы системы $\overline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{a}}_2$, $\overline{\mathbf{a}}_3$, $\overline{\mathbf{a}}_4$ линейно зависимыми?
2. Являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми и почему?

   а) $\overline{\mathbf{a}}_1 = (1; 2; 3; 0)$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = (0; 0; 0; 0)$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = (-1; 5; 8; 7)$, $\overline{\mathbf{a}}_4 = (1; 1; -1; -1)$?

   б) $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (2; 1; 3; 4), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$ (-4; -2; -6; -8), $\overline{\mathbf{a}}_3 =$ (5; 1; 7; 2)?

   в) $\overline{\mathbf{a}}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = (1; 1; 0; 1)$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = (2; 3; 3; 5)$, $\overline{\mathbf{a}}_4 = (10; 11; 31; 25)$?

   г) $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (1; 2; -3; -4), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$ (0; 1; 3; -5), $\overline{\mathbf{a}}_3 =$ (0; 0; 4; 7)?

   д) $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (1; 0; 0), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$ (0; 1; 0), $\overline{\mathbf{a}}_3 =$ (0; 0; 1)?
3. Дана система векторов $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (1; 0), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$ (1; 2) двумерного пространства. Разложите вектор $\overline{\mathbf{a}} =$ (3; 4) по векторам $\overline{\mathbf{a}}_1$ и $\overline{\mathbf{a}}_2$.
4. Приведите пример ортогонального базиса двумерного евклидова пространства.
5. Докажите, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1 =$ (1; 2; 5), $\overline{\mathbf{a}}_2 =$ (0; 3; 5), $\overline{\mathbf{a}}_3 =$ (0; 1; 2) являются линейно независимыми.
6. Найти разложение вектора $\overline{\mathbf{a}}\{1; 4; 6\}$ в базисе $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}\{-2; 1; 3\}$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}\{1; 2; -1\}$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}}\{4; 0; 1\}$.
7. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{b}} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение тренировочного задания 2

1. Линейной комбинацией векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называется вектор $\overline{\mathbf{a}} = \lambda_1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \lambda_m \cdot \overline{\mathbf{a}}_m$. В нашем случае

   $\overline{\mathbf{a}} = 2 \cdot \overline{\mathbf{a}}_1 + 1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_2 - 1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_3 - 1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_4 = 2 \cdot (3;1;0;2) + (4;0;2;3) -$

   $-(0;1;0;2) - (10;1;2;5) = (0;0;0;0) = \overline{\mathbf{0}}$. Векторы $\overline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{a}}_2$, $\overline{\mathbf{a}}_3$, $\overline{\mathbf{a}}_4$ являются линейно зависимыми, так как существует ненулевая линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

2. **а)** да, так как система $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ содержит нулевой вектор;

б) да, так как векторы $\overline{\mathbf{a}}_1$ и $\overline{\mathbf{a}}_2$ коллинеарны: $\overline{\mathbf{a}}_2 = -2\cdot\overline{\mathbf{a}}_1$, значит, система векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ содержит линейно зависимую подсистему $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2$;

в) да, так как $\overline{\mathbf{a}}_3 = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2$, то $\overline{\mathbf{a}}_3 = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + 0\cdot\overline{\mathbf{a}}_4$, вектор $\overline{\mathbf{a}}_3$ линейно выражается через остальные;

г) нет, данная система векторов линейно независима, так как является диагональной;

д) нет, так как данная система векторов является системой единичных векторов трехмерного пространства и поэтому линейно независима.

3. Разложить вектор $\overline{\mathbf{a}}$ по векторам $\overline{\mathbf{a}}_1$ и $\overline{\mathbf{a}}_2$ означает найти такие числа λ_1 и λ_2, для которых $\overline{\mathbf{a}} = \lambda_1\cdot\overline{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\cdot\overline{\mathbf{a}}_2$. Подставляя вместо $\overline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{a}}_2$ и $\overline{\mathbf{a}}_3$ данные векторы, получим:
$\lambda_1(1;0)+\lambda_2(1;2)=(3;4)$ или $(\lambda_1+\lambda_2; 0\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2)=(3;4)$. Из условия равенства векторов получим $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=3,\\ 0\cdot\lambda_1+2\lambda_2=4,\end{cases}$

тогда $\lambda_2=2, \lambda_1=1$.

Ответ: $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}_1 + 2\cdot\overline{\mathbf{a}}_2$.

4. Пусть $\overline{\mathbf{a}}_1$ = (2; 0); $\overline{\mathbf{a}}_2$ = (0; 3). Так как скалярное произведение $\overline{\mathbf{a}}_1\cdot\overline{\mathbf{a}}_2=(2;0)\cdot(0;3)=2\cdot0+0\cdot3=0$, то векторы $\overline{\mathbf{a}}_1$ и $\overline{\mathbf{a}}_2$ ортогональны и поэтому являются базисом двумерного пространства.

5. Предположим, что векторы векторов $\overline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{a}}_2$, $\overline{\mathbf{a}}_3$ линейно зависимые, т.е. существуют такие числа λ_1, λ_2, λ_3, не все равные нулю, что $\lambda_1\overline{\mathbf{a}}_1+\lambda_2\overline{\mathbf{a}}_2+\lambda_3\overline{\mathbf{a}}_3=\overline{\mathbf{0}}$. Тогда $\lambda_1(1;3;5)+\lambda_2(0;3;5)+\lambda_3(0;1;2)=(0;0;0)$ или $(\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3; 3\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3; 5\lambda_1+5\lambda_2+2\lambda_3)=(0;0;0)$. Из условия равенства векторов получим

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0\,, \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \\ 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\,, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1 = 0$ – из первого уравнения, а два других примут вид

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

$$\begin{cases} \lambda_3 = -3\lambda_2\,, \\ 5\lambda_2 + 2(-3\lambda_2) = 0\,; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_3 = -3\lambda_2\,, \\ -\lambda_2 = 0\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0\,, \\ \lambda_2 = 0\,. \end{cases}$$

Так как получили, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то векторы $\bar{\mathbf{a}}_1$, $\bar{\mathbf{a}}_2$, $\bar{\mathbf{a}}_3$ линейно независимы.

6. Векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ образуют базис, так как

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 0 - 24 - 0 - 1 = -33 \neq 0\,.$$

Координаты X, Y, Z вектора $\bar{\mathbf{a}}\{1;\,4;\,6\}$ в этом базисе должны удовлетворять равенству $\mathrm{X}\bar{\mathbf{e}}_1 + \mathrm{Y}\bar{\mathbf{e}}_2 + \mathrm{Z}\bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{a}}$, или в матричной записи

$$X\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2X + Y + 4Z = 1, \\ \quad X + 2Y \qquad = 4, \\ \quad 3X - \ Y + Z = 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём X = 2, Y = 1, Z = 1.

Таким образом, $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

7. Смешанное произведение этих векторов равно нулю

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

следовательно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, а значит, они линейно зависимы, т.е. существуют константы λ, μ и ν такие, что $\lambda\cdot\bar{\mathbf{a}}+\mu\cdot\bar{\mathbf{b}}+\nu\cdot\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$. Тогда в координатах получаем $\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\mu(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k})+\nu(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})=\mathbf{0}$, откуда следует равенство $(\lambda+3\mu+\nu)\mathbf{i}+(\lambda+4\mu+2\nu)\mathbf{j}+(2\lambda+\mu-3\nu)\mathbf{k}=\mathbf{0}$. Т.к. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ - базисные векторы, то имеем систему уравнений для нахождения λ, μ и ν:

$$\left.\begin{matrix} \lambda+3\mu+\nu=0 \\ \lambda+4\mu+2\nu=0 \\ 2\lambda+\mu-3\nu=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda+3\mu+\nu=0 \\ \mu+\nu=0 \\ -5\mu-5\nu=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda+3\mu+\nu=0 \\ \mu=-\nu \end{matrix}\right\}\Rightarrow \lambda-3\nu+\nu=0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda=2\nu \\ \mu=-\nu \end{matrix}\right\}$$

Здесь ν выступает в качестве параметра, и данная система имеет бесчисленное множество решений. Подставим $\lambda=2\nu$, $\mu=-\nu$ в указанную выше линейную комбинацию: $2\nu\cdot\bar{\mathbf{a}}-\nu\cdot\bar{\mathbf{b}}+\nu\cdot\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$. Сократим на $\nu\neq 0$. Получим искомую линейную зависимость $2\bar{\mathbf{a}}-\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$.

3. Матрицы и определители

3.1. Матрицы и операции над ними

1. Что называется матрицей размеров m x n?
2. Что называется элементами матрицы?
3. Как обозначается элемент, стоящий в *i*-ой строке и *j*-м столбце матрицы **A**?
4. Какая матрица называется квадратной?

5. Что называется порядком квадратной матрицы?
6. Какая матрица называется нулевой; единичной; диагональной?
7. Какие матрицы называются равными?
8. Приведите пример матричной записи экономических данных.
9. Что называется суммой двух матриц?
10. Можно ли складывать матрицы разных размеров?
11. Что называется произведением числа α на матрицу **A**?
12. Какая матрица называется противоположной матрице **A**?
13. Что называется разностью двух матриц?
14. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называют линейными операциями. Запомните свойства этих операций:
    1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$; 2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$; 3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
    4) $\lambda\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$; 5) $(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;
    6) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\mathbf{A}=\lambda(\mu\mathbf{A})=\mu(\lambda\mathbf{A})$.
15. В каком случае матрицу А можно умножить на матрицу В?
16. Что называется произведением матрицы А на матрицу В?
17. Каковы должны быть размеры матриц А, В и С, чтобы существовало произведение (АВ)С?
18. В каком случае существуют произведения АВ и ВА?
19. Возможно ли равенство АВ = 0, где А и В – ненулевые матрицы?
20. Каковы свойства умножения матриц?
21. В каком случае существует произведение АА?
22. Что называется целой положительной степенью квадратной матрицы А?
23. Что называется нулевой степенью квадратной матрицы А?
24. Что называется первой степенью квадратной матрицы А?
25. Какая матрица называется транспонированной к данной?
26. Запомните свойства операции транспонирования:
    1) $(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$; 2) $(\alpha\mathbf{A})'=\alpha\mathbf{A}'$; 3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$; 4) $(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'$, если АВ существует.
27. Что называется рангом матрицы А?
28. Какая матрица называется ортогональной?

Тренировочное задание 3.1

1. Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\4&5\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&2\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&3\\5&8\\1&3\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}3&5\\-1&2\\1&-4\end{bmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу A: с матрицей B; с матрицей C? Найти: A + C; 2A – 3C + D.

2. Найти матрицу X, если: $3\mathbf{X}+\begin{bmatrix}4&-1\\3&4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1&0\\2&-4\end{bmatrix}$.

3. Цех делает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида нужно 5 кг железа и 3 кг проволоки; а на один трансформатор второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора цех получает прибыль 6 $ и 5 $ соответственно. Цех располагает 4,8 т железа и 3 т проволоки. Сколько видов продукции производит цех? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Определите, допустимы ли планы $\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}600\\600\end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\3&9&-5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&2&4\\5&6&7\\0&3&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, CB, BC, которые существуют.

5. Известно что $\mathbf{A}_{5x9}\cdot\mathbf{B}_{mxn}=\mathbf{C}_{5x1}$. Найти m и n.

6. Показать, что матрица $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$ является корнем многочлена $f(x)=x^2-3x+5$.

7. Найти матрицу, транспонированную к матрице $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}$.

Решение тренировочного задания 3.1

1. Матрицу A нельзя сложить с матрицей B, так как матрица A имеет размеры 3x2; матрица B – размеры 2x3, а складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Матрицы A и C имеют одинаковые размеры, следовательно, их можно складывать.

Так как при сложении матриц складываются соответствующие элементы, то

$$\mathbf{A}+\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3-2 & 1+3 \\ 0+5 & 2+8 \\ 4+1 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы 2A каждый элемент матрицы A умножим на число 2:

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Аналогично найдем

$$-3\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -15 & -24 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$2\mathbf{A}-3\mathbf{C}+\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -15 & -24 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ -16 & -18 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Имеем $3\mathbf{X} = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $3\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

$$3\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} -2 & 1/3 \\ 1/3 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Данный цех производит $n = 2$ вида продукции (число столбцов матрицы норм расхода). Используется $m = 2$ вида ресурсов (число строк матрицы норм расхода). Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$, составленная из норм расхода, называется матрицей норм расхода или техноло-

гической матрицей. В нашем случае $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,2}$, тогда $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$. Вектор удельной прибыли $\mathbf{C}=[6;5]$ (вектор-строка); вектор запасов ресурсов $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4800\\ 3000\end{bmatrix}$ (вектор-столбец). Чтобы определить, допустим ли план производства $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, надо подсчитать расход ресурсов на этот план АХ и сравнить с вектором запасов В. Поскольку для $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}500\\ 600\end{pmatrix}$

$$\mathbf{AX}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}500\\ 600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2500+1800\\ 1500+1200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4300\\ 2700\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}4800\\ 3000\end{bmatrix},$$

то план $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}500\\ 600\end{bmatrix}$ является допустимым.

Для $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}600\\ 600\end{bmatrix}$ имеем, что

$$\mathbf{AX}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}600\\ 600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4800\\ 3000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4800\\ 3000\end{bmatrix}.$$

Таким образом, оба плана допустимы, а на плане производства $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}600\\ 600\end{bmatrix}$ оба ресурса исчерпаны полностью.

4. Так как число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, то произведение АВ существует. Используя определение произведения матриц, находим:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+(-2)\cdot0 & 1\cdot2+0\cdot6+(-2)\cdot3 & 1\cdot4+0\cdot7+(-2)(-1)\\ 3\cdot(-1)+9\cdot5+(-5)\cdot0 & 3\cdot2+9\cdot6+(-5)\cdot3 & 3\cdot4+9\cdot7+(-5)(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1+0+0 & 2+0-6 & 4+0+2\\ -3+45+0 & 6+54-15 & 21+63+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 6\\ 42 & 45 & 89\end{bmatrix}.$$

Так как число столбцов матрицы В не равно числу строк матрицы А $(3\neq2)$, то произведение ВА не существует.

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы С, то произведение АС существует. Используя определение произведения матриц, находим

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 9\cdot 2 + (-5)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Число столбцов матрицы С не равно числу строк матрицы А $(1 \neq 2)$, значит, произведение СА не существует. По той же причине $(1 \neq 3)$ не существует произведение СВ. Произведение ВС существует, так как число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы С.

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 2 + 7\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 38 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5. Так как произведение АВ существует, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, то 9 = m, т.е. m = 9. Так как по определению произведения матрицы $\mathbf{A}_{mxx}\cdot\mathbf{B}_{nxx} = \mathbf{C}_{mxx}$, то из равенства $\mathbf{A}_{5x9}\cdot\mathbf{B}_{9xn} = \mathbf{C}_{5x1}$ заключаем, что $n = 1$.

6. Подставив в данный многочлен вместо x матрицу A, получим

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 5\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 3 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. По определению матрицы, транспонированной к данной, имеем

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.2. Определители и их свойства

1. Что называется определителем матрицы второго порядка?
2. Запишите формулы для нахождения решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными через определители (формулы Крамера).
4. Запомните правило треугольника для вычисления определителя третьего порядка.
4. Что называется определителем матрицы *n*-го порядка (через разложение по строке или столбцу).
5. Запомните свойства определителей *n*-го порядка:
   1) определитель не изменяется при транспонировании его матрицы; поэтому свойства, сформулированные для строк определителя, остаются справедливыми и для его столбцов;
   2) при перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный;
   3) если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю;
   4) общий множитель элементов любой строки можно выносить за знак определителя;
   5) сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю;
   6) если каждый элемент некоторой строки представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, в каждом из которых все элементы те же, что и в исходном определителе, за исключением элементов указанной строки, которая в первом определителе состоит из первых слагаемых, во втором – из вторых;
   7) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число;
   8) если в определителе элементы каких-либо строк пропорциональны, то он равен нулю;
   9) если определитель содержит нулевую строку, то он равен нулю.

Тренировочное задание 3.2

1. Вычислить определители:

а) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$, б) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, в) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители, используя свойства определителей:

а) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & d \\ kc & kd \end{vmatrix}$,

в) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 13 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 17 & 0 & 24 \\ 7 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, г) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Пусть A – квадратная матрица четвертого порядка и det A = 2. Найти det (3A).

5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

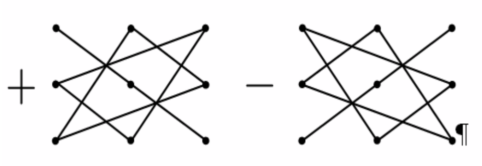
разложением по элементам: а) первой строки; б) второго столбца; в) третьей строки.

Решение тренировочного задания 3.2

1. а) Так как определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали, то

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) - 5 \cdot 2 = -8 - 10 = -18.$$

б) Используя правило треугольника:



$$\text{получим } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + 2\cdot6\cdot7 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 8\cdot6\cdot1 = \\ = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0;$$

$$\text{в) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \textit{от первого столбца} \\ \textit{вычтем утроенный} \\ \textit{четвертый столбец} \end{array}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{разложим определитель} \\ \textit{по первому столбцу} \end{array}\right] = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{вынесем за знак определителя} \\ \textit{общий множитель } 8 \\ \textit{элементов первой строки} \end{array}\right] = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{выносим} \\ \textit{за знак определителя} \\ \textit{множитель, равный } 5 \end{array}\right] = 8 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 17 & 134 & 4 \\ 43 & 106 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{из второго столбца} \\ \textit{вычитаем} \\ \textit{удвоенный первый} \end{array}\right] = 40 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 4 \\ 43 & 20 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{разлагаем определитель} \\ \textit{по элементам} \\ \textit{первой строки} \end{array}\right] = 40 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 100 & 4 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 40 \cdot (100 \cdot 1 - 20 \cdot 4) = 40 \cdot (100 - 80) = 40 \cdot 20 = 800.$$

2. а) Так как определитель Δ_1 содержит нулевую строку, то он равен нулю;

б) так как строки определителя Δ_2 пропорциональны, то он равен нулю;

в) так как определитель Δ_3 содержит нулевой столбец, то он равен нулю;

г) так как элементы третьей строки определителя Δ_4 равны сумме соответствующих элементов первой и второй строки, то определитель равен нулю.

3. Так как при умножении матрицы A на 3 каждый элемент матрицы A умножается на 3, то в каждой из четырех строк матрицы А появляется общий множитель 3, поэтому за знак определителя вынесется множитель $3^4 = 81$. Значит, $\det(3A) = 3^4$ $\det A = 81 \cdot 2 = 162$.

4. а) Применив теорему о разложении определителя к первой строке, получим

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(1\cdot 5 - 0\cdot 1) - 1\cdot(1\cdot 5 - 0\cdot 1) + 3\cdot(1\cdot 0 - 1\cdot 0) = -10 - 5 = -15;$$

б) применив теорему о разложении определителя ко второму столбцу, получим

$$\Delta = a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2} M_{32} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -(1\cdot 5) + (-2\cdot 5 - 0\cdot 3) = -5 - 10 = -15.$$

в) применив теорему о разложении определителя к третьей строке, получим

$$\Delta = a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} =$$

$$= 0 + 0 + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(-2-1) = -15.$$

4. Системы линейных уравнений

1. Какая квадратная матрица называется невырожденной (неособенной)?
2. Какая квадратная матрица называется обратной к данной квадратной матрице А?
3. Какая матрица $\widetilde{A}$ называется присоединенной (или союзной) к данной квадратной матрице А?
4. Запишите формулу для нахождения обратной матрицы.
5. Как называется единственность обратной матрицы?
6. Запомните следующие свойства обратных матриц:

   а) $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$; б) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$; в) $(\alpha\,\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$;

   г) $\left(\mathbf{A}^{k}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k}$; д) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
7. Какая система уравнений называется линейной?
8. Что называется решением системы m линейных уравнений с n неизвестными?
9. Что называется матрицей системы и расширенной матрицей системы m линейных уравнений с n переменными?
10. Как записывается система m линейных уравнений с n переменными в матричном виде?
11. В каком случае система называется совместной (разрешимой)?
12. В каком случае система называется несовместной (неразрешимой)?
13. Какая система уравнений называется определенной?
14. Какая система уравнений называется неопределенной?
15. Сколько решений имеет система n линейных уравнений с n неизвестными, если определитель этой системы отличен от нуля?

16. Запишите формулы Крамера, выражающие единственное решение определенной системы через главный определитель Δ системы и вспомогательные определители Δ_i, $i=\overline{1,n}$.
17. Какие две системы линейных уравнений называются эквивалентными (равносильными)?
18. Что называется элементарными преобразованиями системы?
19. Что называется прямым ходом метода Гаусса?
20. Что называется обратным ходом метода Гаусса?
21. Каково множество решений системы, если прямой ход метода Гаусса приводит матрицу системы к треугольному виду и все элементы главной диагонали отличны от нуля?
22. Совместна или несовместна система, если расширенная матрица системы после k-го шага прямого хода метода Гаусса содержит строку, все элементы которой, кроме последнего, равны нулю?
23. Какие неизвестные называются базисными, а какие свободными?
24. Какие решения системы линейных уравнений называются базисными?
25. Дайте определение разрешающей неизвестной, разрешающего элемента матрицы, разрешающей строки и разрешающего столбца.
26. Сформулируйте правила преобразования коэффициентов и свободных членов системы при переходе к эквивалентной системе (шаг гауссова исключения).

Тренировочное задание 4

1. Являются ли взаимно обратными матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2. Пусть $\det\mathbf{A}\neq 0$. Записать формулу, по которой находится матрица, обратная матрице $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$.

3. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix}$, и если существует, то найти ее и сделать проверку.

4. Предприятие выпускает продукцию трех видов: $\mathbf{П}_1, \mathbf{П}_2$ и $\mathbf{П}_3$. Уровень их выпуска лимитируется ограниченностью ресурсов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Все числовые данные приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Нормы затрат на единицу продукции		
		$П_1$	$П_2$	$П_3$
P_1	105	3	2	2
P_2	65	1	2	1
P_3	100	4	1	2

Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска продукции, предполагая полное использование ресурсов. Решить полученную систему линейных уравнений методом Гаусса.

5. Исследовать систему и в случае совместности решить ее:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -2,\\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1,\\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0.\end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1,\\ x_1 - x_2 - 2x_4 = -1,\\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0.\end{cases}$

Решение тренировочного задания 4

1. Так как

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot1+(-1)0+1\cdot0 & 1\cdot1+(-1)1+1\cdot0 & 1\cdot0+(-1)1+1\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot0+(-1)0 & 0\cdot1+1\cdot1+(-1)0 & 0\cdot0+1\cdot1+(-1)1\\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

и BA = E (проверить самостоятельно), то, согласно определению, A и B – взаимно-обратные матрицы.

2. Так как

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}$$, где $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$, то

для матрицы $\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ (по условию),

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=a_{22};\ \ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-a_{21};$

$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-a_{12};\ \ A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=a_{11}.$

Таким образом $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$.

3. Найдем

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 2+2(-4)4+(-2)(-7)3-$$

$$-3\cdot 1\cdot 4-2(-2)2-(-4)(-7)1=2-32+42-12+8-28=-20\neq 0,$$

значит, обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$. Так как

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -7\\ -4 & 2\end{vmatrix}=2-28=-26;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -7\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(4+21)=-25;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-3=-11;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-(-4+16)=-12;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2-12=-10\,;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-(-4+6)=-2\,;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -7\end{vmatrix}=14-4=10\,;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-(-7-8)=-(-15)=15\,;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\,,$$

то $$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{-20}\begin{bmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}3 & 0{,}6 & -0{,}5\\ 1{,}25 & 0{,}5 & -0{,}75\\ 0{,}55 & 0{,}1 & -0{,}25\end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений убедимся в справедливости равенств $A^{-1}A=AA^{-1}=E$. Имеем:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1{,}3 & 0{,}6 & -0{,}5\\ 1{,}25 & 0{,}5 & -0{,}75\\ 0{,}55 & 0{,}1 & -0{,}25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1{,}3\cdot 1+0{,}6\cdot 2-0{,}5\cdot 3 & 1{,}3(-2)+0{,}6\cdot 1-0{,}5(-4) & 1{,}3\cdot 4-0{,}6\cdot 7-0{,}5\cdot 2\\ 1{,}25\cdot 1+0{,}5\cdot 2-0{,}75\cdot 3 & 1{,}25(-2)+0{,}5\cdot 1-0{,}75(-4) & 1{,}25\cdot 4-0{,}5\cdot 7-0{,}75\cdot 2\\ 0{,}55\cdot 1+0{,}1\cdot 2-0{,}25\cdot 3 & 0{,}55(-2)+0{,}1\cdot 1-0{,}25(-4) & 0{,}55\cdot 4-0{,}1\cdot 7-0{,}25\cdot 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Аналогично убеждаемся, что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

4. Обозначим через x_1, x_2, x_3 планируемые к выпуску количества продукции видов $\mathbf{П}_1, \mathbf{П}_2, \mathbf{П}_3$ соответственно. Тогда первого ресурса $\mathbf{P}_1$ будет израсходовано $3x_1+2x_2+x_3$ единиц, а раз, по условию, он должен быть израсходован полностью, то имеет место равенство

$3x_1+2x_2+2x_3=105$. Аналогично, предполагая полное использование ресурсов $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$, имеем уравнения $x_1+2x_2+x_3=65$, $4x_1+x_2+2x_3=100$. Итак, x_1, x_2, x_3, должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=105, \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=\ 65, \\ 4x_1+\ \ x_2+2x_3=100. \end{cases}$$

Для решения полученной системы применяем метод Гаусса, для чего выпишем расширенную матрицу систему, предварительно переставив первое и второе уравнение системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 65 \\ 3 & 2 & 2 & 105 \\ 4 & 1 & 2 & 100 \end{array}\right]$$

Элемент $a_{11}=1\neq 0$ назовем разрешающим; в новой, преобразованной матрице элементы вычисляем по правилу гауссова исключения: строку с разрешающим элементом и вышестоящие оставляем без изменения; под разрешающим элементом ставим нули; остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника: в новой матрице вместо элемента, скажем, 105 ставим разность между произведением элементов главной диагонали $1\cdot 105$ и произведением элементов побочной диагонали $3\cdot 65$:$1\cdot 105 - 3\cdot 65 = 105 - 195 = -90$. Тогда новая матрица имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 65 \\ 0 & -4 & -1 & -90 \\ 0 & -7 & -2 & -160 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 65 \\ 0 & \underline{4} & 1 & 90 \\ 0 & 7 & 2 & 160 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 65 \\ 0 & 4 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система: $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=65, \\ \quad 4x_2+x_3=90, \\ \qquad\quad x_3=10, \end{cases}$

решая которую «снизу вверх», т.е. выполняя обратный ход метода Гаусса, последовательно находим:

$x_3 = 10,\ \ 4x_2 + 10 = 90,\ \ 4x_2 = 90 - 10,\ \ 4x_2 = 80,\ \ x_2 = 20;$

$x_1 + 2 \cdot 20 + 10 = 65,\ x_1 = 15.$

Таким образом, к выпуску следует запланировать *15* единиц продукции $\mathbf{П}_1$, 20 единиц продукции $\mathbf{П}_2$ и 10 единиц продукции $\mathbf{П}_3$.

5. а) выписываем расширенную матрицу системы и подвергнем ее преобразованиям по методу Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 5 & -5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & \underline{-7} & 8 & 5 \\ 0 & -14 & 16 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array}\right].$$

Последней строке матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 28$, которое не выполняется ни при каких значениях x_1, x_2 и x_3, поэтому данная система не имеет решений.

б) выписываем расширенную матрицу системы и подвергнем ее преобразованиям по методу Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \underline{-2} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Наличие нулевой строки означает, что третье уравнение исходной системы является следствием двух первых; по последней матрице имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ - 2x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$$

чтобы записать множество решений этой системы, будем считать переменные x_3 и x_4 свободными, принимающими любые произвольные значения $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, где $C_1, C_2 \in R$, тогда основные, или базисные, переменные x_1 и x_2 единственным образом находятся через свободные: $2x_2 = -C_1 + 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}C_1 + 1$,

$x_1 - \frac{1}{2}C_1 + 1 + C_1 - 2C_2 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}C_1 + 2C_2$. Решением системы 5 б) является набор чисел:

$\left(\frac{1}{2}C_1 + 2C_2;\ -\frac{1}{2}C_1 + 1;\ C_1;\ C_2\right)$, где $C_1 \in R,\ C_2 \in R$.

5. Аналитическая геометрия

5.1. Элементы аналитической геометрии на плоскости

1. Что понимается под уравнением прямой?
2. Какими способами можно задать прямую на плоскости относительно декартовой прямоугольной системы координат?
3. Запишите векторное уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{\mathbf{n}} = (A, B)$; общее уравнение прямой.
4. Что понимается под углом наклона прямой к оси *Ox*?
5. Что называется угловым коэффициентом прямой?
6. Что называется уравнением прямой с угловым коэффициентом?
7. Что называется уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (с данным угловым коэффициентом)?
8. Что называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$?
9. Что называется уравнением прямой в отрезках?
10. Что называется углом между двумя прямыми?
11. Запишите формулу для нахождения тангенса угла между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.
12. Запишите условия параллельности и условия перпендикулярности двух прямых.

Тренировочное задание 5.1

1. Точка $C(2, 2)$ делит отрезок АВ в отношении $\lambda = 2/3$. Найти координаты точки В, если А(-2, 4).

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(1, 2):

а) перпендикулярно к вектору $\overline{\mathbf{n}} = (2,3)$; б) параллельно вектору $\overline{\mathbf{S}} = (1,0)$; в) под углом $\phi = \frac{2\pi}{3}$ к оси Ox; г) и точку N = (4, 3).

3. Найти длину высоты, проведенной из вершины А треугольника ABC, если: A(4, -3), B(1,1), C(-3,-2). Сделать чертеж.

4. Среди прямых с уравнениями:

а) $6x - 4y - 3 = 0$; б) $8x + 6y + 1 = 0$; в) $4x - 6y + 5 = 0$; г) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

указать параллельные и перпендикулярные.

Решение тренировочного задания 5.1

1. Пусть $B(x_B, y_B)$. Используя формулы деления отрезка AB в данном отношении $\frac{AC}{CB} = \lambda$, где $\lambda \neq -1$,

$$x_C = \frac{x_A + \lambda\, x_B}{1+\lambda}, \; y_C = \frac{y_A + \lambda\, y_B}{1+\lambda}$$

и подставляя вместо $(x_C, y_C) = (2,2), (x_A, y_A) = (-2,4)$, получим уравнения для нахождения x_B и y_B:

$$2 = \frac{-2 + 2x_B/3}{1+2/3}, \; 2 = \frac{4 + 2y_B/3}{1+2/3},$$

откуда $\begin{cases} -2 + \frac{2}{3}x_B = 2\cdot\frac{5}{3}, \\ 4 + \frac{2}{3}y_B = 2\cdot\frac{5}{3}, \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{2}{3}x_B = \frac{10}{3} + 2, \\ \frac{2}{3}y_B = \frac{10}{3} - 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_B = 8, \\ y_B = -1. \end{cases}$

Ответ: точка $B(8;-1)$.

2. При составлении уравнения прямой надо воспользоваться тем видом уравнения прямой, в какой входит вся информация, имеющаяся о прямой:

а) так как известны точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой и вектор $\overline{\mathbf{n}} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, то надо использовать уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Подставляя в это уравнение данные $M_0(1,2)$ и $\overline{\mathbf{n}} = (2,-3)$, получим $2(x-1) + (-3)(y-2) = 0$ или $2x - 3y + 4 = 0$;

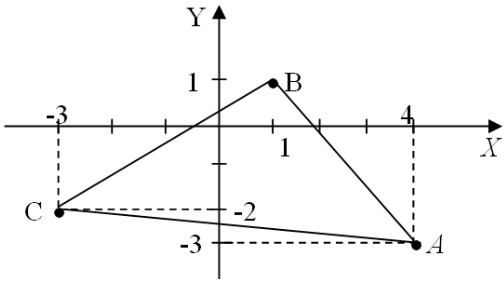
б) так как координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая и координаты вектора $\overline{\mathbf{S}} = (m; n)$, параллельного прямой, входят в уравнение $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, то имеем $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0}$ или $(y-2)\cdot 1 = (x-1)\cdot 0$, т.е. $y - 2 = 0$;

в) так как координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая, и угол φ, образованный прямой с осью Ox, фигурируют в уравнении $y - y_0 = \mathrm{k}(x - x_0)$, где $k = \operatorname{tg}\phi$, то поскольку

$\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, то имеем $y - 2 = -\sqrt{3}(x-1)$ или $y + \sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3} = 0$;

г) так как координаты точек $M(x_1, y_1)$и $N(x_2, y_2)$, через которые проходит прямая, участвуют в уравнении $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, то имеем

$\dfrac{x-1}{4-1} = \dfrac{y-2}{3-2}$ или $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1}$, тогда $(x-1)\cdot 1 = (y-2)\cdot 3$, $x - 1 = 3y - 6$ и окончательно получаем $x - 3y + 5 = 0$.



3. Найдем угловой коэффициент прямой BC:

$K_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$,

$K_{BC} = \dfrac{-2-1}{-3-1}$, $K_{BC} = \dfrac{3}{4}$.

Угловой коэффициент высоты AH найдем из условия перпендикулярности прямых:

$$K_{AH} \cdot K_{BC} = -1;\ K_{AH} = \frac{-1}{3/4} = -\frac{4}{3}.$$

Составим уравнение прямой AH с помощью уравнения:

$$y - y_A = K_{AH}(x - x_A); \qquad y + 3 = -\frac{4}{3}(x-4),$$

$3y+9=-4x+16$, $3y+4x-7=0$. Найдем уравнение прямой *BC*, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{y-y_C}{y_B-y_C}=\frac{x-x_C}{x_B-x_C}$ или $\frac{y+2}{1+2}=\frac{x+3}{1+3}$, $\frac{y+2}{3}=\frac{x+3}{4}$, $4\cdot(y+2)=3\cdot(x+3)$, $4y-3x-1=0$. Решая совместно систему уравнений прямых *AH* и *BC*, находим координаты точки *H*:

$$\begin{cases}3y+4x-7=0,\\4y-3x-1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}3y+4x=7,\\4y-3x=1,\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times 3\\ \times 4\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}9y+12x=21,\\16y-12x=4,\end{cases}$$

$25y=25$, $y=1$, $x=1$. Точка *H* совпала с точкой *B*, это было "заметно" из чертежа, но чертеж "подсказывает", а не доказывает. Найдем длину стороны АВ по формуле

$$d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2};$$

$$d=\sqrt{(1-4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Ответ: длина высоты равна 5.

4. Приведем уравнения прямых к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

Для а) имеем $4y=-6x+3$, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$, $k_1=-3/2$;

для б) $6y=-8x-1$, $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{6}$, $k_2=-\frac{4}{3}$;

для в) $6y=4x+5$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$, $k_3=\frac{2}{3}$;

для г) $y=4-\frac{4}{3}x$, $k_4=-\frac{4}{3}$.

Так как $k_2=k_4$, то прямые б) и г) параллельны; так как $k_1k_3=-1$, то прямые а) и в) перпендикулярны.

5.2. Элементы аналитической геометрии в пространстве

1. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
2. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно к вектору $\overline{\mathbf{n}}=(A,B,C)$.
3. Запишите общее уравнение плоскости.
4. Какой угол называется углом между плоскостями с уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$?

5. Какова формула для нахождения косинуса угла между плоскостями?
6. Запишите условие перпендикулярности и условие параллельности плоскостей.
7. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
8. Как записываются параметрические уравнения прямой?
9. Как записываются общие уравнения прямой?
10. Как записываются канонические уравнения прямой?
11. Запишите определение и формулу для вычисления угла между прямыми в пространстве?
12. Запишите условие перпендикулярности и условие параллельности двух прямых.
13. Какой угол называется углом между прямой L: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$?
14. Запишите условие перпендикулярности прямой и плоскости и условие параллельности прямой и плоскости.
15. Как найти точку пересечения прямой $L: x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,$ $z = z_0 + nt$ и плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$ предполагая, что прямая и плоскость не параллельны?
16. Какое множество точек называется гиперплоскостью пространства R^n?
17. Запишите уравнение гиперплоскости в R^n в векторной форме и в координатной форме.
18. Запишите уравнение прямой в R^n, определяемой точкой $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и вектором $\overline{\mathbf{a}} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$.
19. Запишите уравнения отрезка прямой в R^n.
20. Какое множество точек пространства R^n называется выпуклым? Приведите примеры.
21. Запомните теорему: пересечение любого числа полупространств, ограниченных различными гиперплоскостями, является выпуклым множеством.
22. Дайте определение внутренней, граничной и угловой точек выпуклого множества. Приведите примеры.

Тренировочное задание 5.2

1. В пространстве трех товаров рассмотрите бюджетное множество при векторе цен $P=(2,3,5)$ и доходе $Q=30$. Опишите это множество и задайте его границу с помощью систем линейных неравенств и линейных уравнений относительно переменных x_1, x_2, x_3. Вычислите объем бюджетного множества и постройте его.
2. Даны координаты точек $A_1(1, 1, 3)$, $A_2(4, 1, 5)$, $A_3(2, 2, 1)$ и $A_4(5, 2, 3)$. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3 и уравнение прямой L, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости α.
3. Установить, пересекаются, параллельны или совпадают плоскости, заданные уравнениями:
   а) $4x-6y+3z+5=0$ и $2x-3y+z-5=0$;
   б) $6x+8y-4z-6=0$ и $3x+4y-2z+3=0$;
   в) $x+2y-z+5=0$ и $2x+4y-2z+10=0$.
4. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ и плоскости $x+y-z+2=0$.
5. Найти систему неравенств, определяющую множество точек треугольника с вершинами $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(4,5)$.

Решение тренировочного задания 5.2

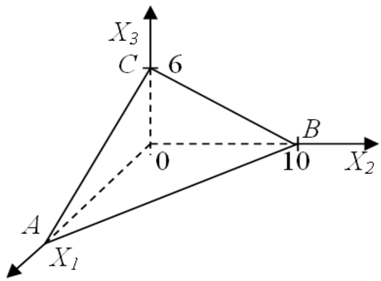
1. Пусть вектор цен $P=(p_1, p_2, p_3)$ задан, а набор товаров $X=(x_1,x_2,x_3)$, где $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $x_3\ge 0$ подлежит определению. Этот набор товаров можно купить на данное количество денег (доход) Q, при этом не обязательно тратить все деньги. Бюджетное множество B тогда задается в пространстве R^3 системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3\le Q, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0, \end{cases}$$

что в нашем случае означает

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3\le 30, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система неравенств (1) описывает бюджетное множество данной задачи. Границей бюджетного множества является такое множество набор товаров, которые в точности стоят Q. Тогда граница бюджетного множества есть часть гиперплоскости пространства R^3 $2x_1+3x_2+5x_3=30$ (2), ограниченная неравенствами $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. Для построения плоскости (2) приведем уравнение (2) к уравнению плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, для чего обе части уравнения (2) разделим на 30: $\frac{2x_1}{30}+\frac{3x_2}{30}+\frac{5x_3}{30}=1$ или $\frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{10}+\frac{x_3}{6}=1$ (3). Из уравнения (3) получаем точки пересечения плоскости (2) с осями координат Ox_1, Ox_2 и Ox_3.



Если $x_2=0$, $x_3=0$, то $x_1=15$, $A(15,0,0)$ – точка пересечения плоскости с осью Ox_1; если $x_1=0$, $x_3=0$, то $x_2=10$, $B(0,10,0)$ – точка пересечения плоскости с осью Ox_2; если $x_1=0, x_2=0$, то $x_3=6$, $C(0,0,6)$– точка пересечения плоскости с осью Ox_3.

Таким образом, бюджетное множество данной задачи есть треугольная пирамида $OABC$. Для вычисления ее объема примем за основание Δ OAB, тогда высотой является OC и по формуле объема пирамиды $V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$ получим

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 10\cdot 6=150.$$

3. Уравнение плоскости α ищем в виде

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0,$$

в котором числа A, B, C подлежат определению, а в качестве точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ возьмем точку $A_1(1,1,3)$. Тогда получим уравнение $A(x-1)+B(y-1)+C(z-3)=0$ (1). Так как точки $A_2(4,1,5)$ и $A_3(2,2,1)$ принадлежат плоскости α, то их координаты удовлетворяют уравнению (1) и подставляя эти точки в уравнение (1), получим:

$$\begin{cases} A(4-1)+B(1-1)+C(5-3)=0, \\ A(2-1)+B(2-1)+C(1-3)=0, \end{cases}$$ откуда

$$\begin{cases} 3A+2C=0, \\ A+B-2C=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{2}{3}C, \\ -\dfrac{2}{3}C+B-2C=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\dfrac{2}{3}C, \\ B=\dfrac{8}{3}C, \end{cases}$$

где $C \in \mathrm{R}$, $C \neq 0$. Подставляя найденные A и B в уравнение (1), получаем: $-\dfrac{2}{3}C(x-1)+\dfrac{8}{3}C(y-1)+C(z\text{-}3)=0$.

Разделив обе части полученного уравнения на $\dfrac{C}{3} \neq 0$, получим $-2(x-1)+8(y-1)+3(z\text{-}3)=0$ или, окончательно, уравнение плоскости α примет вид $-2x+8y+3z-15=0$. Нормальный вектор этой плоскости $\overline{\mathbf{n}}$ = (–2, 8, 3). Для составления уравнения прямой *L*, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости α, используем уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, имеющей направляющий вектор $\overline{\mathbf{S}}=(l,m,n)$: $\dfrac{x-x_o}{l}=\dfrac{y-y_o}{m}=\dfrac{z-z_o}{n}$. Так как по условию прямая *L* перпендикулярна плоскости α, то в качестве ее направляющего вектора $\overline{\mathbf{S}}$ можно принять нормальный вектор $\overline{\mathbf{n}}$. Тогда, полагая $M_o = A_4$, получим $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-5}{3}-$ канонические уравнения прямой *L*.

Ответ: $-2x+8y+3z-15=0$ – уравнение плоскости α;

$\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-5}{3}-$ уравнение прямой *L*.

3. а) условие параллельности плоскостей, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеет вид:

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ (2). Подставляя в это условие данные пункта

а) имеем $\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{-3}\neq\dfrac{3}{1}$ $\Rightarrow$ плоскости пересекаются;

б) подставляя в условие (2) данные пункта б) получим:

$\dfrac{6}{3}=\dfrac{8}{4}=\dfrac{-4}{-2}\neq\dfrac{-6}{3}$ $\Rightarrow$ плоскости параллельны;

в) условие совпадения плоскостей имеет вид:

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$. Подставляя в это условие данные пункта в) получим: $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{5}{10}$ – верно, $\Rightarrow$ плоскости совпадают.

4. Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости от канонических уравнений прямой перейдем к параметрическим уравнениям: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}=t$, тогда $x=2t,\ y=1-3t,\ z=-1+t$. Теперь *x, y* и *z* подставляем в уравнение плоскости $x+y-z+2=0,$ тогда $2t+1-3t+1-t+2=0,$ откуда $-2t=-4, t=2.$ Тогда, подставляя вместо *t*, значение *2* находим $x=4,\ y=1-3\cdot 2,\ y=-5,\ z=-1+2,\ z=1.$

Ответ: (4, -5, 1).

5. Множество точек треугольника *ABC* можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой *AB* и содержит точку *C*, вторая ограничена прямой *BC* и содержат точку *A*, третья ограничена прямой *AC* и содержат точку *B*. Составим уравнение прямой *AB*, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, тогда

$\dfrac{x-2}{6-2}=\dfrac{y-1}{3-1},\quad \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2},\quad 2(x-2)=4(y-1),\quad x-2=2(y-1),$

$x-2y=0$ – уравнение прямой *AB*. Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки С, получим $4-2\cdot 5=-6<0.$ Следовательно, искомое неравенство будет $x-2y\le 0.$ Аналогично составляем уравнение прямой *BC*:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}, \quad \frac{x-6}{4-6}=\frac{y-3}{5-3}, \quad \frac{x-6}{-2}=\frac{y-3}{2},$$

$2(x-6)=-2(y-3)$, $x+y-9=0$ – уравнение прямой BC. Подставляя в это уравнение координаты точки A, получим $2+1-9=-6<0$. Следовательно, второе неравенство будет $x+y-9\le 0$.

Далее, составляем уравнение прямой AC: $\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}$ или

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{5-1}, \qquad 4(x-2)=2(y-1), \quad 2(x-2)=y-1, \quad 2x-y-3=0.$$

Подставляя в левую часть последнего уравнения координаты точки B, получим $2\cdot 6-3-3=6>0$, значит, искомое неравенство будет $2x-y-3\ge 0$. Итак, множество точек треугольника ABC определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x-2y\le 0, \\ x+y-9\le 0, \\ 2x-y-3\ge 0. \end{cases}$$

6. Сходимость числовых последовательностей.

1. Дайте определение числовой последовательности и приведите примеры.
2. Какая последовательность называется: а) ограниченной; б) неограниченной; в) убывающей; г) возрастающей? Приведите примеры.
3. Что называется суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей?
4. Какая числовая последовательность называется бесконечно малой? Приведите примеры.
5. Какая числовая последовательность называется бесконечно большой? Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями.
7. Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей.
8. Дайте определение предела числовой последовательности и приведите геометрическую иллюстрацию этого понятия.
9. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
10. Пределом какой числовой последовательности является число e?

11. Покажите на примере, что номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, зависит, вообще говоря, от ε.

12. Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной, если :

а) из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования?

б) к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования?

13. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого условия, что:

а) $\lim x_n = a$ при $n \to \infty$? б) $\{x_n\}$ ограничена?

14. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажите, что:

а) $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2}$; б) $\{x_n\}$ ограничена.

Могут ли все члены последовательности быть отрицательными, если $a = 0$? Может ли последовательность иметь бесконечно много равных нулю членов, если $a > 0$?

Тренировочное задание № 6.

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{3n^2+3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n}{n^2+1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+1}-n)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{3^n-2^n}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{n}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+n}-n^2)n$;

Решение тренировочного задания № 6.

1а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$. Имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Преобразуем выражение под знаком предела, разделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на $n^1 = n$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$, поскольку величины $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{2}{n}$ при $n\to\infty$ являются бесконечно малыми и их предел равен нулю.

1б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n^2+3n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{2n^2+3n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{0-0}{2+0} = 0;$$

1в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^3-n}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$. Поскольку числитель $1-\dfrac{1}{n^3}$ стремится к 1 при $n\to\infty$, а знаменатель есть бесконечно малая величина, то по теореме 1.1 переменная величина $\dfrac{n^3-n}{n^2+1}$ является бесконечно большой: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n}{n^2+1} = \infty$.

1г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$. Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Для ее раскрытия умножим и разделим выражение под знаком предела на $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$ и применим приемы, применяемые при решении 1а)-1в):

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

1д) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=[\infty-\infty]$. Умножим и разделим выражение под знаком предела на неполный квадрат суммы: $(\sqrt[3]{n^3+1})^2+\sqrt[3]{n^3+1}\,n+n^2$. Тогда, применяя формулу $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, уничтожаем иррациональность в числителе полученного выражения и, применяя теорему 1.1 , получаем ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+1-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+1})^2+\sqrt[3]{n^3+1}\cdot n+n^2}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{n^3+1})^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0.$$

1е) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n-2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{3^n-2^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+1}{1-0}=1.$$

1ж) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-3}{n+2}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-3}\cdot\frac{-3}{n+2}(2n+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n-3}{n+2}}=e^{-6},$$ поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-6n-3}{n+2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-6n-3}{n}}{\frac{n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}=-6.$$

1з) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{n+1})^n$. Здесь основание степени $\frac{2n+1}{n}\to 2$, если $n\to\infty$, значит, 2^∞ не есть неопределенность, а бесконечно большая величина: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{n+1})^n=\infty$.

1и) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n}-n^2)n=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+n}-n^2)(\sqrt{n^4+n}+n^2)n}{\sqrt{n^4+n}+n^2}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+n-n^4)n}{\sqrt{n^4+n}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}+n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^4+n}{n^4}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{2}.$$

7. Предел и непрерывность функции.

1. Дайте определение функции одной независимой переменной.
2. Что называется графиком функции?
3. Какая функция называется обратной к функции f?
4. Какие способы задания функции Вам известны?
5. Перечислите основные элементарные функции. Приведите примеры.
6. Какая функция называется четной, нечетной, периодической, возрастающей, убывающей, монотонной, ограниченной сверху (снизу)? Приведите примеры.
7. Приведите примеры функциональных зависимостей, используемых в экономике.
8. Какая точка x_0 называется предельной точкой множества X?
9. Дайте определение предела функции в точке x_0 на языке последователь-ностей (по Гейне) и на языке "ε - δ" (по Коши).
10. Как обозначаются пределы функции в точке x_0 справа и слева?
11. Дайте определение предела функции на бесконечности.
12. Сформулируйте известные Вам теоремы о пределах функций.
13. Запишите первый и второй замечательные пределы.

14. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функций и приведите примеры.
15. Какая связь существует между бесконечно малой в точке x_0 функцией и бесконечно большой в точке x_0 функцией?
16. Какие бесконечно малые функции называются: эквивалентными; одного порядка; более высокого порядка; более низкого порядка; несравнимыми? Приведите примеры.
17. Какие виды неопределенностей Вы знаете?
18. Дайте определение непрерывности функции в точке x_0.
19. Приведите примеры функций, непрерывных в точке x_0 слева; справа; непрерывных в точке x_0.
20. Запишите определение непрерывности функции в точке x_0, сформулированное в терминах приращений Δx и Δy.
21. Сформулируйте теорему об арифметических действиях над непрерывными функциями.
22. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции о непрерывности обратной функции.
23. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.
24. Какая точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
25. Какая точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
26. Перечислите свойства функций, непрерывных на отрезке.
27. Сформулируйте отрицания двух определений предела функции в точке.

Тренировочное задание № 7.

Найти пределы функций, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$ г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg 7x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtgx}{1-\cos x}$;

л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\frac{\pi}{6}-x}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$;

н) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x-1})^{3x+2}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

2. Исследовать на непрерывность функцию $y=f(x)$ и указать характер точек разрыва, если они существуют:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$;

б) $f(x)=x^2+2x-4$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

Решение тренировочного задания № 7.

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$. Применяя теорему о пределе частного, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+7x-9)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-2)}=\frac{2\cdot 2^2+7\cdot 2-9}{2^2+2-2}=\frac{13}{4};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$. Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Предел числителя тоже равен нулю, значит имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители, пользуясь формулой

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.
Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+\frac{9}{2})}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+9}{x+2}=\frac{2\cdot 1+9}{1+2}=\frac{11}{3};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$. Здесь числитель и знаменатель при $x\to\infty$ стремятся к бесконечности, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}}{1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1+0-0}=2.$ Здесь использовали тот факт, что $\frac{7}{x},\frac{9}{x^2},\frac{1}{x},\frac{2}{x^2}-$ бесконечно малые функции при $x\to\infty$.

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\left[\ \frac{2\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)-9}{(-2)^2-2-2}=\frac{-15}{0}\ \right]=\infty$. Использовали теорему о том, что величина , обратная бесконечно малой функции, является бесконечно большой.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$. В этом пределе знаменатель дроби – иррациональное выражение, причем пределы числителя и знаменателя равны нулю при $x\to 0$. Теорему о пределе частного применить нельзя. Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ уничтожим иррациональность в знаменателе, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю: $(\sqrt{x+4}+2)$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$= \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2) = 2+2 = 4 .$$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}) = [\infty-\infty] =$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = 0 .$$

Поскольку знаменатель дроби является бесконечно большой величиной при $x\to\infty$, а числитель -2 есть постоянная величина, то искомый предел равен нулю.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Уничтожая иррациональность и в числителе и в знаменателе, сокращая числитель и знаменатель на x, применяя затем теорему о пределе частного, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2-1-x)(1+\sqrt{1+x})}{(1-1-x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})} = -\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(1+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(1+\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}} = -\frac{(-1)(1+1)}{1+1} = 1;$$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$. Здесь пределы числителя и знаменателя равны нулю, значит, теорему о пределе частного применить нельзя. Поскольку под знаком предела тригонометрическая функция, то надо преобразовать данное выражение и привести его к виду $\dfrac{\sin kx}{kx}$, зная, что этот предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1$. Применяя тригонометрическую формулу $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}= =\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1\cdot 1=2;$$

и) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x\cdot\cos 7x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x\cdot\cos 7x}{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 7x}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}=\frac{1\cdot 4\cdot 1}{1\cdot 7}=\frac{4}{7};$$

к) $$\lim_{x\to 0}\frac{xtgx}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x2\sin^2\dfrac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}}=2\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{x}{2}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}}=\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}=2;$$

л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\frac{\pi}{6}-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Здесь неопределенность $\dfrac{0}{0}$, для ее раскрытия сделаем вначале замену $\dfrac{\pi}{6}-x=y$, значит $x=\dfrac{\pi}{6}-y$. Если $x\to\dfrac{\pi}{6}$, то $y\to 0$. Отсюда получим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\frac{\pi}{6}-x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2(\frac{1}{2}-\sin(\frac{\pi}{6}-y))}{y}=$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin(\frac{\pi}{6}-y)}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{2\sin\frac{y}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{y}{2})}{y}=$$

$$2\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{y}{2})=2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};$$

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{2\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot x^2/4}\quad=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 4}{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x/2}{x/2})^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}x}\quad=\left[\frac{4}{0}\right]=\infty;$$

н) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x-1})^{3x+2}$. Здесь под знаком предела стоит показательная функция, основание которой стремится к 1 $(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1)$, а показатель степени – к бесконечности : $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)=\infty$. Значит, имеем неопределенность вида 1^{∞}, поэтому надо преобразовать данную функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$. Для этого в числителе вычтем и прибавим по единице и выделим целую часть:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)\frac{(3x+2)}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x-1})^{(x-1)}\right)^{\frac{3x+2}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-1}} = e^3;$$

о) $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}})^{\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\cdot\frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. а) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$. Эта функция определена при всех x, за исключение $x = 4$. Найдем $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$. Значит, $x = 4$ — точка разрыва второго рода;

б) $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 4 - x^2 - 2x + 4 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x = 2x\Delta x + 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Теперь $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x\Delta x + 2\Delta x + (\Delta x)^2) = 0$ при любом значении x. Значит, данная функция непрерывна при любом $x \in (-\infty;+\infty)$.

в) $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. Данная функция определена при всех $x \neq 0$. Поэтому на $(-\infty;0)$ и на $(0;\infty)$ функция непрерывна, как элементарная. В точке $x = 0$ имеется разрыв. Для установления характера точки разрыва найдем односторонние пределы при $x \to -0$ и при $x \to +0$:

$$f(+0) = \lim_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \left[\frac{1}{1+2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty}\right] = 0;$$

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{1}{1+2^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}\right]=1.$$

Значит, $f(+0)\neq f(-0)$. Следовательно, точке $x=0$ имеем разрыв первого рода. Скачок функции равен

$$\left|f(+0)-f(-0)\right|=1.$$

г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Данная функция определена при всех $x\neq 0$, значит, она непрерывна, как элементарная функция при всех $x\neq 0$. Найдем односторонние пределы

$f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$ $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ Так как $f(0)$ не существует, но односторонние пределы существуют и равны, то $x=0$ – устранимая точка разрыва. Доопределив $f(x)$ в точке $x=0$ равенством $f(0)=1$, мы получим непрерывную функцию.

8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

1. Дайте определение производной функции f в точке x_0.
2. Что называется бесконечной, левосторонней и правосторонней производной функции f в точке x_0?
3. В чем заключается геометрический смысл производной функции f в точке x_0.
4. Запишите уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке x_0.
5. Приведите формулу для вычисления угла между двумя пересекающимися кривыми.
6. В чем заключается физический смысл производной?
7. Сформулируйте теорему о связи непрерывности и дифференцируемости функции f в точке x_0.
8. Перечислите основные правила дифференцирования.
9. Сформулируйте теорему о производной произведения и частного двух функций.

10. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Приведите примеры.
11. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
12. Запишите таблицу производных элементарных функций.
13. В чем состоит метод логарифмического дифференцирования?
14. Опишите схему дифференцирования степенно-показательной функции $y = f(x)^{g(x)}$.
15. Дайте определение дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0. Как он обозначается?
16. В чем состоит геометрический смысл дифференциала?
17. Какое свойство дифференциала называется инвариантностью формы первого дифференциала относительно выбора переменных?
18. Приведите формулу приближенного вычисления значения функции с помощью первого дифференциала.
19. Дайте определение производной функции второго порядка.
20. Сформулируйте теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и Ферма, касающиеся свойств дифференцируемых функций.
21. Дайте формулировку правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.
22. Сформулируйте необходимое и достаточное условие постоянства функции.
23. Сформулируйте достаточные условия возрастания (убывания) функции.
24. Приведите определения точки минимума (максимума) функции.
25. Сформулируйте первое и второе достаточные условия экстремума функции в точке x_0.
26. Какова схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в точке x_0 на отрезке?
27. Дайте определение выпуклости и вогнутости графика функции на интервале.
28. Дайте определение точки перегиба.
29. Сформулируйте достаточные условия выпуклости и вогнутости графика на интервале.
30. Дайте определение асимптот графика функции и приведите правила вычисления вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.

31. Приведите общую схему исследования функций и построения графиков.
32. Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
33. Методом математической индукции докажите правило нахождения $n-$ой производной суммы и разности двух дифференцируемых функций.

Тренировочное задание № 8

1. Найти производную функции $y = x^2 + 6x - 8$ по определению.

2. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ по определению.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{2x^2 + 4}{x - 1}$; б) $y = \sin(5x^2 + 4x - 1)$;

в) $y = \sin^3 8x$; г) $y = x \ln x$;

д) $y = \arccos(2 - x^2)$; е) $y = \ln\arcsin\dfrac{1}{x}$;

ж) $y = 5^{\ln\sqrt{1+x^2}}$.; з) $y = \sqrt[x]{\dfrac{1}{x}}$.

4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x^7 + 2x \ln x$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + 1}$.

5. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$ при $x = 0{,}15$

6. Доказать, что функция $y = x^3 + 3x^2 + 10x$ возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.

7. Определить промежутки возрастания и убывания функций

а) $y = x \ln x$; б) $y = \sqrt{x}$.

8. Исследовать функцию $y = x^3 + 5x + 6$ на возрастание и убывание.

9. Исследовать функцию $y = \dfrac{-x}{4x^2 - 3x + 4}$ на экстремум.

10. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^2 - x^4$.

15. Исследовать на выпуклость и вогнутость функцию $y = x^4 - \dfrac{4}{3}x^3$.

16. Найти асимптоты кривой $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Решение тренировочного задания № 8.

1. По определению $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Имеем

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)-8-(x^2+6x-8)=$$
$$x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+6x+6\Delta x-8-x^2-6x+8=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$ Значит,

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x+0=2x$ для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. По определению $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Находим

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=$$
$$=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ и $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x}$

для всех x, $x\in(0;+\infty)$.

3. а) $y=\dfrac{2x^2+4}{x-1}$. Для нахождения производной y' используем формулу для нахождения производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, где $u=2x^2+4$, $v=x-1$. Следовательно,

$$y'=\frac{(2x^2+4)'\cdot(x-1)-(2x^2+4)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{4x(x-1)-(2x^2+4)\cdot 1}{(x-1)^2}=$$
$$\frac{2x^2-4x-4}{(x-1)^2};$$

б) $y = \sin(5x^2 + 4x - 1)$. Здесь мы имеем дело со сложной функцией $y = \sin u$, где $u = 5x^2 + 4x - 1$. Поэтому производная $y' = \dfrac{dy}{dx}$ состоит из произведения двух сомножителей, первый из которых равен производной от синуса данного выражения, а второй сомножитель равен производной от алгебраической суммы $5x^2 + 4x - 1$.

Итак, $y' = (\sin(5x^2 + 4x - 1))' = \cos(5x^2 + 4x - 1) \cdot (5x^2 + 4x - 1)' =$

$$= \cos(5x^2 + 4x - 1) \cdot (10x + 4) = 2(5x + 2) \cdot \cos(5x^2 + 4x - 1).$$

в) $y = \sin^3 8x.$

Применяя правило нахождения производной сложной функции и табличные производные $(u^3)' = 3u^2 u'$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, получим $3\sin^2 8x \cdot \cos 8x \cdot (8x)' = = 3\sin^2 8x \cdot \cos 8x \cdot 8 = 24\sin^2 8x \cdot \cos 8x;$

г) $y = x \ln x$. Здесь имеем дело с произведением функций $u = x$ и $v = \ln x$. Используя правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$, получим $y' = x' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1;$

д) $y = \arccos(2 - x^2)$. Применяя правило дифференцирования сложной функции и табличную производную $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$, получим

$$y' = (\arccos(2 - x^2))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (2 - x^2)^2}}(2 - x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - (4 - 4x^2 + x^4)}}(0 - 2x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 - x^4 - 3}}.$$

е) $y = \ln\arcsin\dfrac{1}{x}$. Применяя правило дифференцирования сложной функции и табличные производные $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, получаем $y' = \left(\ln\arcsin\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{\arcsin\dfrac{1}{x}}(\arcsin\dfrac{1}{x})' =$

$$=\frac{1}{\arcsin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\arcsin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}^2}}\cdot\frac{-1}{x^2};$$

ж) $y=5^{\ln\sqrt{1+x^2}}$. Имеем $y'=(5^{\ln\sqrt{1+x^2}})'=5^{\ln\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)'\ln 5=$

$$=5^{\ln\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\ln 5=5^{\ln\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\ln 5\right)=$$

$$=5^{\ln\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x\ln 5}{1+x^2};$$

з) $y=\sqrt[x]{\frac{1}{x}}$. Прологарифмируем левую и правую часть: $\ln y=\ln\sqrt[x]{\frac{1}{x}}$ или $\ln y=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$ или $\ln y=-\frac{\ln x}{x}$. Продифференцируем это равенство, получим $\frac{y'}{y}=-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x(x)'}{x^2}$; $\frac{y'}{y}=\frac{\ln x-1}{x^2}$. Отсюда $y'=y\cdot\frac{\ln x-1}{x^2}$, т.е. $y'=\sqrt[x]{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x-1}{x^2}$.

4. а) $y=x^7+2x\ln x$. Поскольку для нахождения дифференциала функции dy надо вначале найти ее производную $y'=f'(x)$, а затем умножить ее на dx, то $dy=(x^7+2x\ln x)'dx$,

$dy=(7x^6+(2x)'\ln x+2x(\ln x)')dx,\ dy=(7x^6+2\ln x+2x\frac{1}{x})dx.$

Окончательно имеем $dy=(7x^6+2\ln x+2)dx;$

б) $y=arctg\sqrt{x^2+1}$. Находим y' по правилу дифференцирования сложной функции и известным табличным производным

$(arctg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Отсюда

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2+1})^2}\cdot(\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{1+x^2+1}\cdot\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{x^2+2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.$$ Тогда

$$dy = y'\cdot dx = \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx.$$

5. Для вычисления приближенного значения $y = \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0{,}15$ используем приближенное равенство $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, где $x_0 = 0$, $x_0 + \Delta x = 0{,}15$. Имеем

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}},\ \ f'(x) = \left(\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{-1\cdot(2+x)-(2-x)\cdot 1}{(2+x)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{-4}{(2+x)^2}.$$

Тогда $f(x_0) = f(0) = 1;\ \ f'(0) = \dfrac{1}{3}\cdot 1^{\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{-4}{2^2} = -\dfrac{1}{3}.$

Значит, $f(x_0+\Delta x) \approx 1 - \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}15 = 0{,}95$. Итак, $y = \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}} \approx 0{,}95$ при $x = 0{,}15$.

6. $y = x^3 + 3x^2 + 10x$. Имеем, что производная

$y' = (x^3+3x^2+10x)' = 3x^2+6x+10 = 3(x^2+2x+1)+7 = 3(x+1)^2+7 > 0$ при любых $x \in (-\infty;+\infty)$. Значит, функция возрастает при $x \in (-\infty;+\infty)$.

7. Для того, чтобы найти промежутки возрастания и убывания функции, нужно:

1) найти область определения функции;

2) вычислить производную y' функции;

3) найти точки, в которых y' обращается в нуль или не существует и нанести их на числовую прямую;

4) в каждом из полученных промежутков определить знак $f'(x)$: если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на соответствующем промежутке;

а) Функция $y = x\ln x$ определена при $x \in (0;+\infty)$ и непрерывна на этом промежутке. Находим производную

$$y' = (x\ln x)' = x\ln x + x(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Находим те значения x, в которых

$$y' = 0: \quad \ln x + 1 = 0, \quad \ln x = -1, \quad x = e^{-1}, \quad x = \frac{1}{e}.$$

Так как для всех $x \in (0;\frac{1}{e})$ имеем, что $f(x) < 0$, то на промежутке $(0;\frac{1}{e})$ функция убывает; так как для всех $x \in (\frac{1}{e};+\infty)$ $f'(x) > 0$, то на промежутке $(\frac{1}{e};+\infty)$ функция возрастает;

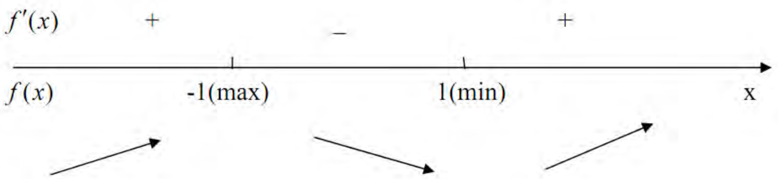
б) $y = \sqrt{x}$. Функция определена и непрерывна при всех $x \in (0;+\infty)$; ее производная $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ положительна при всех $x > 0$. Значит, на промежутке $(0;+\infty)$ функция $y = \sqrt{x}$ возрастает.

8. $y = x^3 + 5x + 6$. Так как $y' = 3x^2 + 5 > 0$ при любых $x \in R$, то функция $y = x^3 + 5x + 6$ возрастает на всей числовой прямой.

9. $y = \dfrac{-x}{4x^2 - 3x + 4}$. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, т.к. $4x^2 - 3x + 4 \neq 0$. Найдем ее производную

$$y' = \left(\frac{-x}{4x^2-3x+4}\right)' = \frac{-1(4x^2-3x+4)+x(8x-3)}{(4x^2-3x+4)^2} = \frac{-4x^2+3x-4+8x^2-3x}{(4x^2-3x+4)^2} =$$

$= \dfrac{4x^2-4}{(4x^2-3x+4)^2} = \dfrac{4(x-1)(x+1)}{(4x^2-3x+4)^2}$. Производная обращается в нуль при $x=-1, \quad x=1$. Определим знаки производной на $(-\infty;-1), \quad (-1;1), \quad (1;+\infty)$:

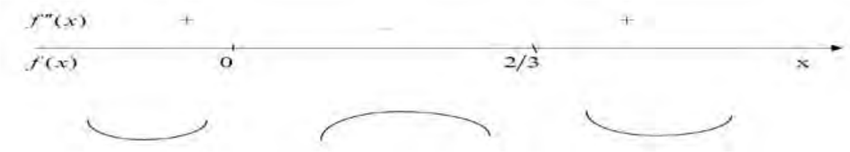


Поскольку в точке $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума, причем $y_{\max} = f(-1) = \dfrac{1}{4(-1)^2-3(-1)+4} = \dfrac{1}{11}$. Поскольку в точке $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума.

10. $y = 2x^2 - x^4$. Находим y' и y'' : $y' = 4x - 4x^3$, $y'' = 4 - 12x^2$. Приравнивая правую производную к нулю, находим критические точки: $4x - 4x^3 = 0$, $4x(1-x^2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$. Найдем теперь значения второй производной в критических точках: $y''(0) = 4 > 0; \quad y''(-1) = 4 - 12 = -8 < 0; \quad y''(1) = 4 - 12 = -8 < 0$. Поэтому $x_1 = 0$ есть точка минимума, причем $y_{\min} = f(0) = 0$; $x_2 = -1$ есть точка максимума, причем $y_{\max} = 1(-1)^2 - (-1)^4 = 1$; $x_3 = +1$ есть точка максимума, $y_{\max} = 2 \cdot 1^2 - 1^4 = 1$.

11. $y = x^4 - \dfrac{4}{3}x^3$. Находим первую производную $y' = 4x^3 - 4x^2$, находим вторую производную $y'' = 12x^2 - 8x = 4x(3x-2)$. Приравниваем вторую производную к нулю и находим критические точки по второй производной: $y''=0 \Leftrightarrow 4x(3x-2)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=\frac{2}{3}$. Определим

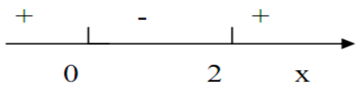
знаки $f''(x)$ на промежутках $(-\infty;0)$; $(0;\frac{2}{3})$; $(\frac{2}{3};+\infty)$:



На промежутке $(-\infty;0)$ и на $(\frac{2}{3};+\infty)$ функция вогнута; на $(0;\frac{2}{3})$ – функция выпукла. Точками перегиба графика функции являются точки $M_1(0;0)$ и $M_2(\frac{2}{3};\frac{16}{81})$.

12. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. Найдем область определения функции:

$D(y):\ \frac{x^3}{x-2}\geq 0 \qquad D(y)=(-\infty;0\,]\cup(2;+\infty)$



Функция непрерывна на всей области определения. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty$, то прямая $x=2$ является правосторонней вертикальной асимптотой графика. Найдем горизонтальные асимптоты $y=kx+b$:

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если $x\to+\infty$, то $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3-2x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=1; \qquad b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} - x) = 1$. Значит, $y = x+1-$ правая наклонная асимптота.

Если $x \to -\infty$, то $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2(x-2)}}) = -1;$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) == \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} + x) = -1$. Значит, прямая $y = -x - 1-$ левая наклонная асимптота.

Вопросы к экзамену

Линейная алгебра (главы 1 – 4)

1. Понятие n-мерного вектора, линейные операции над векторами. n-мерное арифметическое пространство.
2. Скалярное произведение n-мерных векторов и его свойства. Модуль вектора. Угол между векторами. Расстояние между точками. Понятие евклидового пространства.
3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Свойства линейной зависимости.
4. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по системе векторов.
5. Эквивалентные преобразования системы векторов.
6. Ортогональные системы векторов.
7. Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами и их свойства.
8. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
9. Определители второго, третьего и n-го порядка. Правило треугольника вычисления определителя третьего порядка.
10. Свойства определителей n-го порядка.
11. Обратная матрица и ее вычисление.
12. Правило Крамера решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.
13. Решение определенной системы n линейных уравнений с n неизвестными с помощью обратной матрицы.
14. Метод Гаусса исследования и решения системы m линейных уравнений с n неизвестными.
15. Ранг и базис n-мерного пространства. Разложение вектора по любому базису.

Аналитическая геометрия (глава 5)

1. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.
2. Понятие об уравнении линии. Определение окружности и ее уравнение.
3. Различные виды уравнений прямой в R^2: общее уравнение прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой,

проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение пучка прямых с центром в данной точке; уравнение прямой, проходящей через две заданные точки; уравнение прямой в отрезках.

4. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Уравнение плоскости в отрезках. Общее уравнение плоскости.
6. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
7. Общие, канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
8. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
10. Гиперплоскость, прямая, отрезок прямой в R^n.
11. Выпуклые множества точек.
12. Системы линейных неравенств с n неизвестными. Графический метод решения систем m линейных неравенств с двумя неизвестными.

Теория пределов. Предел и непрерывность функции (главы 6-7)

1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания.
2. Основные элементарные функции. Элементарные функции.
3. Числовая последовательность. Определение предела числовой последовательности.
4. Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей.
5. Определение предела функции в точке. Односторонние пределы.
6. Основные теоремы о пределах функций. Два замечательных предела.
7. Непрерывность функции в точке. Непрерывность элементарных функций.

Производная и дифференциал (глава 8)

1. Геометрическая задача, приводящая к понятию производной. Определение производной. Геометрический смысл производной.
2. Теорема о производной сложной функции. Таблица производных.
3. Теоремы Ролля, Лагранжа.

4. Правило Лопиталя. Раскрытие всех видов неопределенностей.
5. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
6. Максимум и минимум функции. Необходимое условие экстремума.
7. Достаточные условия экстремума функции.
8. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
9. Асимптоты графика функции.
10. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Литература

1. Астровский А.И., Дымков М.П. Высшая математика Часть 1. Учебное пособие (с грифом МО РБ). Мн.: БГЭУ, 2009.
2. Астровский А.И., Дымков М.П. Высшая математика Часть II. Учебное пособие (с грифом МО РБ). Мн.: БГЭУ, 2011.
3. Высшая математика: Общий курс. Учеб.- 2-е изд., перераб / А.И. Яблонский, А.В.Кузнецов, Е.И.Шилкина и др.; Мн.: Выш. шк., 2000.
4. Конюх А.В., Косьянчук В.В. Майоровская С.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Минск: БГЭУ, 2008. –Ч.1. – 299 с.
5. Гусак А.А. Высшая математика: В 2 т. Мн.: Университетское, 1984, т. 1, 2.
6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Вышэйшая школа, 1988. Ч. 1, 2.
7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1985.
8. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
9. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
10. Математический анализ в вопросах и задачах. Учеб. пособие для студентов вузов / В.Ф.Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев и др.; М.: Высш.шк., 1984
11. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 1999.

12. Малыхин В.И. Высшая математика. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Инфра-М, 2009. — 365 с.
13. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс / Кузнецов А.В., Кузнецова Д.С., Шилкина Е.И. и др.; Мн.: Вышэйшая школа, 1994.
14. Белько И.В. Высшая математика для экономистов : [в 3 ч.] / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. — 3-е изд., стереотипное. — Москва : Новое знание, 2007. — (Экспресс-курс). 1 семестр — 144 с.
15. Математика в примерах и задачах. Ч.1-4. Под ред. Майсеня Л.И. Учебное пособие для учащихся колледжей. Мн.: МГВРК, 2006-2007.— 226с., 274с., 282с., 248с.
16. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Письменный Д.Т. 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.
17. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. 7-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2008. — 576 с.
18. Решебник. Высшая математика. / Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. 3-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2005. - 368 с.
19. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. Ермакова В.И. М.: Инфра-М, 2003. — 575 с.
20. Справочник по математике для экономистов. Под ред. Ермакова В.И. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Инфра-М, 2009. — 464с.
21. Математика в примерах и задачах. / Журбенко Л.Н., Никонова Г.А. и др. М.: Инфра-М, 2009. — 373 с.
22. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. / Малугин В.А. М.: Эксмо, 2006. — 224 с. — (Высшее экономическое образование).