МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УО «Белорусский государственный экономический университет»

Е.И. Шилкина, М.П. Дымков, В.А. Рабцевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-практическое пособие

Часть 2

Минск 2014

Рекомендовано кафедрой высшей математики

Шилкина, Е.И.
Высшая математика: Часть 2. Учеб.-практ. пособие / Е.И. Шилкина, М.П. Дымков, В.А. Рабцевич. Мн.: БГЭУ, 2014.— 167 с.

Оглавление

Введение

Данная книга является второй частью учебно-практического пособия по высшей математике для студентов всех форм обучения и посвящена изложению основ математического анализа и дифференциальных уравнений. Настоящее пособие основано на практическом опыте чтения математических дисциплин на различных факультетах экономического университета и в нем излагается реальный материал, изучаемый в комплексе лекционных курсов и практических (семинарских) занятий в объеме, не превышающим 100 часов. Авторы не ставят своей задачей дать полное и исчерпывающее изложение курса анализа или его отдельных частей. Основная цель — дать общий, доступный и запоминающийся очерк основных положений и результатов, который бы легко читался и усваивался всяким желающим самостоятельно изучить данный курс в объеме, достаточном для того, чтобы ознакомиться с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач экономики. Тем самым данное пособие будет незаменимым при подготовке студентов экономического университета и для студентов других ВУЗов, где используются типовые программы, разработанные БГЭУ для студентов экономического профиля.

Основной формой обучения студента заочной формы обучения является самостоятельная работа над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение тренировочных заданий, ответы на вопросы теста по пройденным разделам. Данное пособие, имея относительно небольшой объем, в полной мере отвечает упомянутым требованиям — в нем приведен необходимый минимум теоретического материала, указаны вопросы для повторения по каждому разделу, приведены тренировочные задания и их подробные решения, что в совокупности позволяет развить навыки владения математическим аппаратом и углубить понимание основных понятий математического анализа.

Общие рекомендации студенту по работе над математическими курсами

Основной и наиболее плодотворной формой обучения студентов-заочников является самостоятельная работа над учебным материалом, которая может быть представлена в виде следующих этапов: изучение теоретических сведений по учебникам и пособиям, решение задач, самопроверка.

При чтении учебника следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая самостоятельно рекомендуемые к решению задания, восстанавливая все промежуточные вычисления. Весьма полезным является краткое конспектирование изучаемого теоретического материала с выделением в конспекте важнейших формул. Как правило, при сдаче экзамена или зачета, в случае необходимости разрешается воспользоваться таким конспектом.

Чтение учебника или пособия должно сопровождаться решением задач. Решение каждой задачи должно содержать обоснование каждого ее этапа и должно быть доведено до ответа. При этом следует обращать серьезное внимание на правильность арифметических вычислений. Задачи заданного типа необходимо решать до приобретения твердых навыков и только в случае полной уверенности в отработке приемов решения задач данного типа можно пропускать однотипные примеры.

Самопроверка состоит в ответе на теоретические вопросы и решение тренировочных заданий, не заглядывая в ответ. Не стоит расстраиваться и паниковать, если какие-то задания не будут сразу получаться. Нужно попытаться выяснить, из-за чего конкретно не получается правильный ответ, найти аналогичное задание в литературе, а лишь потом обращаться за консультацией, если есть в этом необходимость.

Завершающим этапом изучения курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Основные теоретические сведения

1. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от очень многих факторов, которые могут быть охарактеризованы некоторой совокупностью чисел. Для изучения такого рода зависимостей вводится понятие функции многих переменных и развивается аппарат их исследования.

1.1. Предел и непрерывность функций многих переменных

На случай функций нескольких переменных можно распространить многие понятия и утверждения, установленные выше для функций одной переменной.

1.1.1. Понятие функции многих переменных

Во многих областях науки, техники и экономики встречаются величины, значения которых зависят от двух, трех и более независимых переменных. Например, уровень рентабельности (R) зависит от прибыли (Π) на реализованную продукцию, величин основных (a) и оборотных (b) фондов, что может быть выражено в виде функции трех переменных: $R = \Pi/(a+b)$.

Определение 1.1. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторой области D из пространства R^n соответствует вполне определенное число $z \in R$, то говорят, что задана функция n переменных $z = f(x_1, x_2 ... x_n)$ $(z = f(M))$. Множество D называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Обычно под областью определения аналитически заданной функции подразумевается ее естественная область определения. Множество $E(f) = \{z \in R \mid z = f(M),\ M \in D(f)\}$ называется *областью значений* функции f.

Если $n = 2$, то функция $z = f(M)$ переходит в функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in D \subset R^2$.

1.1.2. Геометрическая иллюстрация функции двух переменных

Определение 1.2. Пусть на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Множество точек $G\{(x, y, f(x, y)),\ \ (x, y) \in D\}$ называется *графиком* функции $z = f(x, y)$.

С геометрической точки зрения данное множество представляет собой некоторую поверхность в пространстве R^3.

Пример 1.1. Найти область определения и область значений функции $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и изобразить ее график.

Решение. Естественная область определения функции задается неравенством $1 - x^2 - y^2 \ge 0$ или $x^2 + y^2 \le 1$ и представляет собой внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат.

Поскольку $0 \le 1 - x^2 - y^2 \le 1$, $0 \le \sqrt{1 - x^2 - y^2} \le 1$,

$0 \ge -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \ge -1$, то множество значений $E(f) = [-1, 0]$.

Графиком этой функции является нижняя половина сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, причем центр сферы $O(0, 0, 0)$ находится в начале координат, а радиус ее равен 1 (рис.1.1).

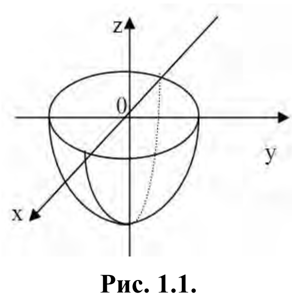


Рис. 1.1.

В некоторых случаях наглядное представление о функции двух переменных может дать картина ее линий уровня.

Определение 1.3. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости $x0y$, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = C$, где $C-$ постоянная, т.е. такая линия плоскости $x0y$, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$.

Пусть, например, $y = f(x_1, x_2)$ есть производственная функция, зависящая от двух факторов x_1 и x_2. Линии уровня задаются уравнением $f(x_1, x_2) = C$, где C — постоянная. Эти линии в экономической литературе называют *изоквантами* (кривые постоянного выпуска). Таким образом, изокванта — это геометрическое место точек (x_1, x_2) из R^2, которым соответствует один и тот же уровень продукции. Иногда эти линии называют кривыми *взаимозаменяемости ресурсов*.

Линию уровня можно построить, спроектировав на плоскость Oxy множество точек пространства R^3, лежащих в пересечении поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $z = C$. Придавая постоянной C различные значения, $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \ldots,$ получим ряд линий уровня, которые дают наглядное представление о поведении рассматриваемой функции. Там, где линии расположены гуще, поверхность, изображающая функцию, будет круче (это означает, что функция изменяется быстрее), а там, где линии реже, функция изменяется медленнее.

1.1.3. Предел функции двух переменных в точке

Определение 1.4. Говорят, что последовательность точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \cdots, M_n(x_n, y_n), \cdots$ плоскости Oxy сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$, если расстояние $d_n = |M_0 M_n| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$

стремится к нулю когда $n \to \infty$.

Определение 1.5. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки M_0, за исключением быть может самой точки M_0. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ в точке M_0, если для любой последовательности точек $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots,$ сходящейся к точке M_0, соответствующая последовательность значений функции $f(M_1), f(M_2), \ldots f(M_n), \ldots,$ сходится к числу *A:* $$A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Важно отметить, что предел функции существует, если он *не зависит от пути* устремления точек $M_1, M_2, ... M_n, ...,$ к точке M_0.

Пример 1.2. Показать, что функция $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $M_0(0,0)$.

Решение. Данная функция определена при всех $M\ (x, y)$ таких, что $(x, y) \neq (0,0)$. Выберем последовательность точек $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, 0), \ldots, M_n(x_n, 0), \ldots,$ такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Такие последовательности, очевидно, существуют. Тогда

$$\lim_{M \to M_0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n{}^2 - 0^2}{x_n{}^2 + 0^2} = 1.$$

Выбирая затем последовательность точек $N_1(0, y_1)$, $N_2(0, y_2), \ldots, N_n(0, y_n), \ldots,$ такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$, получим, что

$$\lim_{N \to M_0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{0^2 - y_n{}^2}{0^2 + y_n{}^2} = -1.$$

Поскольку пределы последовательностей различны, то данная функция не имеет предела в точке $M_0(0,0)$.

Определение 1.5 предела функции $z = f(x, y)$ эквивалентно определению предела на языке « $\varepsilon - \delta$», которое в данном случае звучит следующим образом.

Определение 1.6. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих неравенству $d(M_0, M) < \delta,\ M \neq M_0$, выполняется неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 1.1 (арифметические операции над пределами). Если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют пределы в точке M_0: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A,\ \lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B,$ то и функции $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M),\ \dfrac{f(M)}{g(M)}$ имеют пределы в точке M_0, причем

$$\lim_{M\to M_0} f(M)\pm g(M)=A\pm B;$$

$$\lim_{M\to M_0} (f(M)\cdot g(M))=A\cdot B;\quad \lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)}=\frac{A}{B},\quad B\neq 0.$$

Теорема 1.2 (ограниченность функций, имеющих предел). Если функция $z=f(M)$ имеет в точке M_0 конечный предел, то существует окрестность точки M_0, в которой функция ограничена.

Теорема 1.3. Если функция $z=f(M)$ имеет в точке M_0 предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ и $A>0\quad (A<0)$, то существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M(x,y)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M)>0\quad (f(M)<0)$.

1.1.4. Непрерывность функции двух переменных

Определение 1.7. Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, если она определена в самой точке M_0 и некоторой ее окрестности и выполняется равенство $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0),$ т.е. предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.4. Сумма, разность и произведение непрерывных функций в точке M_0 есть непрерывная функция в точке M_0; частное непрерывных функций есть непрерывная функция, при условии, что знаменатель в точке M_0 не обращается в нуль.

Определение 1.8. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в области R, если она непрерывна в каждой точке этой области, причем непрерывность функции в замкнутой области $\overline{D}$ означает, что функция непрерывна в области D, а в точках M_0 границы области D имеет место непрерывность в смысле определения 1.7 при условии стремления M к M_0 изнутри области D.

Теорема 1.5 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(M)$ непрерывна на ограниченной замкнутой области D, то она ограничена на этой области $\left(|f(M)| < K\right)$ и достигает в некоторых точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ своих наибольшего и наименьшего значений:

$$f(M_1) = \max_{M \in D} f(M) \quad \text{и} \quad f(M_2) = \min_{M \in D} f(M).$$

Теорема 1.6 (Коши). Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она между любыми своими значениями A и B, $A < B$ принимает и все промежуточные значения C: $f(x_0, y_0) = C$, где (x_0, y_0) — некоторая точка D, $A < C < B$.

1.2. Дифференцируемость функции многих переменных

1.2.1. Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Определение 1.9. *Частным приращением* функции z по переменной x в точке M_0 называется разность

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{1.1}$$

Определение 1.10. *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел (если он существует) отношения частного приращения функции z по x к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad (1.2)$$

Частная производная по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначается любым из следующих способов :

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \text{ где } \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (1.3)$$

Пример 1.3. Вычислить по определению частные производные функции $z = x^2 - 3xy + 2y^2$ в точке $M_0(1, 2)$.

Решение. Имеем $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $f(x_0, y_0) = f(1, 2) =$

$=1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 3$; $f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(1 + \Delta x, 2) = (1 + \Delta x)^2 +$

$3(1 + \Delta x)2 + 2 \cdot 2^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 6 - 6\Delta x + 8 = 3 - 4\Delta x + (\Delta x)^2$;

$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = 3 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 = -4\Delta x + (\Delta x)^2$.

Тогда, согласно (1.2), имеем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4 .$$

Аналогично вычисляем

$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(1, 2 + \Delta y) - 3 = 1^2 - 3 \cdot 1(2 + \Delta y) +$

$+2\cdot(2+\Delta y)^2-3=1-6-3\Delta y+8+8\Delta y+2(\Delta y)^2-3=5\Delta y+2(\Delta y)^2$.

Тогда, согласно (1.3) , имеем:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{5\Delta y+2(\Delta y)^2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}(-5+2\Delta y)=5.$$

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-4$; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=5$.

Для нахождения частных производных функции $z=f(x,y)$ следует запомнить **правило**: при вычислении частной производной по x считаем y постоянной и пользуемся правилом дифференцирования функции одной независимой переменной; при вычислении частной производной по y считаем x постоянной и пользуемся этими же правилами дифференцирования (производная постоянной равна нулю; постоянный множитель выносится за знак производной и т.д.).

Пример 1.4. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в произвольной точке $M(x,y)$ для функции $f(x,y)=x^2-3xy+2y^2$ и затем найти их значения $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$, если $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем : $\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2-3xy+2y^2)'_{x,y-const}=$

$$=(x^2)'_{x,y-const}-(3xy)'_{x,y-const}+(2y^2)'_{x,y-const}=2x-3y(x)'+0=2x-3y.$$

Тогда $\frac{\partial z(M_0(1;2))}{\partial x}=2\cdot 1-3\cdot 2=-4$.

Далее: $\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-3xy+2y^2)'_{y,x-const}=$

$$=(x^2)'_{y,x-const}-(3xy)'_{y,x-const}+(2y^2)'_{y,x-const}=0-3x+4y.$$

Значит, $\dfrac{\partial z(M_0(1;2))}{\partial y} = -3\cdot 1 + 2\cdot 4 = 5$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 4y$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5$.

Аналогично (1.2) и (1.3) определяются **частные производные** $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$ **для функции многих переменных**

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Например,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} \tag{1.4}$$

Еще раз напомним, что правила вычисления частных производных функции многих переменных состоят в следующем: частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функции одной независимой переменной, при этом все независимые переменные, кроме той, по которой по которой выполняется дифференцирование, следует считать постоянными.

1.2.2. Дифференцируемые функции

Определение 1.*11. Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{1.5}$$

Определение 1.*2.* Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* M_0, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции можно представить в виде :

$$\Delta z\ (M_0) = A(x_0, y_0)\ \Delta x + B(x_0, y_0)\ \Delta y +$$

$$+ \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y \tag{1.6}$$

где коэффициенты $A(x_{0,}y_0)$ и $B(x_{0,}y_0)$ не зависят от Δx и Δy, а функции $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ являются бесконечно малыми при условии, что величина $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ стремится к нулю.

Пример 1.5. Показать, что функция $z = x^2 + 3xy$ является дифференцируемой в любой точке $M_0(x_{0,}y_0)$.

Решение. Имеем: $f(x, y) = x^2 + 3xy$, $f(x_{0,}y_0) = x_0{}^2 + 3x_0y_0$,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)\cdot(y_0 + \Delta y) =$$

$$= x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0y_0 + 3x_0\Delta y + 3\Delta xy_0 + 3\Delta x\Delta y.$$

Тогда по (1.5) полное приращение $\Delta z\Big|_{M_0}$ имеет вид:

$$\Delta z\Big|_{M_0} = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 3x_0y_0 + 3x_0\Delta y + 3\Delta xy_0 + 3\Delta x\Delta y -$$

$$-x_0{}^2 - 3x_0y_0 = (2x_0 + 3y_0)\Delta x + 3x_0\Delta y + \Delta x\cdot\Delta x + 3\Delta x\Delta y.$$

Сравнивая с (1.6), заключаем, что

$A(x_0, y_0) = 2x_0 + 3y_0, \quad B(x_0, y_0) = 3x_0,$

$\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \Delta x, \quad \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x.$

Значит, функция является дифференцируемой в точке $M_0(x_{0,}y_0)$.

Теорема 1.7. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по всем аргументам : $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$.

Отметим, что как показывает приведенная теорема, взаимоотношение непрерывности и дифференцируемости функции в многомерном случае такое же, как в одномерном. Совсем иначе обстоит дело во взаимоотношениях частных производных и дифференцируемости. В случае одной переменной дифференцируемость и наличие производной были условиями равносильными. Для функций многих переменных **наличие частных производных не гарантирует дифференцируемость**. Однако, как показывает следующая теорема, уже **непрерывность частных производных обеспечивает дифференцируемость**.

Теорема 1.8. Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_{0,}y_0)$ существуют частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ и они непрерывны в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$.

1.2.3. Полный дифференциал функции многих переменных

Определение 1.*13*. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_{0,}y_0)$, то линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения функции называется полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ и обозначается $dz(M_0)$.

С учетом (1.6) и теоремы 1.7 справедливо следующее представление полного дифференциала:

$$dz(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\,\Delta y \tag{1.7}$$

Если принять по определению за дифференциалы независимых переменных x и y их приращения Δx и Δy, т.е. положить $dx =$ Δx и $dy =$ Δy, то (1.7) примет вид :

$$dz(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\,d\,y \tag{1.8}$$

Пример 1.6. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2+y^2))'_{x,y-const} =$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$ Тогда $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \frac{2\cdot 1}{1^2+2^2} = \frac{2}{5}.$$

Далее находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2+y^2))'_{y,x-const} = \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad .$$

Тогда $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{2\cdot 2}{1^2+2^2} = \frac{4}{5}.$$

Согласно (1.8) получаем полный дифференциал

$$dz(M_0) = 0,4dx + 0,8dy\,.$$

Ответ: $dz = 0,4dx + 0,8dy$

1.2.4. Приложения полного дифференциала в приближенных вычислениях

Поскольку для дифференцируемой функции разность между полным приращением и полным дифференциалом есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx и Δy, то справедлива формула приближенного вычисления значений функции:

$$f(x_0+\ \Delta x,\, y_0+\ \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ \Delta y \quad (1.9)$$

Пример. 1.7. Вычислить приближенно $\sqrt{4,03^2+2,99^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда искомое число есть значение этой функции в точке $x = x_0 + \Delta x = 4,03$, $y = y_0 + \Delta y = 2,99$. Выбирая $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, получим $\Delta x = 0,03$; $\Delta y = -0,01$. Далее находим значения функции и ее частных производных в точке $M(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{4^2+3^2} = 5\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\left.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=3,\\ y=4}}=\frac{4}{5},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|_{\substack{x=3,\\ y=4}}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3}{5}.$$

Применяя теперь формулу (1.9), находим

$$\sqrt{4,03^2+2,99^2}\approx 5+\frac{4}{5}\cdot 0,03+\frac{3}{5}(-0,01)=5,018.$$

1.2.5. Производные высших порядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x{}'(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y{}'(x,y)$, где $(x,y)\in D_{1,}$ D_1 – некоторая подобласть области D, на которой определена функция $z=f(x,y)$. Значит, на D_1 заданы две новые функции двух переменных, а именно $u=\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $v=\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ и можно находить их частные производные по переменным x и y. Эти частные производные и называются *частными производными второго порядка* или вторыми частными производными функции $z=f(x,y)$.

Итак, по определению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}{}''(x,y)=f_{x^2}{}''(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{xy}{}''(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{yx}{}''(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}{}''(x,y)=f_{y^2}{}''(x,y),$$

причем, частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются *смешанными частными производными*.

Пример 1.8. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^3$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^3 y^2)'_{x,y-const} = y^2 (x^3)_x{}' = 3x^2 y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 y^2)'_{y,x-const} = x^3 (y^2)_y{}' = x^3 \cdot 2y = 2x^3 y \;;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = y^2 (3x^2)_x{}' = y^2 \cdot 6x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 y) = 2x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 y) = y \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^2) = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2 y = 6x^2 y;$$

Следующая теорема дает условия, при которых результат частного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 1.9. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ непрерывные смешанные частные производные второго порядка, то они равны между собой: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

1.3. Экстремум функции многих переменных

Одним из важнейших применений дифференциального исчисления, как и в случае функций одной переменной, так и для функций многих переменных является его использование для отыскания и исследования экстремумов функций.

1.3.1. Понятие экстремума. Необходимое условие экстремума

Определение 1.*14*. Говорят, что функция $z = f(M)$, определенная и непрерывная в области D, имеет в точке $M_0 \in D$ *строгий максимум (строгий минимум),* если для всех точек M из некоторой окрестности точки M_0 выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \qquad (f(M) > f(M_0)) \tag{1.10}$$

Данное определение носит локальный характер, причем, если неравенства (1.10) выполняются, как нестрогие неравенства со знаками $\leq (\geq)$ соответственно, то максимум и минимум называются *нестрогими* или несобственными. Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин – *экстремум*.

Теорема 1.10 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в ней экстремум, то обе частные производные функции в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Определение 1.*14*. Все точки $M_0(x_0, y_0)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (1.11), называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$.

Заметим также, что функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в тех точках, где она является непрерывной, но хотя бы одна из частных производных не существует или равна бесконечности. Объединение таких точек и стационарных точек принято называть критическими точками функции многих переменных.

В некоторых случаях вопрос о наличии экстремума функции многих переменных можно решить на основании лишь необходимого условия экстремума.

Пример 1.10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$.

Решение. Найдем частные производные $z_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ и приравняем их к нулю :

$$z'_x = (x^2 + y^2)'_x = 2x\,;\ z'_y = (x^2 + y^2)'_y = 2y\,.$$

Составим систему (1.11): $\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$.

Отсюда $x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$ и, следовательно, точка $M_0(0,0)$ – стационарная точка. Так как для функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ имеем $z = f(0,0) = 0$, а для любых других точек, таких что $M(x, y) \neq M_0(0,0)$, выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$, то в точке M_0 данная функция имеет строгий минимум (см. рис. 1.3).

Ответ: $z_{\min} = f(0,0) = 0$.

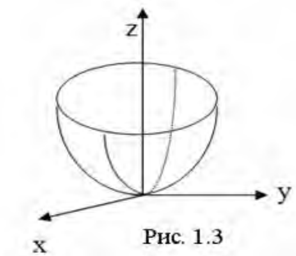


Рис. 1.3

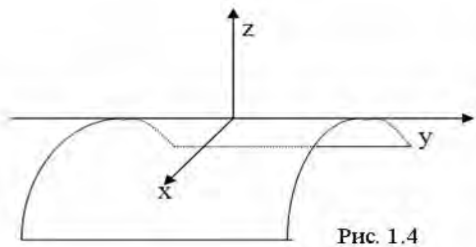


Рис. 1.4

Пример.4.11. Исследовать на экстремум функцию

$$z = f(x, y) = -x^2\,.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$z'_x = f'_x(x, y) = (-x^2)'_x = -2x\,; \qquad z'_y = f'_y(x, y) = (-x^2)'_y = 0.$$

Составим систему (1.11): $\begin{cases} -2x = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$. Отсюда заключаем, что решением системы являются: $x_0 = 0$, y – любое действительное число. Значит, все точки оси Oy вида $M_0(0, y)$ – стационарные. Поскольку для любых точек, таких что $M(x, y) \neq M_0(0, y)$, имеем

$f(M) = -x^2$, а $f(M_0) = 0$, то выполняется неравенство $f(M) \le f(M_0)$. Следовательно, в любой точке оси $0y$ функция имеет нестрогий максимум (см. рис.1.4).

Ответ: $z_{\max} = f(0, y) = 0$.

Пример 1.12. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. Данная функция определена и непрерывна во всей области R^2; ее частные производные

$$z_x{}' = (1 - \sqrt{x^2 + y^2})_x{}' = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и
$$z_y{}' = (1 - \sqrt{x^2 + y^2})_y{}' = -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не существуют в точке $M_0(0,0)$. Поскольку в точке M_0 функция непрерывна, $f(M_0) = f(0,0) = 1$, а во всех других точках, таких что $M(x, y) \ne M_0(0,0)$, для функции $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$, то в точке M_0 функция имеет строгий максимум.

В общем случае использование только необходимого условия экстремума не позволяет решить вопрос о наличии экстремума функции многих переменных.

Пример 1.13. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$.

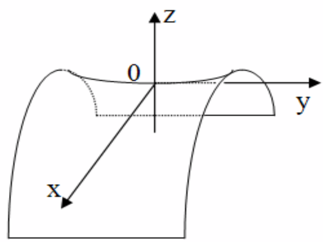


Рис. 1.5

Решение. Найдем частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = (xy)'_x = y, \; z'_y = (xy)'_y = x$$

и составим систему (1.11), решением которой являются $y_0 = 0$, $x_0 = 0$. Следовательно, точка $M_0(0,0)$ – стационарная точка. Выберем теперь два типа точек: вначале точки $M(x,y)$ вида $M(x,y) = (\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$, и для них имеем $f(M) = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 > 0$; а затем точки $M(x,y)$ вида $M(x,y) = (\varepsilon, -\varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$, для которых уже имеем $f(M) = \varepsilon \cdot (-\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$. Поскольку $f(M_0) = 0 \cdot 0 = 0$, то данная функция в точке $M_0(0,0)$ экстремума не имеет (см. рис. 1.5).

Приведенный пример показывает, что найденные критические точки функции требуют, вообще говоря, дальнейшего анализа в отношении того, являются они точками экстремума или нет.

1.3.2. Достаточные условия экстремума

Теорема 1.11 (*достаточное условие экстремума* функции двух переменных). Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Если выполняются условия:

1) частные производные первого порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$

равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$;

2) для чисел $A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$

выполняется неравенство:

а) $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет экстремум, причем минимум, если $A > 0$ и максимум, если $A < 0$;

б) $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в этой точке экстремума нет.

Если $\Delta = 0$, то нужны дополнительные исследования.

Пример 1.14. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого и второго порядков: $z'_x = f'_x(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = 3x^2 - 3y$;

$z'_y = f'_y(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 3y^2 - 3x$;

$z''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$;

$z''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3$; $\quad z''_{yy} = (3x^2 - 3y)'_y = 6y$.

Составляем систему (1.11): $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$ из которой находим две стационарные точки $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$.

В точке M_0 имеем $A = 6x\Big|_{(0;0)} = 0$, $C = 6y\Big|_{(0;0)} = 0$, $B = -3$,

$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-3)^2 = -9$. Так как $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_0 нет. В точке M_1 имеем: $A = 6x\Big|_{(1;1)} = 6$, $C = 6y\Big|_{(1;1)} = 6$, $B = -3$, $\Delta = AC - B^2 = 36 - (-3)^2 = 27$.

Так как $\Delta < 0$ и $A > 0$, то в точке M_1 функция имеет минимум, который равен

$z_{\min} = f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = f(1,1) = -1$.

1.4. Метод наименьших квадратов

В различных экономических и других практических задачах часто возникает необходимость установления аналитической зависимости между интересующими переменными, которые заданы, например, в виде статистических данных за определенный период. Одним из распространенных способов решения подобных задач является метод наименьших квадратов, который основывается, по сути, на нахождении экстремума функций нескольких переменных.

1.4.1. Понятие эмпирической формулы

Важное значение имеет следующая задача: требуется установить вид функциональной зависимости между двумя переменными величинами x и y по результатам n экспериментальных измерений, приведенных в таблице 1.1:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Табл.1.1.

Иначе говоря, требуется выразить зависимость между x и y аналитически, т.е. указать формулу, связывающую между собой соответствующие значения переменных. Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, принято называть *эмпирическими формулами.*

Следует заметить, что подбор эмпирической формулы не ставит задачу разгадать истинный вид зависимости – эта задача математически неразрешима. Ставится задача подобрать формулу, в каком-то смысле наилучшим образом отображающую полученные результаты. Для этой цели применяются различные методы. Можно построить многочлен, принимающий в данных точках x_i значения y_i, приведенные в табл. 1.1. Достоинство этого метода в том, что полученная формула точно воспроизводит заданные значения. Такого рода формулы называются *интерполяционными.* Здесь по двум точкам строится прямая, по трем точкам – парабола, по n точкам – многочлен степени $(n-1)$, т.е. с ростом n степень многочлена растет.

Можно разбить опытные данные на тройки точек, а затем по каждой тройке точек строить параболу. Получится функция, «склеенная» из парабол. Достоинства такого способа состоят в том, что, во-первых, данные табл.1.1 отображаются точно, во-вторых, степень многочлена невысокая (вторая). Недостатком является громоздкая запись и недифференцируемость полученной функции в местах «склейки». Такой подход называется сплайн-интерполяция.

Третий **способ** заключается в следующем. Исходя из некоторых теоретических или практических соображений (например, конфигурации расположения точек на координатной плоскости) подбирается наиболее простая формула, которая дает наилучшее совпадение с опытными данными. Наиболее типичными в экономических исследованиях являются формы зависимостей в виде линейной $(y = a_0 x + a_1)$, квадратичной $(y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2)$, степенной $(y = a_0 x^{a_1})$, логарифмической $(y = a_0 \log_{a_1} x)$, показательной $(y = a_0 \cdot {a_1}^x)$ и обратно-пропорциональной $(y = a_0 + \dfrac{a_1}{x})$ функций. Слова «наилучшее совпадение» понимаются здесь в том смысле, что из данного множества формул вида $y = f(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ наилучшей считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от вычисленных по формуле значений $y = f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)$ является наименьшей. Описанный третий способ построения эмпирической формулы называется *методом наименьших квадратов*, а вычисленные путем решения задачи

$$S(a_0, a_1, ... a_m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_0, a_1, ... a_m))^2 \to \min$$

значения параметров ${a_0}^0, {a_1}^0, ..., {a_m}^0$ задают наилучшую в смысле метода наименьших квадратов формулу $y = f(x, {a_0}^0, {a_1}^0, ... {a_m}^0)$. Исходя из необходимых условий экстремума функций многих переменных, минимум функции $S(a_0, a_1, ..., a_m)$ будет в тех точках, где частные производные $\dfrac{\partial S}{\partial a_0}, \dfrac{\partial S}{\partial a_1}, \dots \dfrac{\partial S}{\partial a_m}$ обращаются в нуль. Таким образом, получается система $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a_0, ..., a_m) - y_i] \cdot \frac{\partial f(x_i, a_0, ..., a_m)}{\partial a_j} = 0, \ j = 0,1,2,...,m,$$

именуемую *нормальной системой метода наименьших квадратов.*

1.4.2. Выравнивание экспериментальных данных по прямой

Пусть для данных табл. 1.1 из теоретических или практических соображений известно, что эмпирическую функцию следует искать в виде $y = a_1 x + a_0$. Тогда наилучшие значения параметров a_1 и a_0 являются решением нормальной системы метода наименьших квадратов, которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Пример 1.15. Рост среднемесячной зарплаты сотрудников фирмы за 5 лет отражен в следующей таблице:

Годы	1	2	3	4	5
Средняя зарплата (у.е.)	235	250	270	292	300

Полагая эту зависимость линейной, установить ее аналитическую форму.

Решение. Уравнение искомой зависимости будем искать в виде $y = a_1 x + a_0$. Коэффициенты системы (1.11) удобно вычислять с помощью расчетной таблицы, в столбцы которой заносим исходные данные, а также требуемые для коэффициентов системы (1.12) промежуточные вычисления:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	235	1	235
2	2	250	4	500
3	3	270	9	810
4	4	292	16	1168
5	5	300	25	1500
Итого:	15	1347	55	4213

Табл.1.2.

По последней строке табл.1.2 составляем систему (1.11), которая примет вид:

$$\begin{cases} 55a_1 + 15a_0 = 4213, \\ 15a_1 + 5a_0 = 1347. \end{cases}$$

Вычитая от первого уравнения утроенной третье, получим $10a_1 = 172$, откуда $a_1 = 17,2$. Тогда второе уравнение примет вид: $15 \cdot 17,2 + 5a_0 = 1347$, откуда $a_0 = 217,8$. Значит, искомая зависимость имеет вид: $y = 17,2x + 217,8$.

1.4.3. Выравнивание экспериментальных данных по параболе

Пусть экспериментальные данные из табл. 1.1 располагаются вблизи некоторой параболы так, что между переменными x и y можно предположить наличие зависимости, которая выражается формулой $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Тогда, следуя методу наименьших квадратов, надо найти минимум по a_0, a_1, a_2 функции трех переменных $S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n}(a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i)^2$. Вычисляя частные производные $\frac{\partial S}{\partial a_0}$, $\frac{\partial S}{\partial a_1}$, $\frac{\partial S}{\partial a_2}$ и приравнивая их к нулю, получаем нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по параболе:

$$\begin{cases} a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Решая эту систему, находим требуемые a_2^0, a_1^0 и a_0^0, так что искомое уравнение квадратичной зависимости есть $y = a_2^0x^2 + a_1^0x + a_0^0$.

1.4.4. Выравнивание экспериментальных данных по гиперболе

Если есть основания полагать, что зависимость между переменными x и y обратно-пропорциональная (такая зависимость имеет, например, место для связи между объемом выпускаемой продукции x и себестоимостью y единицы продукции), то эмпирическая формула ищется в виде $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$. В этом случае система нормальных уравнений метода наименьших квадратов будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \quad . \end{cases} \tag{1.14}$$

2. Интегральное исчисление

Основной задачей *дифференциального исчисления* является нахождение производной функции $f'(x)$ для заданной функции $f(x)$. В *интегральном исчислении* решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции по известной ее производной.

2.1. Неопределенный интеграл

Первичными понятиями интегрального исчисления являются понятия *первообразной* и *неопределенного интеграла.*

2.1.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла

Определение 2.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{2.1}$$

или, что то же самое,

$$dF(x) = f(x)dx, \tag{2.2}$$

причем равенства (2.1) и (2.2) выполняются для всех $x \in (a;b)$.

Аналогичным образом определяется первообразная для других промежутков вида $(-\infty,+\infty)$, $[a,b]$, понимая в последнем случае односторонние производные.

Задача об отыскании первообразных решается неоднозначно. Действительно, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, так как

$$(F(x)+C)' = (F(x))' = f(x).$$

Более того, если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные для $f(x)$ на $(a;b)$, то для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C,$$

где C — некоторая фиксированная постоянная. Другими словами, если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то множество вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, описывает *все* первообразные для данной функции.

Определение 2.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на (a,b) называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2.3}$$

где C – константа. В записи (2.3) символ «$\int$» называется интегралом, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

С геометрической стороны, неопределенный интеграл — это однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр семейства), обладающих свойством: все касательные к кривым в одной точке x параллельны между собой.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется *интегрированием* функции. Так как эта операция является обратной для операции дифференцирования, то верность интегрирования проверяется дифференцированием функции, полученной в результате решения.

Например, если $f(x) = \sin 2x$, то $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, так как

$$F'(x) = (-\frac{1}{2}\cos 2x + C)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + 0 = \sin 2x.$$

2.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Справедливы следующие свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \text{ (или } \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx \text{);}$$

2) интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ (или } \int d(F(x)) = F(x) + C\text{)}.$$

(Свойства 1 и 2 говорят, что операции « $'$ » и «$\int$» взаимно сокращаются, если отвлечься от постоянного слагаемого во второй формуле).

3) неопределенный интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4) постоянный множитель, отличный от нуля, можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

2.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Ранее была получена таблица производных простейших элементарных функций, которые составили основу вычислительного аппарата в дифференциальном исчислении. Так как интегрирование есть в известном смысле операция, обратная к дифференцированию, то таблица интегрирования в принципе может быть получена путем обращения таблицы дифференцирования. Например, в таблице дифференцирования было: $(\sin x)' = \cos x$. Теперь эту формулу можно как бы прочесть справа-налево: $\int \cos x dx = \sin x + C$. Таким образом, мы элементарно получаем следующую таблицу основных интегралов:

1) $\int 0dx = C;$

2) $\int 1dx = x + C;$

3) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0);$

5) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0, \quad a \neq 1), \quad \int e^{x}dx = e^{x} + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z);$

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C \quad (x \neq \pi n, \quad n \in Z);$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin\dfrac{x}{|a|} + C = -\arccos\dfrac{x}{|a|} + C, \; (a \neq 0, \; |x| < |a|);$

11) $\int \dfrac{dx}{x^{2} + a^{2}} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$

12) $\int \dfrac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0, \; |x| \neq |a|);$

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} + a}\right| + C \quad (a \neq 0, \quad x^{2} + a > 0).$

Правильность полученных формул можно проверить путем дифференцирования.

Замечание 1. Если первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в *элементарных функциях*. Отметим, что операция дифференцирования не выводила нас из класса элементарных функций (т.е. если мы брали элементарную функцию $f(x)$, то ее производная $f'(x)$ тоже оставалась элементарной). Однако операция интегрирования этим свойсвом уже не обладает. Например, интегралы $\int e^{-x^2}dx$ (интеграл Пуассона), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (интегралы Френеля), $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(x>0, \quad x\neq 1)$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ хотя и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Такие интегралы называются *неберущимися.* Поскольку они находят приложения, например, в теории вероятностей, физике и других областях, то для них составлены специальные таблицы.

2.1.4. Непосредственное интегрирование. Поднесение под знак дифференциала

Непосредственное интегрирование основано на применении таблицы интегралов, свойств неопределенного интеграла и на тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Пример 2.1.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \operatorname{tg} x + C_1 - \int 1\cdot dx = \operatorname{tg} x + C_1 - x + C_2 = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 2.2. Найти интеграл I и результат проверить:

$$I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}} + \frac{3}{x^2-9} \right) dx.$$

Решение. Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, получаем:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx + 3\int \frac{1}{x^2-9}dx =$$

$$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + \frac{3}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

Проверка. Найдем производную ответа:

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C\right)'=$$

$$=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}})'+2(\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|\right)'=$$

$$+\frac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x+3|)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)'+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+5}}\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)'+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x+3)}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2}}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+5}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}(2x)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(x+3)-(x-3)}{(x^2-9)}=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{2}{(x+\sqrt{x^2+5})}\frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{1}{2}\frac{6}{(x^2-9)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{3}{x^2-9}.$$

Поскольку производная совпадает с подынтегральной функцией, то интегрирование осуществлено верно.

Весьма полезным приемом интегрирования является *поднесение под знак дифференциала* некоторого выражения и использование потом свойства неопределенного интеграла:

$$\int dF(x)=F(x)+C \quad \text{или} \quad \int F'(x)dx=F(x)+C.$$

Например, $\int \sin 2xdx=\frac{1}{2}\int \sin 2xd(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C;$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,xdx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,2xdx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{1/2}d(1+x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Полезно запомнить такие **преобразования дифференциала**:

1) $dx = d(x+b)$;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax), \quad a \neq 0$;

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b), \quad a \neq 0$;

4) $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$;

5) $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$;

6) $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$;

7) $\frac{1}{x^2} dx = -d(\frac{1}{x})$;

8) $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x})$;

9) $\sin x dx = -d(\cos x)$;

10) $\cos x dx = d(\sin x)$;

11) $\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tgx)$;

12) $\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(ctgx)$;

13) $e^x dx = d(e^x)$;

14) $a^x dx = \frac{d(a^x)}{\ln a}$.

Пример 2.3. Найти неопределенные интегралы с помощью поднесения под знак дифференциала:

а) $\int \cos^3 x dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 2}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$; г) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

Решение.

а) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$

$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

б) $$\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{(x^2+1)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)+C.$$

в) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} = \int (\operatorname{ctg} x)^{-1/3}\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-1/3} d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\frac{(\operatorname{ctg} x)^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+C.$$

г) $$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2} =$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

2.2. Основные методы интегрирования

К сожалению, общего метода интегрирования нет, тем не менее, ниже мы укажем некоторые приемы вычисления интегралов. Сравнительно в редких случаях удается дать *правила* для интегрирования.. Но и тогда, когда имеются эти правила, они вовсе не являются наилучшим, или наиболее экономным путем. Вычисление чаще всего может быть выполнено не единственным способом (это своеобразное искусство!). Владение операцией интегрирования (как и многими другими математическими операциями) заключается не только в знании того как *можно* в конце концов взять интеграл, но и в умении сделать это с наименьшей затратой времени и труда.

2.2.1. Замена переменной в неопределенном интеграле

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется *методом подстановки или методом замены переменной*.

Теорема 2.1. Пусть требуется найти интеграл $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, где подынтегральная функция непрерывна и известно, что $\int f(t)\,dt = F(t) + C$. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(\phi(x))\,d\phi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Теорема 2.2. Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Если $\varphi(t)$ – строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\phi'(t)$, и при $x = \varphi(t)$, $dx = \phi'(t)\,dt$ справедливо равенство $f(x) = f(\varphi(t)) = g(t)$, причем $\int g(t)\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C$, то

$$\int f(x)dx = G(\psi(x)) + C,$$

где $\psi(x)$ – обратная функция для функции $x = \varphi(t)$.

Полезно запомнить формулу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \tag{2.4}$$

С помощью этой формулы можно вычислять, например, интегралы вида $\int \operatorname{tg} x\,dx$, $\int \operatorname{ctg} x\,dx$, $\int \frac{dx}{ax+b}$, $a \neq 0$, а так же и другие интегралы. Например, $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$;

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C;$$

$$\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}dx = \int \frac{(x^3-2x-1)'}{x^3-2x+1}dx = \ln|x^3-2x+1| + C.$$

Пример 2.4. Используя метод подстановки, найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

Решение. Выполним подстановку $\ln x = t$, $d(\ln x) = dt$, $\frac{1}{x}dx = dt$. Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left|\ln x + \sqrt{1+\ln^2 x}\right| + C.$$

Пример 2.5. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$ методом подстановки.

Решение. Пусть $x = t+1$, $dx = d(t+1)$, $dx = dt$.
Тогда

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^3}{t^2}dt + \int \frac{3t}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^2}dt = \int tdt + 3\int 1dt + \int \frac{3}{t}dt + \int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Интегралы, содержащие иррациональные выражения вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ или $\sqrt{x^2-a^2}$, можно вычислить с помощью тригонометрических подстановок. Например, для $\sqrt{a^2-x^2}$ применяют подстановку $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$ (или $x = a\cos t$, $dx = -a\sin t dt$); для $\sqrt{x^2+a^2}$ применяют подстановку $x = a\ \mathrm{tg}\, t$, $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$ (или $x = a\ ctg\, t$, $dx = -\frac{a}{\sin^2 t}dt$); для $\sqrt{x^2-a^2}$ применяют подстановку $x = \frac{a}{\sin t}$ или $x = \frac{a}{\cos t}$.

Пример 2.6. Найти $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = [x=\sin t, \quad dx=\cos t dt, \quad t=\arcsin x, \quad -1\le x\le 1 \ ] =$$

$$=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \operatorname{ctg}^2 t dt = \int (\frac{1}{\sin^2 t}-1)dt =$$

$$=\int \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int 1 dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

2.2.2. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида $\int R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{s}{t}})dx$, где $R-$ рациональная функция, $p,q,...,s,t-$ целые числа, находятся с помощью подстановки $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $m-$наименьшее общее кратное чисел $q,...,t$.

Пример 2.7. Найти $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx.$

Решение. Пусть $t=\sqrt[6]{1+x}$, тогда

$$x=t^6-1, \ dx=6t^5dt, \quad \sqrt{1+x}=t^5, \quad \sqrt[3]{1+x}=t^2.$$

Следовательно, $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt =$

$$=6\int \left(t^9+t^6-t^3\right)dt = 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C, \quad \text{где} \quad t=\sqrt[6]{1+x}.$$

2.2.3. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида:

$\int \sin ax \cos bx dx,$ $\int \cos ax \cos bx dx,$ $\int \sin ax \sin bx dx,$ где $a \neq b$, находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Пример 2.8. Найти $\int \sin 2x \sin 4x dx.$

Решение. $\int \sin 2x \sin 4x dx = \int \frac{1}{2}(\cos(2x-4x) - \cos(2x+4x))dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R-$рациональная функция. Если выполнено равенство $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. подынтегральная функция является нечетной по $\sin x$, то используем подстановку $t = \cos x$; если выполнено равенство $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. подынтегральная функция является нечетной по $\cos x$, то применяем подстановку $t = \sin x$, если выполнено равенство $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 2.9. Найти $\int \cos^3 x dx$.

Решение. Пусть $t = \sin x, \quad dt = \cos^3 x dx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Тогда $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx =$

$$= \int (1 - t^2) dt = \int 1 \cdot dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Если ни одно из вышеуказанных равенств не выполняется, то целесообразно применять так называемую *универсальную* тригонометрическую подстановку $t = tg\frac{x}{2}$,

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + y^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t, \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Пример 2.10. Найти $\int \frac{dx}{\sin x + 5\cos x + 5}$.

Решение. Выполняя подстановку $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, получаем

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 5\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t + 5 - 5t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{2dt}{2t + 10} = \int \frac{dt}{t + 5} =$$

$$= \ln|t + 5| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2} + 5\right| + C.$$

2.2.4. Интегрирование по частям

К числу весьма эффективных методов интегрирования относится *метод интегрирования по частям*. Он основываетсяна следующем утверждении.

Теорема 2.3. Если функция $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на некотором множестве X и, кроме того, на этом множестве существует интеграл $\int v(x)u'(x)dx$, то на множестве X существует и интеграл $\int u(x)v'(x)dx,$ причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (2.5)$$

Определение дифференциала и инвариантность его формы позволяют записать формулу (2.5) в виде, удобном для запоминания:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Следует заметить, что неудачный выбор функции u и v может привести к более сложному интегралу, чем исходный интеграл.

Пример 2.11. Найти $\int x\cos xdx.$

Решение. Пусть $u = \cos x,\quad dv = xdx.$ Покажем, что такой выбор функций u и v является неудачным. Действительно, так как $du = -\sin xdx,\quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$, то по формуле (2.5) имеем:

$$\int x\cos xdx = \cos x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin xdx.$$

Получили, что $\int \frac{x^2}{2}\sin xdx$ сложнее, чем исходный интеграл.

Положим теперь $u = v,\quad v = \int \cos x dx = \sin x.$ Тогда по формуле (2.5) имеем: $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

Существует **ряд рекомендаций по выбору функций** u **и** v в основных трех типах интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям с помощью формулы (2.5).

1. Интегралы вида $\int \begin{Bmatrix} \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \\ \ln x \\ \ln(\phi(x)) \end{Bmatrix} P_n(x)dx$

вычисляются подстановкой
$u = g(x),$ где $g(x) -$ функция из $\{\ \}$, а $dv = P_n(x)dx$.

2. Интегралы вида $\int P_n(x) \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} dx$

вычисляются подстановкой
$u = P_n(x),\quad dv = \{\ \}dx,$ причем формулу интегрирования по частям нужно применять n раз.

3. Интегралы вида

$\int e^{ax}\cos bx dx,\quad \int e^{ax}\sin bx dx,\quad \int \sin(\ln x)dx,\quad \int \cos(\ln x)dx,$

$\int \sqrt{x^2 + a}dx,\quad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx,\quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ и некоторые другие вычисляются с помощью применения формулы интегрирования по частям дважды, причем дважды выбирают тригонометрическую, либо дважды показательную функцию и получают линейное уравнение относительно исходного интеграла.

Пример 2.12. Найти $\int \ln x dx$.

Решение. $\int \ln x dx = \left[u = \ln x,\ dv = dx,\ du = \frac{1}{x}dx,\ v = x \right] =$

$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

Пример 2.13. Найти $\int \arcsin x dx$.

Решение.

$$\int \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x \right] =$$

$$x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sqrt{1-x^2} = t, \quad 1 - x^2 = t^2, \quad -2xdx = 2tdt \right] =$$

$$== x \arcsin x + \int \frac{tdt}{t} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 2.14. Найти $\int e^{3x} \cos 2x dx$.

Решение. $I = \int e^{3x} \cos 2x dx =$

$$= \left[u = e^{3x}, \quad dv = \cos 2x dx, \quad du = 3e^{3x}dx, \quad v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x dx = \left[u = e^{3x}, \quad dv = \sin 2x, \quad du = 3e^{3x}, \right.$$

$$\left. v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \quad \right] = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x -$$

$$-\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx) = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}I.$$

Значит, $I = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}I.$

Отсюда $I = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + C.$

Пример 2.15. Найти $\int \sqrt{x^2+5}dx.$

Решение.

$$I=\int \sqrt{x^2+5}dx=\left[u=\sqrt{x^2+5},\quad dv=dx,\quad du=\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2+5}},\quad v=x\ \right]=$$

$$=x\sqrt{x^2+5}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx=x\sqrt{x^2+5}-\int \frac{x^2+5-5}{\sqrt{x^2+5}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+5}-\int \sqrt{x^2+5}dx+5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}=x\sqrt{x^2+5}-I+5\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|.$$

Отсюда $I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C.$

2.2.5. Интегрирование рациональных функций

Теорема 2.4. Если $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь (т.е. степень многочлена в числителе меньше, чем степень многочлена в знаменателе), то $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ всегда выражается в элементарных функциях.

Разложим $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители с дискриминантом, меньшим нуля:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\times$$

$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r},$$

где $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_k, \beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_r$ – целые числа, большие или равные 1, то $R(x)$ может быть разложена на простешие дроби по следующей схеме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-a_k}+\frac{B_2}{(x-a_k)^2}+$$

$$\ldots+\frac{B_{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+p_rx+qr}+\ldots+\frac{R_{\beta_r}x+S_{\beta_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}},$$

где $A_1, A_2, \ldots M_1, N_1, \ldots R_{\beta_r}, S_{\beta_r}$ – некоторые числа, называемые *неопределенными коэффициентами.*

Интегралы от простейших дробей вычисляются следующим образом:

1. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

Например, $\int\frac{3dx}{x+5}=3\ln|x+5|+C$.

2. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\int A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C\ .$$

Например, $\int\frac{4dx}{(x-2)^3}=4\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+C=-\frac{2}{(x-2)^2}+C.$

3. $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\left[x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt,\right.$$

$$\left.q-\frac{p^2}{4}=a^2>0-\right]=\int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{y^2+a^2}dt=\int\frac{Mtdt}{t^2+a^2}-\int\frac{N-M\frac{p}{2}}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+(N-\frac{Mp}{2})arctg\frac{t}{a}+C=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

4. Интегралы вида $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $k\ge 2$, вначале разбиваются на два интеграла, один из которых вычисляется подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$, второй – этой же подстановкой, потом интегрированием по частям и понижением порядка.

Пример 2.16. Найти $\int\frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx.$

Решение. Поскольку степень числителя выше степени знаменателя, то вначале выделяем целую часть алгебраической дроби, деля числитель на знаменатель: $\frac{x^3-5}{x^2-6x+5}=x+6+\frac{31x-35}{x^2-6x+5}$.

Тогда

$$\int\frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx.=\int(x+6)dx+\int\frac{31x-35}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+6x+I,$$

где $I=\int\frac{31x-35}{x^2-6x+5}dx$.

Пусть $\frac{31x-35}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}$. Тогда приводя к общему знаменателю, получим $\frac{31x-35}{x^2-6x+5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$.

Отсюда $31x-35=(A+B)x-5A-B$. Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B составим систему

$$\begin{cases}A+B=31,\\5A+B=35,\end{cases}\Rightarrow 4A=4,\quad A=1,\quad B=30.$$

Значит, $I = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{30}{x-5}dx = \ln|x-1| + 30\ln|x-5| + C.$

Окончательно получим

$$\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx = \frac{x^2}{2} + 6x + \ln|x-1| + 30\ln|x-5| + C.$$

Пример 2.17. Найти $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$.

Решение. Поскольку $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$, то разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет следующий вид:

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4} =$$

$$\frac{A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)(x^2+4)};$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x +$$

$$+(-16A-8B+8D) = 9x^3-30x^2+28x-88.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3:\ A+B+C=9;$

$x^2:\ -4A-2B-6C+D=-30;$

$x\ :\ 4A+4B+8C+6D=28;$

$x^0:\ -16A-8B+8D=88.$

Решая эту систему уравнений, находим

$A=5,\quad B=3,\quad C=1,\quad D=2.$

Вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно при нахождении неопределенных коэффициентов A, B, C и D воспользоваться **методом произвольных значений**. Для этого в равенство $9x^3 - 30x^2 + 28x - 88 =$ $= A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x-4)$ подставим вместо x последовательно значения $x=2,\quad x=4,\quad x=0,\quad x=1.$

Тогда получится система уравнений:

$$-16A = -80,\quad 40B = 120,\quad -16A - 8B + 8D = -88,$$

$$-15A - 5B + 3C + 3d = -81.$$

Отсюда получаем те же числа $A=5,\quad B=3,\quad C=1,\quad D=2.$

Итак, окончательно имеем

$$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx = \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{xdx}{x^2+4} + \int \frac{2dx}{x^2+4} =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + arctg\frac{x}{2} + C.$$

2.3. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла возникло и постепенно укрепилось в своем значении, когда целый ряд задач, в первую очередь геометрии и механики, привел к необходимости осуществлять над функциями одну и ту же аналитическую операцию, содержание которой составлял *предельный переход некоторого совершенно определенного типа*. Надо отметить, что интегральное исчисление первоначально развивалось независимо от учения о дифференцировании. Только к концу XVII столетия, когда обе эти ветви получили уже значительное развитие и научились решать — каждая собственными методами—большое количество практических задач, была со всей полнотой раскрыта существовавшая между ними глубокая связь: их основные проблемы оказались двумя взаимно-обратными задачами анализа бесконечно малых величин

— интегрирование и дифференцирование функций стоят друг к другу в том же отношении, как сложение и вычитание у чисел.

2.3.1. Определение определенного интеграла

Определение 2.3. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Говорят, что задано *разбиение* отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков, если заданы точки $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, такие, что $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < x_n = b.$ Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, где $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, называются *частичными отрезками*, а число $\Delta = \max\limits_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, называется *диаметром* разбиения. Выберем произвольным образом на каждом из частичных отрезков точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и вычислим значение функции $f(\xi_k)$ в этой точке. Число

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

построенное по данному разбиению и точкам ξ_k, называется *интегральной суммой* или *суммой Римана* данной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Замечание. Следует четко представлять, что для заданной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ таких чисел σ бесконечно много. Они зависят: 1) от всевозможных вариантов разбиения отрезка $[a,b]$, 2) от выбора точек ξ_k, 3) числа n частичных отрезков разбиения.

Определение 2.4. Число I называется *пределом интегральных сумм*, если как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое другое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при любом разбиении отрезка $[a,b]$, удовлетворяющем требованию $\Delta < \delta$, и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon \quad .$$

Определение 2.5. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a,b]$, если существует предел I ее интегральных сумм σ , не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора промежуточных точек ξ_k, а число I называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Здесь x называется переменной интегрирования, $f(x)-$ подынтегральной функцией, a и b соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a,b]$ называется промежутком интегрирования.

Замечание. Мы видим, что здесь речь идет о своеобразном и довольно сложном предельном переходе. Процесс, лежащий в основе этого предельного перехода, трудно описать (как обычно мы делали ранее) явным указанием на поведение одной из независимых переменных. Можно за такую переменную принять Δ (т.е. максимальную длину отрезков разбиения) и описывать процесс при $\Delta \to 0$, но при этом мы наталкиваемся на трудность, состоящую в том, что интегральная сумма Римана σ, о пределе которой идет речь, как следует из вышеприведенного замечания, *не является однозначной функцией* переменной Δ. И в такой ситуации для существования определенного интеграла *нужно,* чтобы вся эта совокупность интегральных сумм имела пределом *одно и то же число*. Такая сложность в процессе, лежащем в основе интеграции, приводит к некоторым неудобствам—независимость упомянутого предела может быть строго доказана, но это порой утомительно. Это прежде всего касается общей теории. При практическом использовании выручает формула Ньтона-Лейбница, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралами.

В случае непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ понятие определенного интеграла допускает следующую иллюстрацию. С геометрической точки зрения слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ есть площадь прямоугольника с основанием, равным длине частичного отрезка $[x_{k-1},, x_k]$ и высотой $f(\xi_k)$, равной значению функции $f(x)$

в произвольной точке ξ_k этого отрезка. Таким образом, интегральная сумма σ есть площадь ступенчатой фигуры, приведенной на рис. 2.1, а ее предел I есть *площадь криволинейной трапеции* – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,b]$.

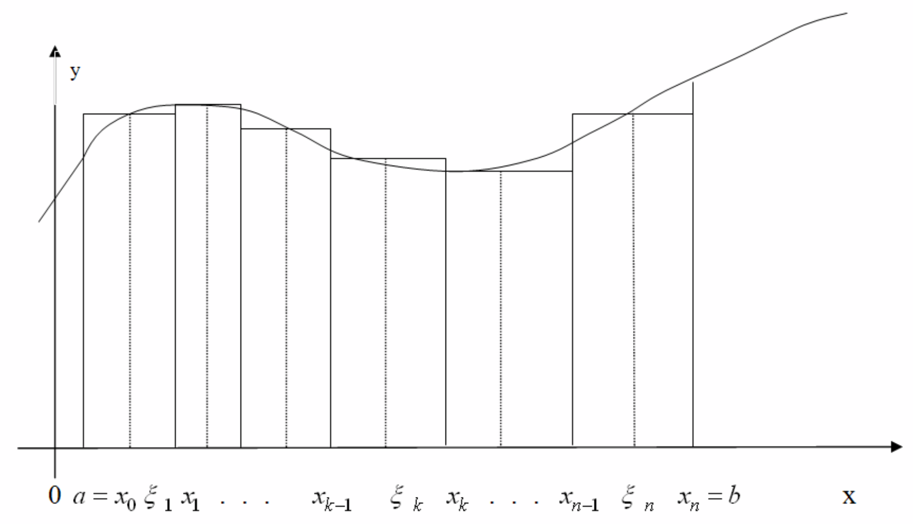


Рис.2.1

2.3.2. Необходимое условие интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций

Своеобразие предельного перехода в определении интеграла может привести к убеждению, что определенный интеграл существует лишь в исключительных случаях. Ниже приведен ряд утверждений, показывающий, что класс интегрируемых функций достаточно богат и охватывает широкий круг функций, используемых в практических задачах.

Теорема 2.5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2.6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 2.7. Если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема этом отрезке.

Теорема 2.8. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением конечного числа точек, где функция имеет разрыв первого рода, то эта функция интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2.9. Если интегрируемую на $[a,b]$ функцию изменить в конечном числе точек, то получится интегрируемая функция с тем же интегралом.

В качестве функции, которая не является интегрируемой по Риману можно привести функцию Дирихле на отрезке $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рациональное;}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.}\end{cases}$$

2.3.3.Свойства определенного интеграла

Интегральное исчисление строится на базе набора свойств определенного интеграла. Приведем наиболее важные из них:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$, если $f(x)$ определена в точке a;

2. $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$, если $f(x)$ интегрируемая на $[a,b]$.

Очевидным является факт, что значение определенного интеграла для интегрируемой на $[a,b]$функции $f(x)$ не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(z)dz.$$

Теорема 2.10. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то для любых действительных чисел α и β функция $\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha\, f(x)+\beta\, g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx \qquad (2.6)$$

Теорема 2.11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(t)dx+\int_c^b (z)dz, \qquad (2.7)$$

Теорема 2.12 (теорема о среднем в определенном интеграле) . Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует хотя бы одна точка $c\in[a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a) \qquad (2.8)$$

Равенство (2.8) с геометрической точки зрения означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ совпадает с площадью некоторого прямоугольника (рис.2.2)

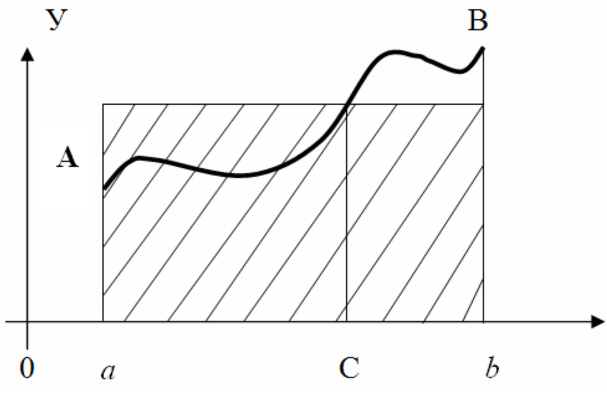


Рис. 2.2

Теорема 2.13. Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, а $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (2.9)$$

2.3.4. Существование первообразной у непрерывной функции. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница

Как видно из предыдущего, многие свойства определенного и неопределенного интегралов имеют общую природу, хотя последний вводился исходя из теори дифференцирования. Это не случайно, что и будет показано ниже.

Определение 2.6. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 2.14 (теорема Барроу). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x)$ является дифференцируемой на $[a,b]$, причем

$$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x).$$

Эта теорема доказывает, что любая функция $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$, имеет первообразную. Именно, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ является *одной из первообразных*.

Теорема 2.15 (формула Ньютона-Лейбница). Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для непрерывной функции $f(x)$, заданной на $[a,b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2.10)$$

Разность $F(b)-F(a)$ часто обозначается как $F(x)\Big|_a^b$, где символ $\Big|_a^b$ называется *знаком двойной подстановки*

Формула (2.10) называется *формулой Ньютона-Лейбница.* Ее важность определяется тем, что она связывает определенный интеграл с первообразной ее подынтегральной функции и тем самым дает исключительно удобный способ вычисления определенного интеграла.

Пример 2.18. $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$

Пример 2.19. Найти $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Решение. Найдем вначале неопределенный интеграл

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ с помощью подстановки

$x=\sin t,\ dx=\cos t dt,\quad \sqrt{1-x^2}=\sin \mathrm{t}$.

Тогда $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t dt = \int \dfrac{1+\cos 2t}{2}dt =$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \int \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cdot 2\sin t\cos t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Тогда с помощью формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1 + \frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin 1 - \frac{1}{2}\arcsin 0 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 1\sqrt{1-1^2} - \frac{1}{2}0\cdot\sqrt{1-0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}\ .$$

2.3.5. Замена переменной в определенном интеграле

Установленная выше связь определенного и неопределенного интегралов сводит, по сути дела, вычисление определенного интеграла к взятию неопределенного интеграла и подстановки соответствующих пределов интегрирования. Следовательно, все изученные ранее методы нахождения интегралов в полной мере могут быть использованы и в данном случае. В частности, справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.16. Пусть $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, а $x=\phi(t)$ - непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция такая, что переменная $x=\phi(t)$ принимает все свои значения от a до b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt \qquad (2.11)$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно ввести замену $x=\phi(t)$, где $\phi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся монотонной и найти новые пределы интегрирования по переменной t, решив для этого уравнения $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$. Выразив отсюда $\alpha=\phi^{-1}(a)$, $\beta=\phi^{-1}(b)$, имеем из (2.11)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt\,.$$

Значит, при использовании метода замены переменной в определенном интеграле не обязательно возвращаться к исходной переменной интегрирования x, а достаточно лишь изменить пределы интегрирования.

Пример 2.18. Найти $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Выполним замену $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$, $t = \arcsin x$. Поскольку $x = \sin t$ и ее производная $x' = \cos t$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ непрерывны при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а значения $x = \sin t$ не выходят за пределы отрезка $[0;1]$ и $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, то условия теоремы 2.16 выполняются, а значит,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}) - \frac{1}{2}(0+0) = \frac{\pi}{4}.$$

Формула замены переменной (2.11), прочитанная справа налево, позволяет сводить вычисление интеграла $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$ с помощью подстановки $\varphi(x) = t$ к вычислению интеграла $\int_\alpha^\beta f(t)dt$, где $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$.

Пример 2.19. Найти $\int_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34} = \begin{bmatrix} t = e^x, \quad dt = e^x dx, & \\ x = 0, \quad t = e^0 = 1, \quad x = 1, \quad t = e^1 = e \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{4t^2 + 12t + 34} = \int_1^e \frac{dt}{(2t+3)^2 + 25} = \begin{bmatrix} u = 2t+3, \quad du = 2dt, \\ u(1) = 5, \quad u(e) = 2e+3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^{2e+3} \frac{du}{u^2 + 25} = \frac{1}{10} arctg \frac{u}{5}\Big|_5^{2e+3} = \frac{1}{10}(arctg \frac{2e+3}{5} - \frac{\pi}{4}).$$

Пример 2.20. $\int\limits_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$.

С другой стороны, $\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1+tg^2 x)} =$

$$= \left[\begin{matrix} tgx = t, & dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x,} & & \\ x = 0, & t = 0, & x = \pi\ , & t = 0 \end{matrix} \right] = \int\limits_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0 \quad \Rightarrow \pi = 0 .$$

Такой вывод получился потому, что при замене $tg\, x = t$ нарушаются условия теоремы 2.16: в точке $t = \frac{\pi}{2}$ функции $tg\, x$ и $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ имеют разрыв второго рода.

2.3.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.17. Пусть функция $u = u(x)$ и $v = v(x) -$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$ функции. Тогда имеет место *формула интегрирования по частям* в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (2.12)$$

Пример 2.21. Найти $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = [u = x, \quad du = dx, \quad dv = \sin x dx,$

$$v = -\cos x] = (-x\cos x)\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 0 + 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Пример 2.22. Найти $\int\limits_1^e \sin(\ln x)dx.$

Решение. $I = \int\limits_1^e \sin(\ln x)dx = \Big[u = \sin(\ln x), \quad du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx,$

$dv = dx, \quad v = x \ \Big] = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx = \big[u = \cos(\ln x),$

$= du = -\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx, \quad dv = dx, \quad v = x \ \big] = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} -$

$- \int\limits_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx = e^\pi \sin(\pi) - 1\sin(\ln 1) - e^\pi \cos(\pi) + 1\cos(0) - I;$

Значит, $2I = 0 - 0 + e^\pi + 1; \quad I = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$

2.3.7. Геометрические приложения определенного интеграла

Определенный интеграл (его конструкции составления интегральных сумм и последующего предельного перехода) может быть использован при решении геометрических, физических, экономических и других задач.

Площадь плоской фигуры

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную и неотрицательную на отрезке $[a,b]$. Можно показать, что площадь криволинейной трапеции $aAAb$, понимаемая в смысле предела интегральных сумм, дающих площади описанных или вписанных в криволинейную трапецию прямоугольников, есть определенный интеграл

$$S = \int\limits_b^a f(x)dx \qquad (2.13)$$

Если же $f(x) \le 0$ на $[a,b]$, то функция $y = -f(x)$ является неотрицательной на $[a,b]$, тогда $\int\limits_a^b (-f(x))dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$ выражает площадь криволинейной трапеции в случае $f(x) \le 0$ знак «минус» в этом случае говорит о том, что фигура расположена ниже оси Ox. Если функция $y = f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,b]$ конечное число раз, то площадь заштрихованной фигуры (рис. 2.3) равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов:

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx - \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^e f(x)dx$$

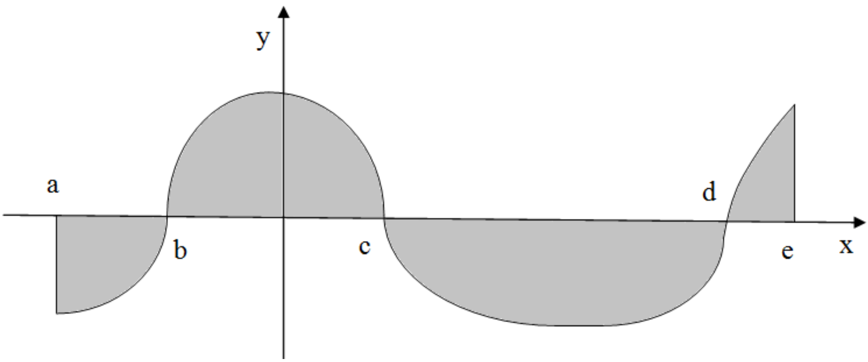


Рис.2.3.

Можно показать, что площадь плоской фигуры, ограниченной двумя непрерывными на отрезке $[a,b]$ функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$ $(f(x) \ge g(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx \tag{2.14}$$

Пример 2.23. Вычислить площадь фигуры, заключенной между локоном Аньези $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и $y = \dfrac{1}{2}x^2$, для чего решаем уравнение:

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

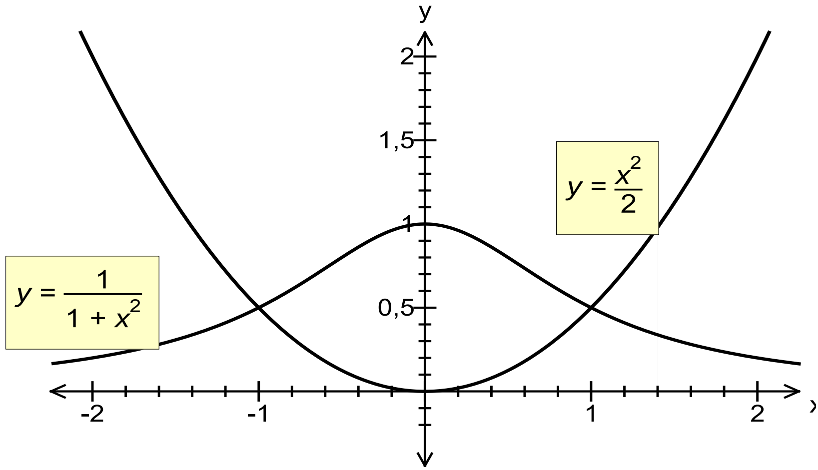


Рис. 2.4.

Применяя формулу (2.14) для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, получаем:

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2 dx\right) = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= 2(\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6})\Big|_0^1 = 2\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Объем тела вращения

Теорема 2.18. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. В этом случае объем тела, образованного вращением около оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс C (рис.5.5), может быть найден по *формуле*

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (2.15)$$

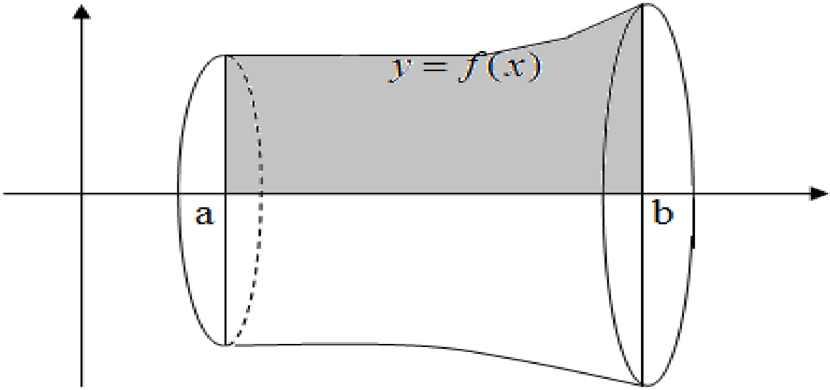


Рис. 2.5

Если вращение происходит вокруг оси $0y$, то объем тела вращения находится по формуле

$$V_y = \pi \int_c^2 \phi^2(y)dy \qquad (2.16)$$

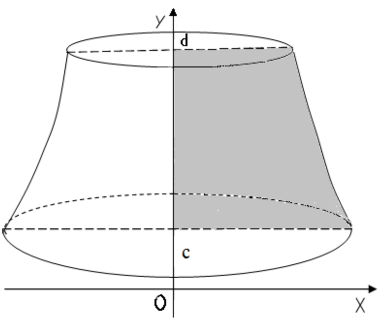


Рис. 5.6.

Пример 2.24. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$ и $y = x$ вокруг оси $0x$.

Решение. Найдем точки пересечения линий $y = 4x - x^2$ и $y = x$:

$4x - x^2 = x, \quad x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0,$ и $x_1 = 0, \quad y_1 = 0$ и $x_2 = 3, \quad y_2 = 3$ (рис. 2.7)

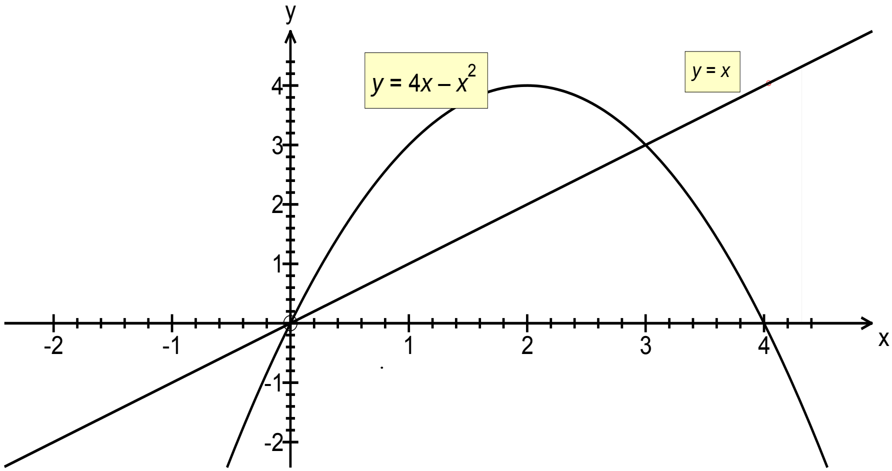


Рис. 2.7.

Объем вычислим как разность $V_1 - V_2$ объемов тел, полученных вращением околооси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 3$ и фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 3$. Тогда $V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi\int_0^3 x^2 dx =$

$$= \pi\int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2)dx = = \pi\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)dx =$$

$$\pi\left(\frac{15x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(5\cdot 3^3 - 2\cdot 81 + \frac{243}{5}\right) = 21{,}6\pi$$

Пример 2.25. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

Решение. Находим $x = 4 - y^2$ при $x = 0$, $y = \pm 2$, при $y = 0$, $x = 4$ (рис. 2.8)

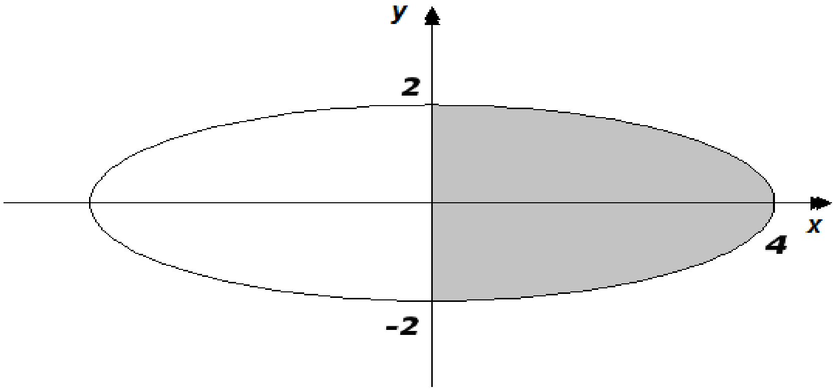


Рис. 2.8.

По формуле (2.16) имеем

$$V_y = \pi \int_{-2}^{2} x^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy = 2\pi \int_{0}^{2} (16 - 8y^2 + y^4) dy =$$

$$2\pi \left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512\pi}{15}$$

Длина дуги плоской кривой

Определение 2.7. Под *длиной дуги* понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, при условии, что количество звеньев ломаной линии неограниченно возрастает, и при этом длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (рис.5.9)

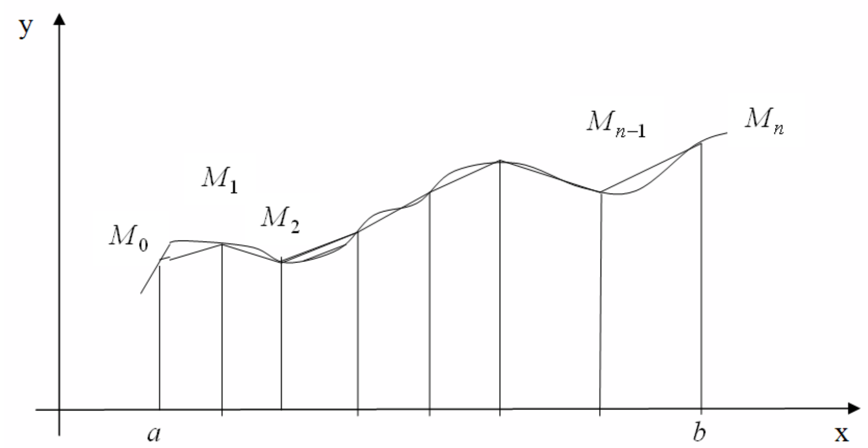


Рис. 5.9

Теорема 2.19. Если дуга задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = f(x)$, то ее длина l вычисляется по формуле :

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad (2.17)$$

Пример 2.26. Вычислить длину линии $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = a,\ 0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Находим $y' = (\ln(\cos x))' = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)$.

Тогда $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$ и по формуле (2.17) заключаем, что

$$l = \int_0^a \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^a \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \int_0^a \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg\|_0^a =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin a + 1}{\sin a - 1}\right|.$$

2.3.8. Приложения определенного интеграла в экономике

Расчет объема продукции. Если в некоторой идеализированной модели, где время t меняется непрерывно, задана непрерывная функция $p = f(t)$, являющаяся производительностью труда в момент времени t, $t \in [t_0, t_1]$, то объем продукции, произведенной за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ вычисляется с помощью определенного интеграла

$$V = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt \qquad (2.18)$$

Функция $p(t)$ обычно подбирается эмпирическим путем.

Расчет средних значений.

Определение 2.8. Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Напомним, что по теореме о среднем в определенном интеграле существует число $c \in [a,b]$, такое, что $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Пример 2.27. Считая, что функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (1+t)e^{3t}$, вычислить объем продукции, произведенной за 4 года.

Решение. $V = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \Big[u = 1+t, \quad du = dt, \quad dv = e^{3t}dt,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3t} \Big] = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(5e^{12}-1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{9}(14e^{12}-2) \approx 2{,}53\cdot 10^5 \text{ (у.е)}$$

Пример 2.28. Найти среднее значение издержек $K(x)=(2x+3)$, выраженных в условных денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 4 единиц. Найти объем продукции x_0, при котором издержки принимают среднее значение.

Решение. Применяя формулу $K(x_0)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b k(x)dx$, получаем:

$$K(x_0)=\frac{1}{4-0}\int\limits_0^4(2x+3)dx=\frac{1}{4}(x^2+3x)\Big|_0^4=\frac{1}{4}(16+12)=7.$$

Решим теперь уравнение $K(x_0)=7$. Отсюда $2x_0+3=7$, $2x_0=4$, $x_0=2$. Значит, при объеме продукции $x_0=2$ издержки принимают среднее значение, которое составляет 7 денежных единиц.

2.4. Несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали определенные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ при выполнении двух условий: а) промежуток $[a,b]$ конечен, б) функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то данное ранее понятие определенного интеграла не имеет смысла (например, $[a,+\infty)$ нельзя разбить на n частей *конечной* длины; если $f(x)$ неограничена, то нет предела соответствующих интегральных сумм). Тем не менее, такие интегралы широко используются и называют их *несобсвенными интегралами*. Ниже дается обобщение введенного ранее понятия определенного интеграла для упомянутых случаев.

2.4.1. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Определение 2.9. Пусть функция $y=f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и на любом конечном отрезке $[a,B]$, $a<B$, $B<+\infty$ функция $y = f(x)$ интегрируема, т.е. существует интеграл $\int_a^B f(x)dx$. *Несобственным интегралом 1 рода* (по бесконечному промежутку) называется предел $\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$, который обозначается как $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$ Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx \qquad (2.19)$$

Если предел (2.19) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.*

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx \qquad (2.20)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx \qquad (2.21)$$

причем в равенстве (2.21) A и B стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл первого рода означает, что площадь бесконечной фигуры есть конечное число (рис.2.10).

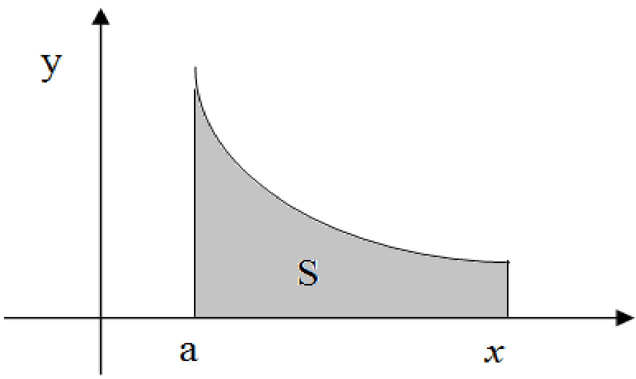


Рис.2.10

Пример 2.29. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}\int\limits_{A}^{B}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}(\operatorname{arctg}x)\Big|_{A}^{B}=$

$$=\lim\limits_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}(\operatorname{arctg}B-\operatorname{arctg}A)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi.$$

Ответ: данный интеграл сходится и его значение равно π.

Пример 2.30. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x dx.$

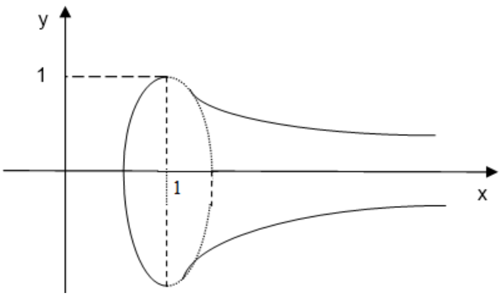
Решение. $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x dx=\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{0}^{B}\cos x dx=\lim\limits_{B\to+\infty}(\sin x)\Big|_{0}^{B}=$

$=\lim\limits_{B\to+\infty}(\sin B-\sin 0)=\lim\limits_{B\to+\infty}\sin B$ — этот предел не существует.

Ответ: Данный интеграл расходится.

Пример 2.31. Вычислить объем тела, образованного вращением около оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями

$y=\frac{1}{x},\quad x=1,\quad y=0$ (рис. 2.11)



$$V_x=\pi\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{1}^{B}\frac{1}{x^2}dx=\pi\left(\lim\limits_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{B}\right)=$$

$$=\pi(-\lim\limits_{B\to+\infty}\frac{1}{B}+\frac{1}{1})=\pi.$$

Рис. 2.11

В курсе теориии вероятностей исключительную роль играет несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$, называемый интегралом Эйлера-Пуассона. Доказано, что этот интеграл сходится и его значение равно $\sqrt{\pi}$. В физике часто используется интеграл Дирихле

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Интересно отметить, что соответствующие неопределенные интегралы *не выражаются в элементарных функциях*.

2.4.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 2.10. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, $[a,b-a] \subset [a;b)$. Несобственным интегралом второго рода называется предел $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если он существует. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2.22}$$

В случае существования конечного предела в (2.22) несобственный интеграл второго рода называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется *расходящимся.*

Если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $(a;b]$, интегрируема на любом отрезке $[a+\eta,b]$, $\eta > 0$, $[a+\eta,b] \subset (a,b)$, то по определению,

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)dx.$$

Наконец, если функция определена на $[a,c)$ и $(c,b\ ]$, интегрируема на любых отрезках $[a,c-\varepsilon]$ и на $[c+\eta,b]$, таких, что $[a,c-\varepsilon] \subset [a,c)$, $[c+\eta,b] \subset (c,b\ ]$, $\varepsilon,\eta > 0$, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ и, по определению, равен сумме пределов двух определенных интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to +0} \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx \tag{2.23}$$

Если оба предела в (2.23) существуют, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.*

Пример 2.32. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Так при $x \to +0$ подынтегральная функция неограниченная, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_\eta^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\eta \to +0} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_\eta^1 = 2 \lim_{\eta \to +0} \left. \sqrt{x} \right|_\eta^1 = 2(1 - \lim_{\eta \to +0} \sqrt{\eta}\,) = 2 .$$

Ответ: данный интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 2.33. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0,2]$, за исключением точки $x = 1$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль. Значит,

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} .$$

Если оба интеграла в правой части сходятся, то сходится и данный интеграл; если хотя бы один из них расходится, то и данный интеграл будет расходящимся:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 - 6x + 9 - 4} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2 - 4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3-2}{x-3+2} \right| \Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 5) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln \frac{4+\varepsilon}{5\varepsilon}) = \infty .$$

Значит, данный интеграл расходится.

3. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения возникли практически сразу после становления интегрального исчисления. И действительно, в интегральном исчислении для функций одной переменной мы сталкиваемся с необходимостью отыскивать неизвестную функцию по заданной ее производной. Например, $\int x^2 dx$ означает, что надо найти такую функцию $y(x)$, что верно равенство $y' = x^2$. Это и есть простейшее дифференциальное уравнение, решением которого, очевидно, есть функция $y(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Ниже мы увидим, что гораздо чаще приходится иметь дело с уравнениями более сложного вида.

3.1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка и его решения

При решении многих задач математики, физики, биологии, экономики часто приходится отыскивать неизвестную функцию из соотношения, которое связывает независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), \quad y''(x), \quad y'''(x), ..., y^{(n)}(x)$.

Так, при исследовании процесса распада радиоактивного вещества установлено, что скорость распада пропорциональна наличному количеству не распавшегося вещества с коэффициентом пропорциональности k. Обозначив через x_0 массу радиоактивного вещества в начальный момент времени $t = 0$, а через $x-$ его массу в момент времени t, получим $\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0.$ Знак минус указывает на тот факт, что с течением времени масса радиоактивного вещества убывает. Переписав полученное уравнение в виде $\frac{dx}{x} = -kdt,$ замечаем, что обе его части можно проинтегрировать и получить в результате соотношение $\ln x = -kt + \ln c$. При $t = 0$ получаем $\ln x_0 = \ln c$, откуда $c = x_0$. Значит, $x = x_0 e^{-kt}$. Полученная функция $x = x_0 e^{-kt}$ является решением дифференциального уравнения. Пользуясь этой функцией, можно определить количество радиоактивного вещества в любой момент времени t, зная его количество x_0 в момент t_0. Знание этого позволяет произвести датировку событий, имеющих место миллионы лет тому назад.

Определение 3.1. Обыкновенным дифференциальным уравнением $n-$го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (3.1)$$

где $F-$известная функция, заданная в области $D \subset R^{n+2}$, $x-$ независимая переменная, $y = y(x)-$ искомая функция, а $y', y'', ..., y^{(n)}$ – ее производные до $n-$го порядка включительно.

Определение 3.2. Порядком n дифференциального уравнения называется порядок старшей из входящих в него производных $y^{(n)}(x)$.

Если уравнение (3.1) можно записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \qquad (3.2)$$

где $f-$ функция, определенная в некоторой области $D_1 \subset R^{n+1}$, то говорят, что дифференциальное уравнение *разрешено относительно старшей производной.* Его в этом случае еще называют *дифференциальным уравнением в нормальной форме*.

Дифференциальное уравнение, в которой неизвестная функция y зависит от одной переменной x, называется *обыкновенным.* Если же дифференциальное уравнение содержит функцию многих переменных и ее частные производные, то оно называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Например, $y' - (2xy')^2 - \ln y' = 0-$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка; $y''' = \sqrt{1 - yx}-$обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка в нормальной форме; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0-$уравнение второго порядка в частных производных.

Определение 3.3. Решением дифференциального уравнения (3.1) называется всякая действительная функция $y = y(x)$, определенная на интервале (a,b) такая, что:

1) $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на интервале (a,b);

2) точка $(x, y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)) \in D \subset R^{n+2}$, для всех $x \in (a,b)$, где $D-$ область определения функции F;

3) $F(x, y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)) \equiv 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Всякому решению дифференциального уравнения (3.1) на плоскости отвечает некоторая кривая $y = y(x)$, $x \in (a,b)$, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (3.1).

Одна из основных задач в теории дифференциальных уравнений является нахождение его решений. В простейших случаях эта задача в конечном итоге сводится к вычислению интегралов. Поэтому процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Например, решением дифференциального уравнения $y''' = \sqrt{1-(y'')^2}$ является функция $y = -\sin x + 2x + C$, так как при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $y' = -\cos x + 2$, $y'' = \sin x, y''' = \cos x$ и $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$, если $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Уже простейшие примеры показывают, что дифференциальные уравнения, как правило, имеют бесчисленное множество решений. В связи с этим, *общим решением* дифференциального уравнения (3.1) (или (3.2)) обычно называют такое его решение $y = \phi(x, C_1, C_2,..., C_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2,..., C_n$, каков порядок этого уравнения. Заметим, что понятие общего решения будет уточнено позже. Общее решение, заданное в неявной форме $\Phi(x, y, C_1,..., C_n) = 0$ называют *общим интегралом* уравнения. Чтобы выделить одно какое-то решение, задают некоторые дополнительные условия.

Обычно, этими дополнительными условиями являются так называемые *начальные условия*

$$y(x_0) = y_{0,}\ \ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где числа $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ фиксированы.

Нахождение решения $y = \phi(x)$, удовлетворяющего начальным условиям, называется решением *задачи Коши* для заданных начальных условий.

3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Наиболее простой класс уравнений составляют дифференциальные уравнения первого порядка.

3.2.1. Понятие дифференциального уравнения первого порядка и его решения. Задача Коши. Теорема Коши. Понятие общего решения

Из соотношений (3.1) и (3.2) при $n = 1$ имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.4}$$

где $F-$ известная функция трех переменная, определенная в некоторой области $D \subset R^3$, $x-$ независимая переменная, $y = y(x)-$ искомая функция, $y'-$ ее производная, или в разрешенном относительно y' виде

$$y' = f(x, y), \tag{3.5}$$

где $f-$ известная функция двух переменных, определенная в некоторой области $D \subset R^2, x-$ независимая переменная, $y = y(x)-$ искомая функция. Уравнение (3.5) всегда можно записать в дифференциалах, где переменные x и y равноправны:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad \textbf{(3.}6)$$

Здесь $P(x, y)$ и $Q(x, y)-$ известные функции, заданные в области D, причем $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0.$ Запись (3.6) получится из (3.5), если положить $y' = \dfrac{dy}{dx}$; а из записи (3.6) легко получить запись (3.5), если разделить (3.6) на $Q(x,y)$. Надо помнить только, что при этом может измениться область задания уравнения. Например, $y' = \dfrac{x}{y}$ и $ydy - xdx = 0 -$ это записи одного и того же уравнения, но первое задано на плоскости R^2 без оси Ox, а второе – без начала координат.

Определение 3.4. Функция $y = y(x)$ или $x = x(y)$ является решением уравнения (3.6) , если выполняется тождество

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \equiv 0 \quad \text{или} \quad P(x(y), y) + Q(x(y), y) \equiv 0 .$$

Например, функция $y = 1 + e^{-\sin x}$, является решением уравнения

$$dy + (y\cos x - \cos x)dx = 0,$$

так как $(1 + e^{-\sin x})' dx + ((1 + e^{-\sin x})\ \cos x - \cos x)dx =$

$$= -e^{-\sin x} \cos x dx + \cos x dx + e^{-\sin x} \cos x dx - \cos x dx \equiv 0 \ .$$

Определение 3.5. Нахождение решения $y = \phi(x)$, или $x = \psi(y)$ уравнения (3.5) или (3.6) , для которого при заданных начальных условиях $(x_0, y_0) \in D$ выполняется равенство $y_0 = \phi(x_0)$ или $x_0 = \psi(y_0)$, называется решением задачи Коши для начальных условий $(x_0, y_0) \in D$.

Таким образом, *геометрическое* содержание задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$. В некоторых случаях решение задачи Коши является не единственным. Следующая теорема указывает одно из достаточных условий, которое гарантирует существование и единственность решения задачи Коши.

Теорема 3.1 (Коши). Пусть функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в открытой области $D \subset R^2$. Тогда найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором *существует единственное* решение $y = \phi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$.

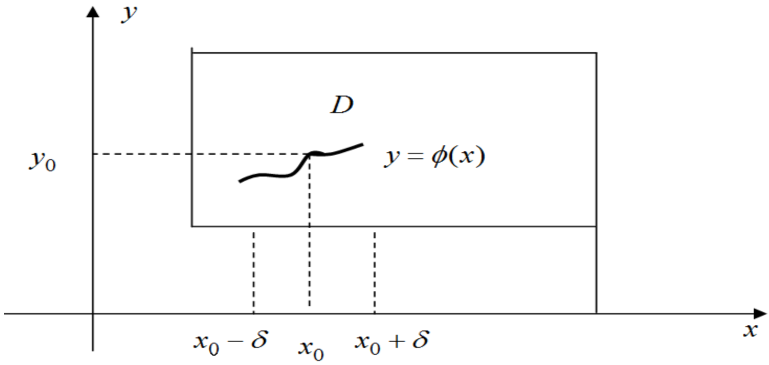


Рис. 3.1

Отметим, что приведенная теорема носит *локальный* характер, т.е. она обеспечивает существование и единственность решения лишь в окрестности точки x_0. Единственность здесь понимается в том смысле, что если существуют два решения $y_1 = \phi_1(x)$, $\alpha_1 < x < \alpha_2$, $y_2 = \phi_2(x)$, $\beta_1 < x < \beta_2$ такие, что $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0) = y_0$, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ в некоторой общей окрестности точки x_0, где оба решения определены, Теорема вовсе не утверждает, что интервалы их определения $\alpha_1 < x < \alpha_2$ и $\beta_1 < x < \beta_2$ одинаковы.

При нарушении условий теоремы 3.1 через точку M_0 могут проходить несколько интегральных кривых.

Определение 3.6. Пусть в некоторой области $D \subset R^2$ задано дифференциальное уравнение (3.5) и для любого замкнутого множества $\overline{D} \subset D$ выполнены условия теоремы Коши. Тогда однопараметрическое семейство функций

$$y = \phi(x, C), \tag{3.7}$$

непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по C называется *общим решением* уравнения (3.5) в области D, если:

1) функция $y = \phi(x, C)$ является решением (3.5) для любого фиксированного C из некоторой области $G \subset R$, где $x \in (a, b)$;

2) для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ существует $C_0 \in G$ такое, что $y_0 = \phi(x_0, C_0)$.

Таким образом, общее решение дает возможность решить задачу Коши для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in \overline{D}$, где в $\overline{D}$ имеет место теорема Коши.

Определение 3.7. Любое решение, полученного из общего при фиксированном значении $C_0 \in G$, называется *частным* решением.

3.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение 3.8. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \tag{3.8}$$

или

$$P_1(x) P_2(y)dx + Q_1(x) Q_2(y)dy = 0 \tag{3.9}$$

где $f_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ – функции только от x, а $f_2(y)$, $P_2(y)$, $Q\ (y)$ – функции только от y.

Для решения уравнений (3.8) и (3.9), соответственно, прибегают к *методу разделения переменных*, для чего левую и правую часть уравнений (3.8) и (3.9) умножают на такой множитель, чтобы после упрощения при dx стояла функция, зависящая только от x, а при dy стояла функция, зависящая только от y. Для уравнения (3.8) таким множителем является $\frac{dx}{f_2(y)}$, а для (3.9) $-\frac{1}{P_2(y) Q_1(x)}$. После умножения получается *уравнение с разделяющимися переменными,* а именно:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy = 0.$$

После интегрирования последних уравнений получится решение уравнения (3.8) и (3.9), записанное в виде:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \quad \text{и} \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy = C.$$

Пример 3.1. Проинтегрировать уравнение $y' = tgx\, tgy$.

Решение. Полагая $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = tgx\, tgy$, откуда, после разделения переменных получим

$$\frac{dy}{tgy} = tgxdx \quad \text{или} \quad \frac{dy\cos y}{\sin y} = \frac{\sin xdx}{\cos x},$$

$$\int \frac{\cos ydy}{\sin y} = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} + C, \ \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C,$$

$$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|\sin y\cos x| = \ln|C_1|, \quad \sin y\cos x = C_1.$$

Пример 3.*2*. Найти решение уравнения $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$.

Решение. Разделяя переменные, получаем:

$$y^2dy = \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, \ \int y^2dy = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1} + C, \ \frac{y^3}{3} = arctg(e^x) + C.$$

Так как $y(0)=0$, то $\dfrac{0^3}{3} = arctg(e^0) + C$, $0 = \dfrac{\pi}{4} + C$, $C = -\dfrac{\pi}{4}$.

Значит, частным решением уравнения $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$, удовлетворяющим начальным условиям $y(0)=0$, является решение $\dfrac{y^3}{3} = arctge^x - \dfrac{\pi}{4}$.

3.2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 3.9. Дифференциальное уравнение вида

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

где $A(x) \neq 0$, или после деления на $A(x)$, приведенное к виду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3.10}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Будем искать решение уравнения (3.10), где $q(x) \neq 0$, в виде произведения функций $y = u(x)\,v(x)$, или в сокращенной записи $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$. После подстановки y и y' в (3.10), получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. В качестве функции $v(x)$ возьмем какое-нибудь ненулевое решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -p(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$$

$\ln|v| = -\int p(x)dx, \quad v = e^{-\int p(x)dx}$. Тогда для нахождения $u(x)$ получается уравнение с разделяющимися переменными

$$u'v = q(x) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}\, e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Отсюда $du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx, \quad u = \int \left(e^{\int p(x)dx} q(x) \right) dx + C, \quad y = uv$.

Пример 3.3. Решить дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

и найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(-2) = 5$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $1 + x^2 \neq 0$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = 1 + x^2$, которое решаем с помощью подстановки

$y = uv, \quad y' = u'v + uv'$. Имеем: $y = uv, \quad u'v + uv' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, uv = 1 + x^2$,

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = 1 + x^2.$$

Подберем функцию v так, чтобы коэффициент при u обратился в нуль: $v' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, v = 0$ или $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{1+x^2}$, $\quad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2xdx}{1+x^2}$,

$$\ln|v| = \ln\left|1 + x^2\right|, \quad v = 1 + x^2.$$

Тогда уравнение $u'v = 1 + x^2$ примет вид $u'(1 + x^2) = 1 + x^2$ или $u' = 1$, $\frac{du}{dx} = 1$, $du = dx$, $u = x + C$. Значит, $y = (x + C)(1 + x^2)$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Подставим теперь начальные условия: $x_0 = -2,\ y_0 = 5$. Тогда $5 = (-2 + C)(1 + 2^2)$, $5 = (-2 + C) \cdot 5$, $-2 + C = 1$, $C = 3$. Откуда получаем, что искомое частное решение имеет вид $y = (x + 3)(1 + x^2)$.

3.2.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 3.10. Функция n переменных $x = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *однородной функцией степени* m, если выполняется тождество

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^m f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

В частности, при $n = 2$ и $m = 0$ функция $z = f(x, y)$ называется *однородной нулевой степени*, если $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Например, функция $z = \frac{x^2 + y^2}{3xy}$ является *однородной нулевой степени*, так как $\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{3txty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{3t^2(xy)} = \frac{x^2 + y}{3xy}$.

Заметим, что для однородной функции нулевой степени выполняется равенство $f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, где $x \neq 0$, а это означает, что

$$z = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3.11)$$

Определение 3.11. Однородным дифференциальным уравнением *первого порядка* называется уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (3.12)$$

где $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени.

Решение однородного уравнения (3.12) будем искать с помощью подстановки $y = ux$, $y' = u'x + u$, где $u = u(x) -$ некоторая, подлежащая определению, функция. Если подставить вместо y' и y в уравнение (3.12) их выражения через u и x и учесть при этом свойство (3.11), то получится уравнение с разделяющимися переменными $u'x + u = \phi(u)$. Разделяя переменные, получаем уравнение $\dfrac{du}{\phi(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$, которое после интегрирования и замены $u = \dfrac{y}{x}$ даст решение исходного уравнения.

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения $(y - x)ydx + x^2dy = 0$.

Решение. Из уравнения находим, что $y' = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$. Отсюда заключаем, что $z = f(x, y) = \dfrac{(x - y)y}{x^2} -$ однородная функция нулевой степени. Положим теперь $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тогда $u'x + u = \dfrac{(x - ux)ux}{x^2}$ или $u'x + u = \dfrac{x^2(1 - u)u}{x^2}$; $u'x + u = u - u^2$; $\dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя последнее равенство, получим

$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|; \quad \frac{1}{u} = \ln|x| + \ln|C|; \quad \frac{x}{y} = \ln|Cx|.$$

Следовательно, $y = \dfrac{x}{\ln|Cx|} -$ искомое общее решение.

3.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теория линейных уравнений является наиболее простой и разработанной областью дифференциальных уравнений. И именно эти уравнения чаще всего используются в реальных прикладных задачах.

3.3.1. Постановка задачи Коши и понятие общего решения для линейного дифференциального уравнения второго порядка

Ниже приводятся краткие сведения теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Определение 3.11. Дифференциальное уравнение вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x), \tag{3.12}$$

где $A(x) \neq 0, B(x), C(x), f(x) -$ функции, определенные в некоторой области $D \subset R$, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Если $A \neq 0, B, C -$ постоянные величины, не зависящие от переменной x, то уравнение (3.12) называется *уравнением с постоянными коэффициентами*; причем, если $f(x) \equiv 0,$ то *линейным однородным*, а если $f(x) \neq 0,$ то *линейным неоднородным*.

Задача Коши для уравнения (3.12) формулируется следующим образом: надо найти такое решение $y = \phi(x)$ уравнения (3.12) для заданных начальных условий (x_0, y_0, y_0'), где $x_0 \in X \subset D$, $X -$ промежуток непрерывности функций $A(x) \neq 0, B(x), C(x),$ $f(x)$, а $y_0, y_0' -$ произвольные числа, чтобы

$$y_0 = \phi(x_0), \; y_0' = \phi'(x_0).$$

Определение 3.12. *Общим решением* уравнения (3.12) называется двухпараметрическое семейство функций $y = \phi(x, C_1, C_2)$, дважды непрерывно дифференцируемое по x при $x \in (a, b)$, которое:

1) является решением уравнения (3.12) для любых C_1, C_2 из некоторой области G;

2) обеспечивает решение задачи Коши для любых начальных условий $(x_0 \in X, y_0, y_0')$ при некоторых $C_1^0, C_2^0 \in G$.

3.3.2. Свойства решений линейных однородных уравнений

Рассмотрим уравнение вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \qquad (3.13)$$

Теорема 3.2. Если $y = y_1(x)-$ решение уравнения (3.13), то функция $y = C\ y_1(x)$, где $C-$любое постоянное число, также будет решением уравнения (3.13).

Теорема 3.3. Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)-$два решения уравнения (3.13), то и $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1, C_2- произвольные числа, тоже решение уравнения (3.13).

Определение 3.13. Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3.13) называются *линейно зависимыми* на интервале (a,b), если существуют числа α_1, α_2, не равные одновременно нулю, такие что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ для всех $x \in (a,b)$. В противном случае, функции называются *линейно независимыми*.

Заметим, что две функции являются линейно независимыми, если их отношение не равно тождественной постоянной: $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$. Понятие линейной независимости функций позволяет достаточно просто описать множество всех решений дифференциального уравнения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.4. Если решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3.13) линейно независимы, то решение $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1, C_2- произвольные постоянные, является общим решением.

3.3.3. Решение однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение следующего вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (3.14)$$

где p и $q-$постоянные числа.

Для его решения запишем так называемое *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad ,(3.15)$$

которое очевидным образом составляется по коэффициентам исходного уравнения (3.14). Далее, возможны следующие случаи:

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, т.е. если (3.15) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2 , то уравнение (3.14) имеет общее решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \qquad (3.16)$$

2. Если $D = p^2 - 4q = 0$, т.е. если (3.15) имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то уравнение (3.14) имеет общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}; \qquad (3.17)$$

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, т.е. если (3.15) имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$, то уравнение (3.14) имеет общее решение вида

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \qquad (3.18)$$

Пример 3.5. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение (3.15) имеет вид: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $D = 25 - 24 = 1 > 0$. Значит, $\lambda_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2;$ $\lambda_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$. Следовательно, согласно (3.16) общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 3.6. Найти общее решение уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение (3.15) имеет вид: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$, $D = 100 - 100 = 0$, значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Общее решение согласно (3.17) имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x}$.

Пример 3.7. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0, \quad D = 4 - 20 = -16 = 16i^2, \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i,$ значит $\lambda = 1, \quad \beta = 2$ и общее решение по (3.18) имеет вид: $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 3.8. Найти частное решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad D = 25 - 24 = 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ – общее решение дифференциального уравнения. Для решения задачи Коши находим производную $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Подставляя начальные условия $y(0) = 1, y'(0) = 0,$ получаем $1 = C_1 e^{2\cdot 0} + C_2 e^{3\cdot 0}$, $0 = 2C_1 e^{2\cdot 0} + 3C_2 e^{3\cdot 0}$. Значит, C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 2, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое уравнение, получаем $C_2 = -2, \quad$ откуда $C_1 = 1 - C_2 = 1 + 2 = 3$.

Ответ: $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

3.3.4. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 3.14. Пусть имеется неоднородное уравнение вида

$$y'' + py' + py = f(x), \qquad (3.19)$$

где p и q – постоянные, не зависящие от x, $f(x)$ – функция, непрерывная на некотором множестве X.

Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения описывается в следующей теореме.

Теорема 3.5. Пусть $y^* = \phi(x)$ – некоторое частное решение уравнения (3.19), а $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение однородного уравнения (3.14), соответствующего уравнению (3.19). Тогда общее решение Y уравнения (3.19) имеет вид: $Y = y + y^*$.

Для нахождения частного решения y^* можно использовать либо метод вариации произвольных постоянных, либо использовать вид специальной правой части уравнения (3.19) , если это имеет место.

Пусть функция $f(x)$ имеет вид $P_n(x)$, или $P_n(x)e^{\alpha x}$, или $(P_{n_1}(x)\sin\beta x + P_{n_2}(x)\cos\beta x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$, $P_{n_1}(x)$, $P_{n_2}(x)$ – многочлены степени n или не меньше n. Тогда частное решение можно найти в виде $Q_n(x)$, $Q_n(x)e^{\alpha x}$, $e^{\alpha x}$ $(Q_{n_1}(x)\sin\beta x + Q_{n_2}(x)\sin\beta x)$, где $Q_n(x)$, $Q_{n_1}(x)$, $Q_{n_2}(x)$ – многочлены такой же степени, что и $P_n(x)$, $P_{n_1}(x)$, $P_{n_2}(x)$, но с неопределенными коэффициентами, или в таком же виде, но с множителем x или x^2 в зависимости от соотношения корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3.15) и числа α $(\alpha \pm i\beta)$:

1. если $\lambda_1 \neq \alpha$, $\lambda_2 \neq \alpha$, то множители x и x^2 отсутствуют;

2. если $\lambda_1 = \alpha$, (или $\lambda_2 = \alpha$), но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то появляется множитель x;

3. если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то появляется множитель x^2;

4. если ни один их корней $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$ характеристического уравнения (3.15) не равен $\alpha \pm \beta i$, то множитель x отсутствует; если $\lambda_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, то появится множитель x.

Пример 3.7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Решение. Находим общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$,

$D=4-8=-4=4i^2$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$, $\alpha=1$, $\beta=1$, значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения используем специальный вид правой части $e^{0x}P_n(x)=x^2$, $n=2$. Так как среди корней характеристического уравнения нет $\alpha=0$, то множители x и x^2 отсутствуют, значит, ищем частное решение y^* в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами $y^*=ax^2+bx+c$, $y'^*=2ax+b$, $y''^*=2a$. Подставляем y^*, y'^*, y''^* в исходное уравнение $y''-2y'+2y=x^2$ и составляем систему для нахождения a,b и c, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой части уравнения:

$$2a-4ax-2b+2ax^2+2bx+2c=x^2;$$

$$x^2(2a)+x(-4a+2b)+2a-2b+2c=x^2.$$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} 2a=1, \\ -4a+2b=0, \\ 2a-2b+2c=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2, \\ b=1, \\ c=1/2. \end{cases}$$

Итак, частное решение $y^*=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения есть

$$Y=y+y^*=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}.$$

Пример 3.8. Найти решение дифференциального уравнения $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$, для чего решаем характеристическое уравнение (3.15):

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2 > 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = +1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Корней вида $\alpha + \beta i = i$ в уравнении (3.15) нет, значит, частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = a\cos x + b\sin x$. Тогда $y^{*'} = -a\sin x + b\cos x$, $y^{*''} = -a\cos x - b\sin x$.

Подставляем y^*, $y^{*''}$, $y^{*''}$ в исходное уравнение и, приводя подобные члены при $\cos x$ и $\sin x$, получаем:

$$-a\cos x - b\sin x - a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x = \cos x - 3\sin x,$$

$$(b - 3a)\cos x + (-3b - a)\sin x \equiv \cos x - 3\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$ в правой и левой частях последнего уравнения, получим:

$$\begin{cases} b - 3a = 1, \\ -3b - a = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 9a = 3, \\ -3b - a = -3, \end{cases} \Rightarrow \quad -10a = 0,$$

$a = 0$, $b = 1$. Значит, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y^* = \sin x$, а общее решение Y неоднородного уравнения $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$; $Y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \cos x$.

Учтем начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. $1 = C_1 + C_2$, $2 = -2C_1 + C_2 + 1$. Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $Y = e^x + \sin x$.

Пример 3.9. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение (3.15) имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda - 1)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Значит общее решение однородного уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Так как правая часть имеет вид xe^{1x} и $\alpha = 1$ совпадает с $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то в частном решении, соответствующем правой части, появляется множитель x^2: $y^* = x^2(ax + b)e^x$. Тогда

$$
\begin{array}{r|l}
1 & y^* = e^x(ax^3 + bx^2); \\
-2 & y^{*\prime} = e^x(ax^3 + bx^2) + e^x(3ax^2 + 2bx) = e^x(ax^3 + (b+3a)x^2 + 2bx); \\
1 & y^{*\prime\prime} = e^x(ax^3 + (b+3a)x^2 + 2bx) + e^x(3ax^2 + 2(b+3a)x + 2b = \\
 & \quad = e^x(ax^3 + (b+6a)x^2 + (4b+6a)x + 2b)
\end{array}
$$

Подставляем y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение, группируя слагаемые по степеням x и вынося e^x за скобки:

$e^x(ax^3 - 2ax^3 + ax^3 + bx^2 - 2(b+3a)x^2 + (b+6a)x^2 - 4bx + (4b+6a)x + + 2b) = xe^x$. Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и x^0 в левой и правой частях последнего уравнения, получаем систему для нахождения неопределенных коэффициентов a и b:

$$
\begin{array}{l}
x^3: \\ x^2: \\ x: \\ x^0:
\end{array}
\begin{cases}
0a = 0, \\
b - 2b - 6a + b + 6a = 0, \\
-4b + b + 16a = 1, \\
2b = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
0a = 0, \\
0a + 0b = 0, \\
6a = 1, \\
2b = 0
\end{cases}
\Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}, \quad b = 0.
$$

Значит, $y^* = \dfrac{x^3}{6}e^x$. Тогда общее решение есть $Y = (C_1 + C_2 x)e^x + \dfrac{x^3}{6}e^x$.

4. Ряды

Удобным и полезным инструментом в математическом анализе являются бесконечные ряды. Теория рядов представляет собой сравнительно небольшой и несложный материал, тем не менее, она служит опорой для многих прикладных наук и имеет многочисленные конкретные приложения.

4.1. Числовые ряды

4.1.1. Понятие числового ряда и его сходимости

Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$.

Определение 4.1. Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{4.1}$$

где числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ называются *членами ряда,* а $a_n = f(n)$ называется *общим членом* ряда.

Для корректного определения суммы бесконечного ряда опять воспользуемся операцией предельного перехода.

Определение 4.2. Частичной n-ой суммой ряда (4.1) называется сумма S_n его первых n членов: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Образуем теперь последовательность $S_1, S_2, ... S_n, ...$, состоящую из частичных сумм ряда (4.1).

Определение 4.3. Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (4.1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* и записывается этот факт как $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд (4.1) называется *расходящимся*.

Пример 4.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + ...$$

по определению, и, если ряд сходится, то найти его сумму.

Решение. Представим общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ в виде двух слагаемых $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{a}{3n-1} + \dfrac{b}{3n+2}$ и найдем числа a и b методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{a(3n+2)+b(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n(3a+3b)+2a-b}{(3n-1)(3n+2)}.$$

Значит, для любых чисел $n \in N$ должно быть выполнено равенство $n(3a+3b)+2a-b=1$. Это возможно, в том и только в том случае, когда коэффициенты при n и n^0 в левой и правой частях последнего равенства совпадают:

$$\begin{cases} 3a+3b=0, \\ 2a-b=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a, \\ 2a+a=1, \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1/3, \\ a=1/3. \end{cases}$$

Значит, $a_n = \dfrac{1/3}{3n-1} - \dfrac{1/3}{3n+2}$, а тогда

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \left(\frac{1/3}{2} - \frac{1/3}{5}\right) + \left(\frac{1/3}{5} - \frac{1/3}{8}\right) +$$

$$+\frac{1/3}{8} + \frac{1/3}{11}) + \ldots + \left(\frac{1/3}{3n-1} - \frac{1/3}{3n+2}\right).$$

В этой сумме все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются. Следовательно, $S_n = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1/3}{3n+2}$.

Находим теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1/3}{3n+2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{6}.$$

Итак, данный ряд сходится и его сумма равна $S = \dfrac{1}{6}$.

Ряд

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, \qquad a\neq 0, \quad (4.2)$$

составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем q, называется *геометрическим рядом*. Если $|q|<1$, то ряд (4.2) сходится и его сумма равна $S=\dfrac{a}{1-q}$; если $|q|\geq 1$, то ряд (4.2) расходится.

Обобщенным гармоническим рядом называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. Этот ряд сходится, если $p>1$ и расходится, если $p\leq 1$. В частности, ряд $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, называемый *гармоническим рядом*, расходится.

4.1.2. Простейшие свойства сходящихся рядов

Определение 4.4. Если в ряде (4.1) отбросить первые n членов, то получится ряд r_n, называемый *остатком ряда* (4.1) после n-го члена:

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \qquad (4.3)$$

Теорема 4.1. Если ряд (4.1) сходится, то сходится и любой его остаток и, наоборот, если остаток (4.3) сходится, то сходится и ряд (4.1).

Определение 4.5. Произведением ряда (4.1) на постоянное число c называется ряд

$$ca_1+ca_2+\ldots+ca_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}ca_n \qquad (4.4)$$

Теорема 4.2. Если ряд (4.1) сходится и его сумма равна S, то и ряд (4.4) сходится и его сумма равна cS.

Определение 4.6. Суммой (разностью) рядов $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).$$

Теорема 4.7. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2, соответственно, то их сумма и разность сходятся и имеют суммы $S_1 \pm S_2$.

4.1.3. Необходимый признак сходимости ряда и его следствие

Исследование сходимости рядов является основной задачей. Как это осуществить более простым способом, чем непосредственное нахождение его суммы? Ниже приведены несколько утверждений, позволяющих делать в некоторых случаях заключение о сходимости или расходимости рядов.

Теорема 4.3 (необходимый признак сходимости). Если ряд (4.1) сходится, то общий член этого ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (4.1) расходится.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$.

Решение. Находим $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{3+2/n} = \frac{2}{3}$.

Поскольку $\frac{2}{3} \neq 0,$ то на основании следствия из теоремы (4.3) данный ряд расходится.

4.1.4. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 4.4 (первый признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (4.5)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (4.6)$$

Если для всех n, или начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда (4.6) следует сходимость ряда (4.5), а из расходимости ряда (4.5) следует расходимость ряда (4.6).

Иначе говоря, если «больший» ряд сходится, то и «меньший» ряд сходится; если «меньший» ряд расходится, то и «больший» ряд расходится.

Пример 4.3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{1+2^{2n}}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, который сходится как геометрический ряд со знаменателем $q = \dfrac{1}{2} < 1$. Имеем $\dfrac{2^n}{1+2^{2n}} < \dfrac{2^n}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2^n}$ для всех n, значит, на основании теоремы 4.4 ряд сходится.

Пример 4.4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$. Поскольку $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$ и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится, то на основании теоремы 4.4 заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится.

Теорема 4.5 (второй признак сравнения). Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L, \quad L\neq 0, \quad L\neq\infty$, то ряды (4.5) и (4.6) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2-3n+5}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{(n^2-3n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2-\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2})}=$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=2$. Поскольку $2\neq 0$, то на основании теоремы 4.5 заключаем, что исследуемый ряд расходится.

Теорема 4.6 (признак Даламбера). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$ $a_n>0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится, при $l=1$ вопрос остается открытым — нужно применять другие признаки.

Признак Даламбера удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы (!) и степени.

Пример 4.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение. Так как $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}$,

то $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\,5^n}{5^{n+1}\,n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!(n+1)\,5^n}{5^n \cdot 5 \cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{5} = \infty$. Так как $\infty > 1$, то исследуемый ряд расходится.

Теорема 4.7 (признак Коши). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, а при $l = 1$ вопрос остается открытым.

Пример 4.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} (\dfrac{n+1}{n})^{n^2}$.

Решение. Применим признак Коши, для чего найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} (\frac{n+1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} (\frac{n+1}{n})^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3}.$$

Так как $e \approx 2{,}72$ и $\dfrac{e}{3} < 1$, то на основании признака Коши заключаем, что исследуемый ряд сходится.

Теорема 4.8 (интегральный признак Коши-Маклорена). Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,}$ $a_n > 0$, не возрастают $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ и существует функция $f(x)$, которая определена на промежутке $[1;+\infty\ )$, непрерывна, не возрастает и $a_n = f(n)$, $n = 1,2,\ldots$, то для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходился.

Пример 4.8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши-Маклорена. Заменяя в формуле общего члена $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ число n на переменную x, получаем функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$.

Вычисляем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_1^B \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} =$$

$$\lim_{B\to+\infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^B = \lim_{B\to+\infty}(\ln(\ln B) - \ln(\ln 2)) = \infty .$$

Значит, интеграл расходится, и следовательно, исходный числовой ряд также расходится.

4.1.5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Аналогия между бесконечными рядами и конечными суммами может быть проведена в весьма ограниченных масштабах (только для *абсолютно сходящихся* рядов). Процесс образования суммы ряда вовсе не подобен процессу конечного суммирования и вовсе не состоит в том, что члены ряда прибавляются один за другим, «покуда не будут все исчерпаны». Это безнадежно хотя бы потому, что исчерпать бесконечное множество нельзя и поэтому мы заменили процесс бесконечного прибавления операцией предельного перехода, приводящей к понятию суммы ряда. Кроме того, трудно представлять себе «суммою всех членов ряда» такую сумму, величину которой мы можем изменить путем перестановки членов ряда, что имеет место для *условно сходящихся* рядов. Ниже приводятся основные сведения для упомянутых рядов.

Определение 4.7. Числовой ряд называется *знакопеременным ,* если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные действительные числа.

Пусть имеется знакопеременный ряд:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (4.7)$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \qquad (4.8)$$

Определение 4.8. Если сходится ряд (4.8), то ряд (4.7) называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (4.7) сходится, а (4.8) – расходится, то ряд (4.7) называется *условно сходящимся*.

Теорема 4.9 (Коши). Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Пример 4.9. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\cos\alpha}{1^3}+\frac{\cos^2\alpha}{2^3}+\ldots\frac{\cos n\alpha}{n^3}+\ldots$$

Решение. Данный ряд является знакопеременным. Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\left|\frac{\cos\alpha}{1^3}\right|+\left|\frac{\cos 2\alpha}{2^3}\right|\ldots+\left|\frac{\cos n\alpha}{n^3}\right|+\ldots\ .$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов ряда $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p>1$. Значит, по теореме Коши, исходный ряд сходится.

Некоторые свойства абсолютно сходящихся рядов:

1) Любая перестановка членов абсолютно сходящегося ряда приводит к абсолютно сходящемуся ряду с той же суммой; перестановкой же членов условно сходящегося ряда можно получить любую наперед заданную сумму (теорема Римана);

2) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. *Произведением* рядов называется ряд из всевозможных попарных произведений, взятых в некотором порядке $\sum_{k=1}^{\infty}a_{p_k}b_{q_k}$. Если этот ряд (из произведений рядов)

сходится, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение также сходится абсолютно к сумме, равной произведению сумм указанных рядов.

4.1.6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся ряды, для которых некоторые общие свойства могут быть конкретизированы.

Определение 4.9. Если числовой ряд имеет вид

$$a_1 - a_2 + a_3 - ...(-1)^{n-1} + \dots \qquad (4.9)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n + ..., \quad a_n > 0 \ , \qquad (4.10)$$

то он называется *знакочередующимся.*

Теорема 4.10 (признак Лейбница). Если для знакочередующегося ряда (4.9) или (4.10) выполняются условия:

1) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ...$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд сходится и его сумма не превосходит a_1, а остаток ряда r_n не превышает по абсолютной величине первого отбрасываемого члена:

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

Пример 4.10. Исследовать на сходимость ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

Решение. Данный ряд – знакочередующийся. Члены его убывают по абсолютной величине : $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > ... > \frac{1}{n} > ....$ и предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$ Следовательно, этот ряд сходится по теореме 4.10 и его сумма $S \leq 1$.

4.2. Степенные ряды

До сих пор мы рассматривали ряды, членами которых были числа. Однако для математического анализа в первую очередь нужны функциональные ряды, т.е. ряды, членами которых являются функции. Бесспорно, наиболее важным для приложений является специальный класс функциональных рядов — степенные ряды.

4.2.1. Понятие функционального ряда и его области сходимости

Определение 4.10. Ряд вида

$$f_1(x)+f_2(x)+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad \textbf{(4.}11)$$

где $f_n(x)$, $n=1,2,...,n$, функции, определенные на некотором множестве X, называется *функциональным рядом*. Сумма $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$ называется $n-$*частичной суммой* ряда, а ряд $r_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...$ называется остатком ряда (4.11).

Очевидно, что при каждом конкретном значении $x\in X$ функциональный ряд (4.11) превращается в обычный числовой ряд, который может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 4.11. Совокупность всех значений $x\in X$, при которых функциональный ряд (4.11) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда, а функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ называется *суммой* ряда (4.11).

Можно показать, что для сходящегося ряда справедливо равенство $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, $x\in X$.

Определение 4.12. Функциональный ряд (4.10) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$.

4.2.2. Степенные ряды. Теорема Абеля

Определение 4.13. Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (4.12)$$

или в более общей форме

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (4.13)$$

называется *степенным рядом.*

С помощью замены $y = x - x_0$ исследование сходимости ряда (4.13) можно свести к исследованию сходимости ряда (4.12). Ясно, что при $x = 0$ (или $x = x_0$) степенной ряд сходится. При изучении области сходимости степенных рядов важную роль играет следующая теорема.

Теорема 4.11 (Абеля). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0$, то он сходится причем абсолютно для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| \le |x_0|$. Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x удовлетворяющих условию $|x| \ge |x_1|$.

4.2.3. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда (4.12) найдется такое неотрицательное число R, называемое *радиусом сходимости,* что при всех x, $|x| < R$ ряд сходится, а при всех x, $|x| > R$, ряд расходится. Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (4.12). Для нахождения радиуса сходимости R используют одну из следующих формул:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (4.14)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (4.15)$$

Если $R = 0$, то ряд (4.12) сходится в единственной точке $x_0 = 0$; если $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Итак, *интервал сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ есть $(-R; R)$.

Для нахождения *области сходимости* ряда (4.12) надо отдельно исследовать сходимость в точках $x = -R$ и $x = R$; в зависимости от результатов этого исследования областью сходимости ряда (4.12) может быть один из промежутков: $[-R; R]$, $[-R; R]$, $(-R; R)$, $[-R; R)$, $(-R; R]$.

Пример 4.11. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{3^n}{n+1}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+2}$. По формуле (4.14) находим $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n (n+2)}{(n+1)3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3}$; значит, ряд сходится на интервале $(-1/3; 1/3)$. При $x = \frac{1}{3}$ получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (\frac{1}{3})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, который расходится (как гармонический ряд). При $x = -\frac{1}{3}$ получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (-\frac{1}{3})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{30} - \ldots .$$

Данный знакочередующийся ряд удовлетворяет признаку Лейбница (Теорема 4.10) и поэтому сходится. Следовательно, областью сходимости ряда является полуинтервал $[-1/3; 1/3)$.

4.2.4. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

Среди различных аналитических аппаратов исследования функций первое место по своей простоте и удобству употребления занимают функциональные (или степенные) ряды. Идея проста: функция, которую мы хотим изучить, представляется как предел частичных сумм некоторых простейших функций.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка.

Определение 4.14. Степенной ряд вида

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \qquad (4.16)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (4.17)$$

называется рядом *Маклорена.*

Теорема 4.12 (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Если функция $f(x)$ и ее производные любого порядка ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом M :

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M, \quad (n=0,1,2,....)\ , \qquad (4.18)$$

то ряд Тейлора этой функции сходится к самой $f(x)$ для любого x из этой окрестности.

Теорема 4.13. Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Выпишем теперь разложение в степенные ряды (ряды Маклорена) некоторых элементарных функций:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{4.19}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{4.20}$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{4.21}$$

Данные разложения верны для $x \in (-\infty;+\infty)$.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \tag{4.22}$$

Данное разложение верно при $x \in (-1;+1)$ и, может быть, при $x = \pm 1$ (это решается для конкретного α индивидуально).

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n!} + \ldots \tag{4.23}$$

Ряд (4.23) сходится при $x \in \left[-1;1\right)$.

Степенные ряды применяются для вычисления с заданной точностью значений функций; для приближенного вычисления определенных интегралов и для решения других задач, в частности, при интегрировании дифференциальных уравнений.

Пример 4.12. Вычислить $\int\limits_{0}^{0,5} e^{-x}dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Подставляя $-x$ вместо x в разложение (4.19), получим $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$.

Этот ряд сходится при всех x; интегрируя его почленно, получим:

$$\int_0^{0,5} e^{-x}dx = \int_0^{0,5} (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots)dx =$$

$$= (x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)n!} + \ldots\Big|_0^{0,5} =$$

$$= 0,5 - \frac{(0,5)^2}{2!} + \frac{(0,5)^3}{3 \cdot 2!} - \frac{(0,5)^4}{4 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 0,5^{n+1}}{(n+1)n!} + \ldots. \quad .$$

Полученный знакочередующийся ряд имеет сумму, которую надо вычислить с точностью до $0,001$. По теореме 4.10 (признак Лейбница), остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит по абсолютной величине абсолютной величины первого отбрасываемого члена, поэтому

$$\int_0^{0,5} e^{-x}dx \approx 0,5 - \frac{0,25}{2} + \frac{0,125}{3 \cdot 2} - \frac{0,0625}{4 \cdot 6} = 0,5 - 1,125 + 0,0208 - 0,0026 =$$

$$= 0,0182 \approx 0,018.$$

Заданная точность обеспечена, так как первый отброшенный член удовлетворяет требуемому неравенству

$$\frac{(0,5)^5}{5 \cdot 4!} = \frac{0,03125}{5 \cdot 24} = 0,00026 < 0,001.$$

Вопросы для повторения и тренировочные задания

1. Функции многих переменных

1. Приведите примеры функций двух, трех и n переменных.
2. Дайте определение функции многих переменных.
3. Что называется областью определения и областью значений функции многих переменных?
4. Какое множество называется графиком функции многих переменных?
5. Что называется линией уровня функции $z = f(x, y)$?
6. Какая последовательность точек $M_1, M_2, ...M_n...$ называется сходящейся к точке M_0?
7. Дайте определение предела функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
8. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами функций двух переменных.
9. Приведите определение непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
10. Какие теоремы о свойствах непрерывных в точке $M_0(x_0, y_0)$ функциях Вы знаете?
11. Приведите определение частных производных по x по y для функции $z = f(x, y)$. Как они обозначаются?
12. Сформулируйте правило для нахождения частных производных по x и по y?
13. Как определяется полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$?
14. .Приведите определение функции, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$.
15. Сформулируйте теорему о достаточном условии дифференцируемости функции $z = f(x, y)$.
16. Приведите формулу приближенного вычисления функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ с помощью полного дифференциала.

17. Как определяются частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$?

18. Приведите определения строгого минимума и строго максимума функции $z = f(x, y)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$.

19. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции двух переменных.

20. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции двух переменных.

21. В чем состоим суть метода наименьших квадратов получения параметров эмпирических формул?

22. Приведите нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой.

23. Приведите нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по параболе.

24. Приведите нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по гиперболе.

Тренировочное задание № 1

1. Для функции полезности двух переменных $u = (x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, где $X = (x_1, x_2) -$ набор товаров двух видов, $u(X) = u(x_1, x_2) -$ субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора X вычислить:

а) частные производные первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$;

б) частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$;

в) полный дифференциал du;

г) с помощью полного дифференциала приближенно вычислить полезность набора $X = (24; 10)$.

2. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$. Найти среднюю и предельную производи-

тельность труда, среднюю и предельную фондоотдачу, эластичность выпуска по труду и по фондам.

3. Найти полный дифференциал функции $z = f(x, y)$, если

а) $z = x^2y^3 + \dfrac{x}{y}$; б) $z = \sqrt{2x^3 + y^4}$; в) $z = arctg(x - y)$; г) $z = x^y$.

4. Исследовать функцию $z = xy(1 - x - y)$ на экстремум.

5. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}99^2}$.

Решение тренировочного задания № 1

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = (\sqrt{x_1}\sqrt{x_2})'_{x_1, x_2 = const} = \sqrt{x_2}(\sqrt{x_1})' = \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = (\sqrt{x_1}\sqrt{x_2})'_{x_2, x_1 = const} = \sqrt{x_1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} = \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$. Здесь при нахождении частной производной по x_1 переменную x_2 считаем постоянной, а постоянный множитель выносится за знак производной. Аналогично вычислялась частная производная по x_2.

б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}\right)'_{x_1,\, x_2 = const} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2}}{2}(x_1^{-1/2})' = \frac{\sqrt{x_2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x_1^{-3/2} = -\frac{\sqrt{x_2}}{4\sqrt{x_1^3}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}\right)'_{x_2,\, x_1 = const} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_1}}{2}(x_2^{-1/2})' = \frac{\sqrt{x_1}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x_2^{-3/2} = -\frac{\sqrt{x_1}}{4\sqrt{x_2^3}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{4\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = \frac{1}{4\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}.$$

в) используя формулу для нахождения полного дифференциала:

$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$, получим $du = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} dx_1 + \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} dx_2$.

г) используя формулу

$$u\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2\right) \approx u\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)\Delta x_2$$

и выбирая в качестве $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ такую точку, в которой значения функции и ее частных производных вычисляются легко и эта точка близка к точке (24, 10), получим: $x_1^0 + \Delta x_1 = 24$, $x_2^0 + \Delta x_2 = 10$, $x_1^0 = 25$, $\Delta x_1 = -1$, $x_2^0 = 9$, $\Delta x_2 = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right) = \left(\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}\right)_{x_1^0 = 25, x_2^0 = 9} = \frac{\sqrt{25}}{2\sqrt{9}} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right) = \left(\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}\right)_{x_1^0 = 25, x_2^0 = 9} = \frac{\sqrt{9}}{2\sqrt{25}} = \frac{3}{10};$$

$$u\left(x_1^0, x_2^0\right) = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15.$$

Тогда $u(24{,}10) \approx 15 + \frac{5}{6} \cdot (-1) + \frac{3}{10} \cdot 1 = 14{,}467$.

Таким образом, полезность набора $X = (24;\ 10)$ составляет 14,467 единиц.

2. *Производственная функция Кобба-Дугласа*, наиболее известная из производственных функций, имеет вид: $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α, β – неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$; K – объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном исчислении, например, количество станков; L – объем трудовых ресурсов, например, число рабочих; y – выпуск продукции в стоимостном выражении. Величина $l = \dfrac{y}{L}$ называется *средней производительностью труда,* т.е. это количество продукции (в стоимостном выражении), произведенное одним рабочим. В нашем случае $l = \dfrac{1000K^{1/2}L^{1/3}}{L} = \dfrac{1000K^{1/2}}{L^{2/3}}$. Величина $y'_L = \dfrac{\partial y}{\partial L}$ называется *предельной производительностью труда,* т.к. частная производная от производственной функции по объему трудовых ресурсов приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной еще одним дополнительным рабочим. В нашем случае

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \left(1000K^{1/2}L^{1/3}\right)'_{L,K=const} = 1000 \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}} = \frac{1000}{3} \cdot \frac{K^{1/2}}{L^{2/3}}.$$

Средней фондоотдачей называется величина $k = \dfrac{y}{K}$, т.к. это количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на один станок. В нашем случае $k = \dfrac{1000K^{1/2}L^{1/3}}{K} = \dfrac{1000L^{1/3}}{K^{1/2}}$. Величина $y'_K = \dfrac{\partial y}{\partial K}$ называется *предельной фондоотдачей,* т.к. частная производная от производственной функции по объему фондов приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной на одном дополнительном станке. В нашем случае

$$y'_K = \frac{\partial y}{\partial K} = \left(1000K^{1/2}L^{1/3}\right)'_{K,L=const} = 1000 \cdot L^{1/3} \cdot \frac{1}{2}K^{-1/2} = \frac{1000L^{1/3}}{2K^{1/2}} = \frac{500L^{1/3}}{K^{1/2}}.$$

Эластичностью выпуска продукции по труду называется величина $E_L^y = \dfrac{y_L}{\frac{y}{L}} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{y}{L}}$. В нашем случае $E_L^y = \dfrac{\frac{1000K^{1/2}}{3 \cdot L^{2/3}}}{1000K^{1/2}L^{-2/3}} = \dfrac{1}{3}$.

И, наконец, *эластичностью выпуска продукции по фондам* называется величина $E_L^y = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial K}}{\dfrac{y}{K}} = \dfrac{\dfrac{500L^{1/3}}{K^{1/2}}}{\dfrac{1000K^{1/2}L^{1/3}}{K}} = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, параметры α и β производственной функции Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ имеют ясный экономический смысл: $\alpha -$это эластичность выпуска по фондам; $\beta -$ это эластичность выпуска по труду. Заметим, что эластичность выпуска по фондам показывает, на сколько процентов возрастет выпуск продукции, если фонды возрастут на 1 %, а эластичность выпуска по труду показывает, на сколько процентов возрастет выпуск продукции, если число рабочих увеличится на 1%.

3. Используя выражение для полного дифференциала: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)dx + \dfrac{\partial z}{\partial xy}(x, y)dy$, находим:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y^3 + \dfrac{x}{y}\right)'_{x,y=const} = y^3\left(x^2\right)'_x + \dfrac{1}{y}(x)' = 2xy^3 + \dfrac{1}{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y^3 + \frac{x}{y}\right)_{y,x=const} = 3x^2y^2 + x \cdot \left(\frac{-1}{y^2}\right) = 3x^2y^2 - \frac{x}{y^2}.$$

Таким образом, $dz = \left(2xy^3 + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(3x^2y^2 - \dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

б) $z = \sqrt{2x^3 + y^4}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{2x^3 + y^4}\right)'_{x,y=const}$ = [используем правило вычисления производной сложной функции] =

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2x^3 + y^4}}\right) \cdot \left(2x^3 + y^4\right)'_x = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 + y^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y^4}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{2x^3 + y^4}\right)'_{y,\ x=const} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + y^4}} \cdot \left(2x^3 + y^4\right)'_y =$$

$$=\frac{4y^3}{2\sqrt{2x^3+y^4}}=\frac{2y^3}{\sqrt{2x^3+y^4}}.\text{ Тогда } dz=\frac{3x^3dx+2y^3dy}{\sqrt{2x^3+y^4}}.$$

в) $z=arctg(x-y)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg(x-y)\right)'_{x,y=const}=\frac{1}{1+(x-y)^2}\cdot(x-y)'_x=\frac{1}{1+(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg(x-y)\right)'_{y,x=const}=\frac{1}{1+(x-y)^2}\cdot(x-y)'_y=\frac{-1}{1+(x-y)^2}.$$

Тогда $dz=\dfrac{dx-dy}{1+(x-y)^2}$.

г) $z=x^y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^y\right)'_{x,y=const}=yx^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^y\right)'_{y,x=const}=x^y\ln x$.

Тогда $dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$.

4. Функция $z=xy(1-x-y)$ определена всюду на R^2. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy-x^2y-xy^2\right)'_{x,y=const}=y-2xy-y^2=y(1-2x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy-x^2y-xy^2\right)'_{y,x=const}=x-x^2-2xy=x(1-x-2y).$$ Частные производные существуют всюду и непрерывны. Для нахождения критических точек решим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y(1-2x-y)=0,\\ x(1-x-2y)=0,\end{cases}\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}y=0,\\ 1-x-2y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=0,\\ 1-2x-y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}1-2x-y=0,\\ 1-x-2y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда имеем четыре критических точки: $M_1(0;0)$; $M_2(1;0)$; $M_3(0;1)$; $M_4(1/3;1/3)$. Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y - 2xy - y^2\right)'_{x,y=const} = -2y\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(x - x^2 - 2xy\right)'_{x,y=const} = (1 - 2x - 2y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x - x^2 - 2xy\right)'_{y,x=const} = -2x\,.$$

Найденные частные производные являются непрерывными функциями. Заполним следующую таблицу:

A, B, C, Δ / Точки	$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$	$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y$	$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$	$\Delta = AC - B$
$M_1(0;0)$	0	1	0	$-1 < 0$
$M_2(1;0)$	0	-1	-2	$-1 < 0$
$M_3(0;1)$	-2	-1	0	$-1 < 0$
$M_4(1/3;1/3)$	$-2/3$	$-1/3$	$-2/3$	$1/3 > 0$

Так как в точках M_1, M_2, M_3 имеем $\Delta < 0$, то в этих точках экстремума нет; так как в точке M_4 имеем $\Delta > 0$, то экстремум есть и поскольку $A < 0$, то M_4 – точка максимума. Максимум функции $z = f(x, y)$ равен

$$z_{\max} = f\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

5. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда искомое число есть значение этой функции при $x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$.

Так как $x = 4{,}03$, то $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}03$; $y = 2{,}99$, $y_0 = 3$, $y_0 = 3$, $\Delta y = -0{,}01$.

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{x_0 = 4,\, y_0 = 3} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{x_0 = 4,\, y_0 = 3} = \frac{3}{5}.$$ Тогда из формулы

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

заключаем, что

$$\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}99^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}03 + \frac{3}{5}(-0{,}01) = 5{,}018.$$

2а. Неопределенный интеграл

1. Какая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b)? Приведите несколько примеров.

2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?

3. Запомните и умейте доказывать основные свойства неопределенного интеграла:

1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

2) $\int d(F(x)) = F(x) + C$;

3) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ (a \neq 0)$.

4. Выучите таблицу основных интегралов (без прочного знания этой таблицы и таблицы производных нельзя научиться интегрировать):

1) $\int 0 \cdot dx = C$;

2) $\int 1\cdot dx = x + C$;

3) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$;

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C\ (x \neq 0)$;

5) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln \alpha} + C\ (\alpha > 0;\ a \neq 1), \quad \int e^{x} dx = e^{x} + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \ n \in Z\right)$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C\ (x \neq \pi n; \quad n \in Z)$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C = -\arccos \dfrac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0, \quad |x| < |a|)$;

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} = -\dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$;

12) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0, \quad |x| \neq |a|)$;

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0, \quad x^2 + a > 0)$.

5. Приведите примеры «неберущихся» интегралов, т.е. интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

6. Приведите примеры нахождения интегралов методом замены переменной (подстановкой).

7. Запомните формулу интегрирования по частям: $\int u d v = u v - \int v du$.

8. Приведите примеры интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям.

9. Приведите примеры интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен, и запомните следующие рекомендации по их нахождению:

I. Интегралы $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводятся к табличным 11) – 13) путем выделения полного квадрата;

II. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx \ (m \neq 0)$ или $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \ (m \neq 0)$ приводятся к табличным выделением из числителя производной знаменателя $2ax+b$;

III. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(m \neq 0)$ с помощью подстановки $\frac{1}{mx+n} = t$ приводятся к ранее рассмотренным интегралам.

IV. Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ путем выделения полного квадрата приводятся к виду $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $\int \sqrt{x^2+a}\, dx$, которые берутся либо с помощью тригонометрических подстановок, либо по формуле интегрирования по частям. Если интеграл содержит $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x = \frac{a}{\cos t}$, $\sqrt{x^2-a^2} = a \operatorname{tg} t$. Если интеграл содержит $\sqrt{x^2+a^2}$, то $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}$.

10. Запомните, что интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{s}{r}} \right) dx$, где R – рациональная функция, $p, q, \ldots, s, r$ – целые числа, находятся с помощью подстановки $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где m – наименьшее общее кратное чисел $q, ..., r$.

11. Внимательно изучите вопрос об интегрировании тригонометрических функций.

Тренировочное задание № 2а

1. Найдите неопределенные интегралы с помощью таблицы интегралов и поднесения под знак дифференциала:

а) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \left(\frac{2-x}{x}\right)^3 dx$; в) $\int \frac{3^{x+1}-5^{x-1}}{15^x} dx$;

г) $\int \frac{dx}{x+5}$; д) $\int tg^2 x\, dx$; е) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

ж) $\int (2x-3)^{11} dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$; и) $\int \frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$;

к) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$; л) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$; м) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$;

н) $\int \frac{dx}{1-3x^2}$; о) $\int \sin 5x\, dx$; п) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

р) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; с) $\int x^3\sqrt{1+x^4} dx$; т) $\int \frac{xdx}{2-5x^2}$;

у) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

2. Укажите возможные подстановки для вычисления интегралов и найдите эти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; б) $\int e^{\cos^2 x} \sin x dx$; в) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$;

г) $\int x^5\sqrt[3]{1+4x^6} dx$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; е) $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

ж) $\int tgx\, dx$; з) $\int \frac{e^x dx}{5+e^x}$.

3. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int x^2 \cos x\, dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$; в) $\int x\, arctg\, x\, dx$; г) $\int e^x \cos x\, dx$.

4. Найдите интегралы, используя методы интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен:

а) $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2+3x}dx$;

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$; г) $\int \sqrt{x^2+2x-3}\, dx$.

5. Найти интегралы, содержащие тригонометрические функции:

а) $\int \cos 5x \cos x dx$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 x \cos x dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение тренировочного задания № 2а

а) $$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx = \int (2x^{1/2}+3x^{-1/2})dx = 2\int x^{1/2}dx + 3\int x^{-1/2}dx =$$

$$= \left[\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \right] = 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + C =$$

$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

б) $$\int \left(\frac{2-x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{(2-x)^3}{x^3}dx = \left[(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\right] =$$

$$= \int \frac{8-12x+6x^2-x^3}{x^3}dx = 8\int x^{-3}dx - 12\int x^{-2}dx + 6\int \frac{dx}{x} - \int dx =$$

$$= \left[\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \int dx = x + C \right] =$$

$$= 8\frac{x^{-2}}{-2} - 12\frac{x^{-1}}{-1} + 6\ln|x| - x + C = \frac{-4}{x^2} + \frac{12}{x} + 6\ln|x| - x + C;$$

в) $\int \frac{3^{x+1}-5^{x-1}}{15^x}dx = \int \frac{3^x \cdot 3}{15^x} - \int \frac{5^x}{5 \cdot 15^x}dx = 3\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx =$

$$= \left[\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\right] = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 3^x \ln 3} + C;$$

г) $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$;

д) $\int tg^2 x dx = \left[1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right] =$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 1dx = tgx - x + C;$$

е) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \left[\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right] = \int \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}(\int 1 \cdot dx + \int \cos x dx) = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C ;$$

ж) $\int (2x-3)^{11} dx =$ [1 -ый способ – поднесение под знак дифференциала: $d(2x-3) = (2x-3)'dx = 2dx, \Rightarrow dx = \frac{1}{2}d(2x-3)$]=

$$== \frac{1}{2}\int (2x-3)^{11} d(2x-3) = \int (2x-3)^{11} \cdot \frac{1}{2} d(2x-3) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{12}}{12} + C = \frac{(2x-3)^{12}}{24} + C;$$

$\int (2x-3)^{11} dx =$ [2-ой способ – замена переменной

$2x-3=t, \quad x = \frac{t+3}{2}, \quad dx = \left(\frac{t+3}{2}\right)' dt, \quad dx = \frac{1}{2}dt$] =

$$= \int t^{11} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int t^{11} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{12}}{12} + C = \frac{t^{12}}{24} + C = \frac{(2x-3)^{12}}{24} + C.$$

Прежде, чем перейти к решению последующих примеров, выпишем **полезные преобразования дифференциальных выражений**:

1. $dx = d(x+C)$. Например, $dx = d(x+5)$, $dx = d(x-20)$;

2. $dx = \frac{1}{k} d(kx), k \neq 0$.

Например, $dx = \frac{1}{3} d(3x)$, $dx = -d(-x)$, $dx = -\frac{1}{10} d(-10x)$, ; $dx = 2d\left(\frac{x}{2}\right)$

3. $dx = \frac{1}{k} d(kx+b), k \neq 0$.

Например, $dx = \frac{1}{2} d(2x \pm 5)$, $dx = -\frac{1}{2} d(5-2x)$, $dx = -3d\left(2-\frac{x}{3}\right)$;

4. $x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} d\left(x^{\alpha+1}\right), \alpha \neq 0$.

Например, $xdx = \frac{1}{2} d\left(x^2\right)$, $x^3 dx = \frac{1}{4} d\left(x^4\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)$

5. $\sin x\, dx = -d(\cos x)$;

6. $\cos x\, dx = d(\sin x)$.

з) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(5-4x)}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{1}{4} \int (5-4x)^{-1/2} d(5-4x) =$

$= -\frac{1}{4} \frac{(5-4x)^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + C$;

и) $\int \frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x} dx = \int \frac{(1-x)^{2/3}}{1-x} dx = \int (1-x)^{-1/3} dx =$

$= \int (1-x)^{-1/3} d(1-x) = -\frac{(1-x)^{2/3}}{2/3} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(1-x)^2} + C$;

к) $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} =$

$$\left[\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C\right] = \frac{1}{3} arctg(3x) + C;$$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{(3x)^2-1}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\right] =$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right| + C.$$

Этот же интеграл можно вычислить иначе:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(x^2-\frac{1}{9}\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}\right| + C_1.$$

В том, что ответы идентичны, можно убедиться, проверив правильность интегрирования дифференцированием. Действительно, в первом случае получим:

$$\left(\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right| + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot\left(3+\frac{18x}{2\sqrt{9x^2-1}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot\frac{3\left(\sqrt{9x^2-1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}};$$

во втором случае получим:

$$\left(\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}\right| + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1/9}}}{x+\sqrt{x^2-1/9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(\sqrt{x^2-1/9}+x)}{(x+\sqrt{x^2-1/9})\sqrt{x^2-1/9}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9(x^2-1/9)}} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}.$$

Значит, в обоих случаях интегрирование выполнено верно.

м) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\left[\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\right]=$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\arcsin(3x)+C;$

н) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-3x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{1-(\sqrt{3}x)^2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2-1}=$

$\displaystyle=\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\right]=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right|+C=$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right|+C;$

о) $\displaystyle\int\sin 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\sin 5x\,d(5x)=-\frac{1}{5}\cos 5x+C;$

п) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 3x}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{\sin^2 3x}=-\frac{1}{3}ctg3x+C;$

р) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-1/2}d(x^2+1)=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2}+C=\sqrt{x^2+1}+C;$

с) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^4}dx=\int(1+x^4)^{1/2}\frac{d(x^4)}{4}=\frac{1}{4}\int(1+x^4)^{1/2}d(1+x^4)=$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\frac{(1+x^4)^{3/2}}{3/2}=\frac{1}{6}\sqrt{(1+x^4)^3}+C;$

второй способ:

$\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^4}dx=\Big[\sqrt{1+x^4}=t,\quad 1+x^4=t^2,\quad d(1+x^4)=d(t^2),$

$$(1+x^4)'dx=(t^2)'dt\,;\;\; 4x^3dx=2t\,dt,\quad x^3dx=\left.\frac{t\,dt}{2}\right]=\int\frac{t\cdot tdt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{(1+x^4)^3}}{6}+C\,;$$

т) $\displaystyle\int\frac{xdx}{2-5x^2}=\frac{1}{-10}\int\frac{d(2-5x^2)}{2-5x^2}=-\frac{1}{10}\ln\left|2-5x^2\right|+C\,;$

второй способ:

$$\int\frac{xdx}{2-5x^2}=\left[2-5x^2=t,\quad d(2-5x^2)=dt,\quad -10xdx=dt;\quad xdx=-\frac{dt}{10}\right]=$$

$$=-\int\frac{dt}{10t}=-\frac{1}{10}\ln|t|+C=-\frac{1}{10}\ln\left|2-5x^2\right|+C\,;$$

у) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\sqrt{(x^3)^2-1}}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C\,;$

2.

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\left[t=\sqrt{1+\ln x},\quad t^2=1+\ln x,\quad d(t^2)=d(1+\ln x);\right.$

$$\left.2t\,dt=\frac{dx}{x}\right]=\int t\cdot 2t\,dt=2\int t^2dt=2\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C\,;$$

б)

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\,dx=[t=\cos^2 x,\;\; dt=(\cos^2 x)'dx,\;\; dt=2\cos x(-\sin x)dx,$$

$$dt=-\sin 2xdx]=\int e^t(-dt)=-\int e^tdt=-e^t+C=-e^{\cos^2 x}+C\,;$$

в) $\displaystyle\int\frac{arctg^3x}{1+x^2}dx=\left[t=arctgx,\quad dt=\frac{dx}{1+x^2}\right]=\int t^3dt=$

$$=\frac{t^4}{4}+C=\frac{arctg^4x}{4}+C\,;$$

г) $\int x^5\sqrt[3]{1+4x^6}dx = \Big[t=\sqrt[3]{1+4x^6},\quad t^3=1+4x^6,$

$d(t^3)=d(1+4x^6),\ 3t^2dt=24x^5dx,\quad x^5dx=\dfrac{t^2}{8}dt\Big] = \int\dfrac{t\cdot t^2dt}{8}=\dfrac{1}{8}\int t^3dt=$

$=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{t^4}{4}+C=\dfrac{1}{32}\sqrt[3]{(1+4x^6)^4}+C;$

д) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\Big[t=\sqrt{x+1},\quad t^2=x+1,\quad d(t^2)=d(x+1);\quad 2tdt=dx,$

$x=t^2-1\ \Big]=\int\dfrac{2tdt}{(t^2-1)t}=2\int\dfrac{dt}{t^2-1}=2\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C;$

е)

$\int\cos\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{x^2}=\left[t=\dfrac{1}{x},\quad dt=\dfrac{-dx}{x^2}\ \right]=-\int\cos tdt=-\sin t+C=-\sin\dfrac{1}{x}+C;$

ж) $\int tgxdx=\int\dfrac{\sin xdx}{\cos x}=[t=\cos x,\quad dt=-\sin xdx]=$

$-\int\dfrac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C;$

з)

$\int\dfrac{e^xdx}{5+e^x}=[t=5+e^x,\quad dt=e^xdx]=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|x|+C=\ln(5+e^x)+C.$

3. Так как $\int udv=uv-\int vdu,$ то получим:

а)

$$\int x^2\cos xdx=\begin{bmatrix}u=x^2, & du=2xdx,\\ dv=\cos xdx, & v=\sin x\end{bmatrix}=x^2\sin x-\int\sin x\cdot 2xdx=$$

$$x^2\sin x-2\int x\sin xdx=\begin{bmatrix}u=x, & du=dx,\\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x\end{bmatrix}=x^2\sin x-2(x(-\cos x)-$$

$$-\int(-\cos x)dx)=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos xdx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C;$$

б) $\int x^2 \ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = x^2 dx, & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{matrix}\right] = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C;$$

в)

$$\int xarctgxdx = \left[\begin{matrix} u = arctgx, & du = \frac{1}{1+x^2}dx, \\ dv = xdx, & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right] = arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C;$$

г) $\int e^x \cos x dx = \left[\begin{matrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix}\right] = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$

$$\left[\begin{matrix} u = e^x, du = e^x dx, \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{matrix}\right] = e^x \sin x - (e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x dx) =$$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$ Таким образом, получили уравнение относительно искомого интеграла. Следовательно, $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

4. а) $\int \frac{dx}{x^2+8x+7} = \int \frac{dx}{x^2+8x+16-9} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-9} =$

$$\int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C;$$

б)

$$\int \frac{2x-3}{x^2+3x}dx = \int \frac{2x+3-6}{x^2+3x}dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx - 6\int \frac{dx}{x^2+3x} = \int \frac{d(x^2+3x)}{x^2+3x} -$$

$$-6\int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}} = \int \frac{d(x^2+3x)}{x^2+3x} - 6\int \frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}} = \ln\left|x^2+3x\right| -$$

$$-6\int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2} = \ln\left|x^2+3x\right| - 6\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C = \ln\left|x^2+3x\right| - 2\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| +$$

$$+C = \ln\left|x^2+3x\right| - \ln\left|\frac{x}{x+3}\right|^2 + C = \ln\left|\frac{(x^2+3x)(x+3)^2}{x^2}\right| + C = \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x}\right| + C;$$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x-x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{-(x^2+4x-1)}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{-(x^2+4x+4-5)}} =$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-(x+2)^2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2, dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{(t-2)dt}{\sqrt{5-t^2}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{5-t^2}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-t^2)}{\sqrt{5-t^2}} -$$

$$-2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} + C = -\sqrt{5-t^2} - 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} + C = -\sqrt{1-4x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C;$$

г) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx = \int \sqrt{x^2+2x+1-4}dx = \int \sqrt{(x+1)^2-4}dx =$

$$=\left[x+1=t, x=t-1, dx=dt\right]=\int\sqrt{t^2-4}dt=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\sqrt{t^2-4}, du=\dfrac{1}{2\sqrt{t^2-4}}\cdot 2tdt=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-4}} \\ dv=dt, v=t \end{bmatrix}=t\sqrt{t^2-4}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2-4}}=$$

$$=t\sqrt{t^2-4}-\int\frac{(t^2-4+4)dt}{\sqrt{t^2-4}}=t\sqrt{t^2-4}-\int\sqrt{t^2-4}dt-\int\frac{4dt}{\sqrt{t^2-4}}=$$

$$=t\sqrt{t^4-4}-4\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|-\int\sqrt{t^2-4}dt.$$

Значит, из последних соотношений получаем уравнение относительно искомого интеграла

$$2\int\sqrt{t^2-4}dt=t\sqrt{t^2-4}-4\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|,$$

$$\int\sqrt{t^2-4}dt=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right| \text{ или}$$

$$\int\sqrt{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}-2\ln\left|x+1\right|+\sqrt{x^2+2x-3}+C.$$

5. а) $\int\cos 5x\cos xdx=\left[\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta));\right]=$

$$=\int\frac{1}{2}(\cos(5x+x)+\cos(5x-x))dx==\frac{1}{2}\int\cos 6xdx+\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 4x+C.$$

б) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int tg^2xd(tgx)=\frac{tg^3x}{3}+C;$

в) $\int\sin^6 x\cos xdx=\int\sin^6 xd(\sin x)=\frac{\sin^7 x}{7}+C;$

г) $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=-\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$

2б. Определенный интеграл

1. Что называется разбиением отрезка $[a,b]$ и как оно обозначается?
2. Что называется интегральной суммой или суммой Римана?
3. Сформулируйте понятие предела интегральных сумм.
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции и покажите на примере функции Дирихле, что оно не является достаточным.
6. Перечислите классы интегрируемых функций.
7. Заучите свойства определенного интеграла.
8. Сформулируйте теорему о среднем значении.
9. Что называется интегралом с переменным верхним пределом?
10. Сформулируйте теорему о существовании первообразной для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ в виде интеграла с переменным верхним пределом.
11. Докажите теорему: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.
12. Изучите вопрос о замене переменной и интегрировании по частям в определенном интеграле, обратив внимание на примеры, разобранные в учебнике.
13. Докажите следующее свойство: определенный интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку $[a,a]$ равен нулю.
14. Внимательно изучите раздел, посвященный геометрическим и экономическим приложениям определенного интеграла, разобрав приведенные в учебнике примеры.
15. Запишите формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема тела вращения и длины дуги плоской кривой.
16. Что называется несобственным интегралом функции $f(x)$:

а) по промежутку $[a,+\infty)$?

б) по промежутку $(-\infty,a]$?

в) по промежутку $(-\infty,+\infty)$?

17. Что называется несобственным интегралом от неограниченной на отрезке функции $f(x)$?

18. Приведите примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Тренировочное задание № 2б

1. Вычислить определенные интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница:

а) $\int\limits_{-2}^{3}(2x^3+x^2-5)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$; г) $\int\limits_{-3}^{3}(x^3-5x+\sin x)dx$.

2. Пользуясь заменой переменной в определенном интеграле, вычислить следующие определенные интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int\limits_{0}^{2}xe^{x^2}dx$;

в) $\int\limits_{1}^{4}\dfrac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$; г) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

3. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить следующие определенные интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\arccos x\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x-x^2$ и $y=x$.

5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки $(5;5\sqrt{5})$.

6. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$ (одной полуволной) и $y = 0$.

7. Пусть функция $g(t) = (t-1)^2$ задает мощность потребления электроэнергии на промежутке времени $t \in [0;\ 2]$, т.е. потребление энергии сначала падает, затем возрастает. Найти расход энергии на этом промежутке времени.

8. Пусть мгновенная мощность производства некоторой продукции есть функция времени $p(t) = t^3$, где $t \in [0;\ 2]$. Найти выпуск продукции V за время $T = [0;\ 2]$.

9. Пусть функция Джинни $y = y(x)$, показывающая часть $y(x)$ всего общественного богатства, которой владеет x–я часть самых бедных людей общества, есть а) $y = x^2$; б) $y = x^3$. Найти коэффициент Джинни распределения богатства в обществе.

Решение тренировочного задания № 26

1. Используя свойства определенного интеграла, таблицу неопределенных интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

а) $$\int_{-2}^{3}(2x^3 + x^2 - 5)dx = \int_{-2}^{3}2x^3dx + \int_{-2}^{3}x^2dx - \int_{-2}^{3}5dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{3} + \frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3} -$$

$$-5x\bigg|_{-2}^{3} = \frac{1}{2}(3^4 - (-2)^4) + \frac{1}{3}(3^3 - (-2)^3) - 5(3-(-2)) = \frac{1}{2}(81-16) +$$

$$+\frac{1}{3}(27+8) - 5(3+2) = 32\frac{1}{2} + \frac{35}{3} - 25 = 32 + 11 - 25 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 19\frac{1}{6};$$

б) $$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\bigg|_{0}^{1} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6};$$

в) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\sin x) - -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) = \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\sin^3 0}{0} = 1 - 0 - \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{3};$$

г) подынтегральная функция $f(x) = x^3 - 5x + \sin x$ является нечетной, так как $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) + \sin(-x) = -x^3 + 5x - \sin x = -(x^3 - 5x + \sin x) = -f(x)$; промежуток интегрирования [–3; 3] симметричен, поэтому данный интеграл равен нулю.

2. При использовании метода замены переменной при вычислении определенных интегралов надо *заменить пределы* интегрирования с помощью формулы замены переменной. При этом отпадает необходимость возвращаться к исходной переменной интегрирования.

а) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \Big[\sqrt{1+\ln x} = t,\quad 1 + \ln x = t^2,\quad d(1+\ln x) = d(t^2),$

$(1+\ln x)'dx = (t^2)'dt$, $\frac{1}{x}dx = 2tdt$; если $x = 1$, то $t = \sqrt{1+\ln 1} = 1$;

если $x = e$, то $t = \sqrt{1+\ln e} = \sqrt{2}\Big] = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t\,dt}{t} = 2\int_1^{\sqrt{2}} dt = 2t\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$;

б) $\int_0^2 xe^{x^2} dx = [x^2 = t,\quad d(x^2) = dt,\quad 2x\,dx = dt,\quad x\,dx = \frac{1}{2}dt,$ если

x=0, то $t = 0$, если $x = 2$, то $t = 4] = \int_0^4 \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 =$

$$= \frac{1}{2}(e^4 - e^0) = 0{,}5(e^4 - 1);$$

в) $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}} = \Big[\sqrt{2+4x} = t,\ 2 + 4x = t^2,\ x = \frac{t^2-2}{4},\ dx = \frac{2t\,dt}{4},$

$dx=\frac{1}{2}t\,dt$; если $x=1$, то $t=\sqrt{6}$; если $x=4$, то $t=\sqrt{18}\Big]$

$$=\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}}\frac{(t^2-2)t\,dt}{4\cdot 2t}=\frac{1}{8}\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}}(t^2-2)dt=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)\Bigg|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{18\sqrt{18}}{3}-2\sqrt{18}+\frac{6\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{6}\right)=\frac{1}{8}\cdot 4\sqrt{18}=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

г) $$\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$\Big[x+\frac{1}{2}=t,\ x=t-\frac{1}{2},\quad dx=dt;$ если $x=-1$, то $t=-\frac{1}{2}$; если $x=1$,

то $t=\frac{3}{2}\Big]$ $$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}==\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\ln\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\cdot 3}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\sqrt{3}+arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\ln 3}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

3. Пользуясь формулой интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u\,dv$$

и рекомендациями по рациональному выбору функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, изложенными в теме «Неопределенный интеграл», получаем:

а) $$\int_1^2 x^2 \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{1}{x}dx, \\ dv = x^2\,dx,\ v = \int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \left(\ln x \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = = \ln 2\cdot\frac{8}{3} - \ln 1\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9};$$

б) $$\int_0^1 \arccos x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arccos x,\ du = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx,\ v = x \end{bmatrix} = \arccos x\cdot x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos 1\cdot 1 - \arccos 0\cdot 0 - \int_0^1 \frac{d\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}} = 0\cdot 1 - \frac{\pi}{2}\cdot 0 -$$

$$-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = -\sqrt{1-1^2} + \sqrt{1-0^2} = 1;$$

в) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos x\,dx,\ v = \sin x \end{bmatrix} = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0 - \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1;$$

г) $$I = \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{4-x^2},\ du = \dfrac{-x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}, \\ dv = dx,\ v = x \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\sqrt{4-x^2}\cdot x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-1}\cdot 1 - \sqrt{4-0}\cdot 0 - \int_0^1 \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx + 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{3} - I + 4\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0\right) = \sqrt{3} - I + 4\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \sqrt{3} - I + \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, получено уравнение

$$I = \sqrt{3} - I + \frac{2\pi}{3},\ 2I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3},\ I = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

4. Найдем точки пересечения кривых $y = 2x - x^2$ и $y = x$, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Значит, кривые пересекаются в точках O (0; 0) и M (1; 1). Выполним чертеж, построив параболу $y = 2x - x^2$ и прямую $y = x$. Требуется найти площадь заштрихованной части (рис. А). Воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

где $f(x) \ge g(x)$ при $x \in [a,b]$.

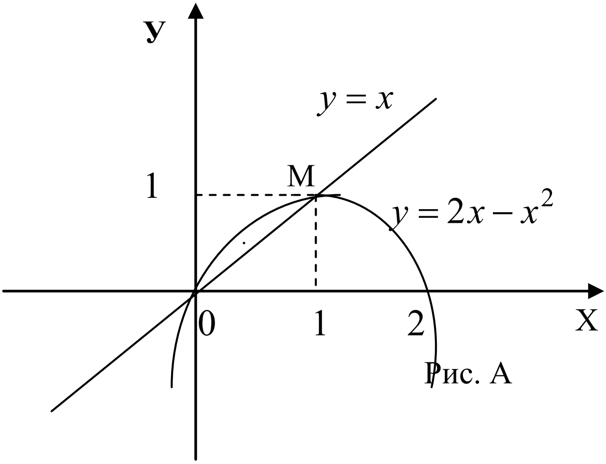


Рис. А

$$S=\int_0^1\left(2x-x^2-x\right)dx=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{6}.$$

5. Воспользуемся формулой вычисления длины дуги кривой $y=f(x)$ от $x=a$ до $x=b$: $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. В нашем случае $y^2=x^3$, значит $d\left(y^2\right)=d\left(x^3\right)$ или $2ydy=3x^2dx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{y}$, где $\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$. Тогда $\left(f'(x)\right)^2=\frac{9}{4}\cdot\frac{x^4}{y^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{x^4}{x^3}=\frac{9}{4}x.$ Итак,

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\sqrt{1+\frac{9}{4}x}=t,\ x=\frac{4}{9}\left(t^2-1\right),\ dx=\frac{4}{9}2t\,dt,\text{ если } x=0\text{, то } t=1;\text{ если } x=5,\text{ то } t=\frac{7}{2}\right]=\int_1^{\frac{7}{2}}t\cdot\frac{8}{9}tdt=\frac{8}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{2}}=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3-1^3\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-1\right)=\frac{8}{27}\cdot\frac{335}{8}=\frac{335}{27}=12\frac{11}{27}.$$

6. Используем формулу для вычисления объема тела вращения фигуры, ограниченной $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ вокруг оси Ox: $V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. В нашем случае получим:

$$V_x = \pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi (1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - 0 + \sin 0\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

7. При переменной во времени мощности потребления $q(t)$ расход энергии Q за время от $t_0 = a$ до $t_1 = b$ есть определенный интеграл: $Q = \int\limits_a^b q(t)dt$. Тогда

$$Q = \int\limits_0^2 (t-1)^2\,dt = \int\limits_0^2 (t-1)^2\,d(t-1) = \frac{(t-1)^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

8. Так как определенный интеграл $V = \int\limits_a^b p(t)dt$ равен выпуску продукции за время от a до b, то в нашем случае получим:

$$V = \int\limits_0^2 t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 0^4\right) = \frac{1}{4}\cdot 16 = 4.$$

9. В первом случае

$$S_{фиг.} = \int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

во втором случае

$$S_{фиг.} = \int\limits_0^1 \left(x - x^3\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

3: Дифференциальные уравнения

1. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка?
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Запишите общий вид дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
4. Как называется дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной?
5. Какая функция называется решением дифференциального уравнения n-го порядка?
6. Запишите дифференциальное уравнение первого порядка а) в виде уравнения, разрешенного относительно старшей производной; б) в дифференциалах.
7. Что называется решением задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
8. Ознакомьтесь с формулировкой теоремы Коши и с примерами ее применения.
9. Дайте определение общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка.
10. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и изучите процесс интегрирования уравнений такого типа.
11. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
12. Изучите интегрирование дифференциальных линейных уравнений первого порядка с помощью подстановки $y(x)=u(x)\cdot v(x)$.
13. Какое дифференциальное уравнение называется:

а) линейным дифференциальным уравнением второго порядка?

б) линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?

14. Какое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами называется:

а) однородным? б) неоднородным?

15. Перечислите свойства решений линейных однородных уравнение второго порядка.

16. Какие два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми?
17. Как строится общее решение линейного дифференциального однородного уравнения?
18. Ознакомьтесь с методом Эйлера нахождения общего решения уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Тренировочное задание № 3

1. Проинтегрировать уравнения:

а) $y' = e^{x-y}$; б) $y' = y \ln y$;

в) $\sqrt{x^2-1}\, dy - dx = 0$; г) $y' = 2xe^{-x^2}$.

2. Проинтегрировать уравнения и найти частные решения:

а) $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$, $y(2) = 5$; б) $y' = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$;

в) $xdx - \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$, $y(0) = 1$; г) $y' = \dfrac{e^y}{x}$, $y(1) = 0$.

3. Найти общее и частное решения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 1$;

б) $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$.

4. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений:

а) $y'' + 7y' + 10y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$;

в) $y'' - 6y' + 10y = 0$; г) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

5. Найти общее и частное решения, удовлетворяющие начальным условиям, линейных дифференциальных уравнений:

а) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$;

в) $y'' + 2y' - 8y = 7\sin x - 11\cos x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Решение тренировочного задания № 3

1а) Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части полученного уравнения $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$ на $e^y dx$. Получим $e^y dy=e^x dx$. Проинтегрировав, будем иметь $\int e^y dy=\int e^x dx+C$, или $e^y=e^x+C-$ общий интеграл данного уравнения. Тогда $y=\ln(e^x+C)-$общее решение данного уравнения.

1б) $\dfrac{dy}{dx}=y\ln y$. Умножим обе части уравнения на $\dfrac{1}{y\ln y}$, считая пока, что $y\ln y\neq 0$. Тогда $\dfrac{dy}{y\ln y}=dx$, или $\int \dfrac{dy}{y\ln y}=\int dx+C$. Отсюда $\int \dfrac{d(\ln y)}{\ln y}=x+C$, $\ln|\ln y|=x+C$. Для удобства преобразований положим $C=+\ln|C_1|$, где C_1-произвольная постоянная. Тогда $|\ln y|=e^{x+\ln|C_1|}$ или $|\ln y|=e^x\cdot|C_1|$. Тогда $y=e^{C_1e^x}-$ общее решение данного уравнения. При умножении на $\dfrac{1}{y\ln y}$ могли быть потеряны решения $y=0$ и $y=1$. Этого в данном примере не случилось, так как эти частные решения получаются из общего при $C_1=-\infty$ и $C_1=0$, соответственно.

1в) Умножим обе части на $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Тогда $dy-\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

Интегрируя, получаем $\int dy-\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=C$ или $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\ln|C_1|$. Тогда, окончательно $y=\ln C\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. Решения $x=\pm1$ также удовлетворяют исходному уравнению.

1г) $\frac{dy}{dx} = 2xe^{-x^2}$. Умножая обе части на dx, получаем $dy = 2xe^{-x^2}dx$. Интегрируя, будем иметь $\int dy = \int 2xe^{-x^2}dx + C$, или $y = -\int e^{-x^2}d(-x^2) + C$. Тогда $y = -e^{-x^2} + C$ – общее решение.

2а) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$. Умножим обе части на $\frac{dx}{y}$, тогда $\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}$. Интегрируя, получаем $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{1+x^2} + C$ или $\ln|y| = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \ln|C_1|$. Значит, $\ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln|C_1|$ или $\ln|y| = \ln|C_1(1+x^2)|$. Тогда общее решение исходного уравнения есть $y = C_1(1+x^2)$. Найдем частное решение. Поскольку по условию $y(2) = 5$, то $5 = C_1(1+2^2)$, откуда $C_1 = 1$. Значит, искомое частное решение есть $y = 1 + x^2$.

2б) $\frac{dy}{dx} = 2xe^{-x^2}$. Умножая обе части на dx, получаем $dy = 2xe^{-x^2}dx$. Интегрируя, будем иметь $\int dy = \int 2xe^{-x^2}dx + C$, $y = -\int e^{-x^2}d(-x^2) + C$, $y = -e^{-x^2} + C$. С учетом начальных условий $y(0) = 1$, получаем $1 = -e^0 + C$, $C = 2$. Значит, искомое частное решение есть $y = -e^{-x^2} + 2$.

2в) $xdx = \sqrt{1-x^2}dy$. Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dy$. Проинтегрировав, будем иметь $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dy + C$. Поскольку $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, то $y = -\sqrt{1-x^2} - C$. Подставляя в последнее равенство начальные условия $y(0)=1$, получаем $1=-\sqrt{1-0^2}-C$, откуда $C=-2$. Поэтому искомое частное решение имеет вид: $y=2-\sqrt{1-x^2}$.

2г) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{x}$. Умножив обе части уравнения на $\frac{dx}{e^y}$, получим $\frac{dy}{e^y}=\frac{dx}{x}$ или $e^{-y}dy=\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем $\int e^{-y}dy=\int \frac{dx}{x}+\ln|C|$ или $e^{-y}dy=\ln|x|+\ln|C|$. Отсюда $-e^{-y}=\ln|xC|$. Данное выражение есть общий интеграл исходного уравнения. Подставляя начальные условия $y(1)=0$, получаем, что $-e^{-0}=\ln|C|$, откуда $\ln|C|=-1$, $C=\frac{1}{e}$. Значит, частный интеграл есть $-e^{-y}=\ln\left|\frac{x}{e}\right|$ или $-e^{-y}=\ln|x|-1$. Выражая из последнего равенства y, найдем искомое частное решение. Имеем:

$$e^{-y}=1-\ln|x|,\ -y=\ln(1-\ln|x|),\quad y=-\ln(1-\ln|x|).$$

3а) $y'+y=e^{-x}$. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим его заменой $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Тогда $u'v+uv'+uv=e^{-x}$ или $u'v+u(v'+v)=e^{-x}$. Выберем функцию $v=v(x)$ так, чтобы $v'+v=0$. Тогда $\frac{dv}{dx}=-v$ или $\frac{dv}{v}=-dx$. Интегрируя, получаем $\ln|v|=-x+C$. Полагая $C=0$, находим $v=e^{-x.}$ Тогда уравнение $u'v+u(v'+v)=e^{-x}$ принимает вид $u'e^{-x}=e^{-x}$, значит, $u'=1$. Решая последнее уравнение и находя затем $y=uv$, получаем

$$\frac{du}{dx}=1,\ du=dx,\ \int du=\int dx+C,\ u=x+C.$$

Следовательно, $y=(x+C)e^{-x}$ – общее решение исходного уравнения. Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $y(0)=1$:

$1 = (0 + C)\, e^{-0}$. Тогда $1 = C \cdot 1$, $C = 1$. Значит, искомое частное решение есть $y = (x + 1)e^{-x}$.

3б) $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin x$. Выполняя замену $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получаем $u'v + uv' - uv\sin x = e^{-\cos x}\sin x$ или $u'v + u(v' - v\sin x) = e^{-\cos x}\sin x$. (*)

Пусть $v = v(x)$ – какое-либо частное решение уравнения $v' - v\sin x = 0$. Тогда $\dfrac{dv}{dx} = v\sin x$, $\dfrac{dv}{v} = \sin x dx$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \sin x dx$, $\ln|v| = -\cos x$, $v = e^{-\cos x}$. Подставляя найденное v в уравнение ($*$), будем иметь $u'e^{-\cos x} = e^{-\cos x}\sin x$ или $u' = \sin x$, $\dfrac{du}{dx} = \sin x$, $du = \sin x dx$, $\int du = \int \sin x dx + C$, $u = -\cos x + C$. Тогда общее решение исходного уравнения есть $y = uv$; $y = (-\cos x + C)e^{-\cos x}$. Учитывая начальные условия $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$, получаем уравнение для C: $3 = \left(-\cos\dfrac{\pi}{2} + C\right)e^{-\cos\frac{\pi}{2}}$, т.е. $3 = (-0 + C)e^{0}$, $C = 3$. Тогда искомое частное решение исходного уравнения есть $y = (3 - \cos x)e^{-\cos x}$.

4а) $y''' + 7y' + 10y = 0$. Данное уравнение есть линейное дифференциальное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Заменяя y'' на λ^2, y' на λ, y на 1, записываем соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$. Корни этого уравнения есть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Тогда общее решение есть $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-5x}$.

4б) $y'' + 3y' = 0$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 3\lambda = 0$, $\lambda(\lambda + 3) = 0$, поэтому $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Общее решение есть $y = C_1e^{0x} + C_2e^{-3x}$ или $y = C_1 + C_2e^{-3x}$.

4в) $y'' - 6y' + 10y = 0$. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицателен: $D = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4$. Полагаем $D = 4i^2$, тогда

$\lambda_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm 1i$. Согласно теории, общее решение в случае $D < 0$ имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$,
где $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения. В нашем случае $\alpha = 3$, $\beta = 1$, поэтому $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

4г) $y'' + 4y' + 4y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. В этом случае общее решение имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

5а) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$. Общее решение неоднородного уравнения ищем как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т.е. $Y = y + y^*$. Решаем однородное уравнение $y'' + 8y' + 16y = 0$. Его характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$. Так как $D = 8^2 - 4 \cdot 16 = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ и $y = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$. Частное решение y^* неоднородного уравнения $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$ ищем в виде $y^* = ax^2 + bx + c$, где a, b и c – неопределенные коэффициенты. Находим $y^{*\prime} = 2ax + b$, $y^{*\prime\prime} = 2a$ и подставляем $y^*, y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в искомое уравнение:

$$2a + 8(2ax + b) + 16(ax^2 + bx + c) = 16x^2 - 16x + 66,$$

$$16ax^2 + (16a + 16b)x + 2a + 8b + 16c = 16x^2 - 16x + 66.$$

Последнее равенство должно выполняться для любых значений x, поэтому, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях уравнения, получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения чисел a, b и c:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 16a = 16; \\ x^1: & 16a + 16b = -16; \\ x^0: & 2a + 8b + 16c = 66. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, последовательно находим $a=1,\quad b=-2,\quad c=5$, значит $y^{*}=x^{2}-2x+5$. Общее решение исходного уравнения есть $Y=y+y^{*}$, т.е. $Y=(C_1+C_2x)e^{-4x}+x^2-2x+5$. Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=3,\quad y'(0)=0$. Поскольку $Y'=(C_1+C_2x)'e^{-4x}+(C_1+C_2x)(e^{-4x})'+(x^2-2x+5)'$ или $Y'=C_2e^{-4x}-4(C_1+C_2x)e^{-4x}+2x-2$, то подставляя вместо x, Y и Y' числа 0, 3 и 0 соответственно, получим систему алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases}3=C_1+5,\\ 0=C_2-4C_1-2,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}C_1=-2,\\ C_2=-6.\end{cases}$$

Искомое частное решение исходного уравнения имеет вид

$$Y=-(2+6x)e^{-4x}+x^2+2x-5.$$

5б) $y''+10y'+34y=-9e^{-5x}$. Находим вначале общее решение однородного уравнения: $y''+10y'+34y=0$. Его характеристическое уравнение есть $\lambda^2+10\lambda+34=0$. Отсюда $D=10^2-4\cdot 34=$ $=100-136=-36=36i^2$ и $\lambda_{1,2}=\dfrac{-10\pm 6i}{2}=-5\pm 3i=\alpha\pm\beta i$. Поэтому $\alpha=-5$, $\beta=3$ и общее решение однородного уравнения есть $y=e^{-5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$. Частное решение y^{*} неоднородного уравнения $y''+10y'+34y=-9e^{-5x}$ ищем в виде $y^{*}=\mathrm{A}e^{-5x}$. Тогда $y^{*\prime}=-5\mathrm{A}e^{-5x}$, $y^{*\prime\prime}=25\mathrm{A}e^{-5x}$. Подставляя y^{*}, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение, получаем: $25\mathrm{A}e^{-5x}+10\left(-5\mathrm{A}e^{-5x}\right)+34\mathrm{A}e^{-5x}=9e^{-5x}$. Разделив обе части полученного равенства на $e^{-5x}\neq 0$, получаем, что $25\mathrm{A}-50\mathrm{A}+34\mathrm{A}=-9\mathrm{A}$, откуда $\mathrm{A}=-1$, $y^{*}=-e^{-5x}$. Значит, общее решение Y исходного уравнения есть $Y=e^{-5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)-e^{-5x}$. Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=6$.

$Y'=-5e^{-5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+e^{-5x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)+5e^{-5x}$.

Подставляя в равенства для Y и Y' вместо x, Y и Y' числа 0, 0 и 6 соответственно, получим систему для нахождения C_1 и C_2 вида:

$$\begin{cases} 0 = C_1 - 1, \\ 6 = -5C_1 + 3C_2 + 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Частное решение исходного уравнения $Y = e^{-5x}(\cos 3x + 2\sin 3x) - e^{-5x}$.

5в) $y'' + 2y' - 8y = 7\sin x - 11\cos x$. Находим вначале общее решение однородного уравнения: $y'' + 2y' - 8y = 0$. Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, находим $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$, поэтому общее решение есть $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$. Частное решение y^* ищем в виде $y^* = \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x$. Тогда $y^{*\prime} = \mathrm{A}\cos x - B\sin x$, $y^{*\prime\prime} = -A\sin x - B\cos x$. Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение, получаем систему для нахождения чисел A и B:

$-\mathrm{A}\sin x - \mathrm{B}\cos x + 2\mathrm{A}\cos x - 2\mathrm{B}\sin x - 8\mathrm{A}\sin x - 8\mathrm{B}\cos x = 7\sin x - 11\cos x$ или $\sin x(-\mathrm{A} - 8\mathrm{A} - 2\mathrm{B}) + \cos x(-\mathrm{B} + 2\mathrm{A} - 8\mathrm{B}) = 3\sin x + 5\cos x$.

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{matrix} \sin x: \\ \cos x: \end{matrix} \begin{cases} -9\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 7, \\ 2\mathrm{A} - 9\mathrm{B} = -11. \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на 2, второе на 9 и складываем, получим 4В – 81В = 14 – 99, – 85 В = – 85, В = 1, А = – 1. Значит, $y^* = -\sin x + \cos x$, поэтому $Y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \sin x + \cos x$. Найдем $Y' = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x} - \cos x - \sin x$ и учтем, что $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Подставляя в равенства для Y и Y' вместо x, Y и Y' числа 0, 0 и 1 соответственно, получим:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1, \\ 1 = -4C_1 + 2C_2 - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 - 2C_2 = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 - C_2 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ и поэтому искомое частное решение уравнения есть $Y = e^{2x} - \sin x + \cos x$.

4. Ряды

1. Что называется числовым рядом?
2. Что называется n-й частичной суммой числового ряда?
3. Какой числовой ряд называется сходящимся?
4. Какой числовой ряд называется расходящимся?
5. Какое число называется суммой числового ряда?
6. Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
7. Что называется остатком числового ряда?
8. Перечислите свойства сходящихся рядов.
9. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
10. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными числами: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши и интегральный признак.
11. Какой числовой ряд называется знакопеременным?
12. Дайте определение абсолютной и условной сходимости.
13. Сформулируйте признак Лейбница сходимости числового знакочередующегося ряда.
14. Дайте определение функционального ряда и его сходимости.
15. Какой ряд называется степенным?
16. Сформулируйте признак Абеля.
17. Что называется интервалом, радиусом и областью сходимости степенного ряда?
18. Запишите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
19. Как определяется ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0?
20. Как определяется ряд Маклорена функции $f(x)$?
21. Выпишите разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ и укажите области сходимости этих рядов.
22. Перечислите области применения степенных рядов к приближенным вычислениям.

Тренировочное задание №4

1. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$ по определению.

2. Пользуясь необходимым признаком сходимости ряда, установить, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3. Пользуясь признаками сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{1+25^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^3+2n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^3+n-1}$.

4. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{2n+1}}{3^n}$.

5. Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{3n^2+n+2}\right)^{n}$.

6. Пользуясь интегральным признаком, исследовать на сходимость следующие ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^4+4}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+5}$.

8. Найти радиус, интервал и область сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n}$.

9. Пользуясь известными разложениями элементарных функций в степенные ряды, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

а) $f(x)=x^3e^{-x}$; б) $f(x)=\sin 3x$;

в) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$; г) $f(x)=\ln(x+2)$.

10. Пользуясь соответствующими степенными рядами, вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

Решение тренировочного задания №4

1. Найдем частичную сумму S_n данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Поскольку $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, то

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда сумма ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

2а) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(5+\dfrac{2}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{2}{5}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{5}\neq 0$, то по следствию из необходимого признака сходимости, данный ряд расходится.

2б) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1\neq 0$.

Поэтому данный ряд расходится.

2в) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Необходимый признак сходимости выполняется, но не дает ответа о сходимости исходного ряда. Данный ряд – гармонический, доказано, что он расходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться; выяснять этот вопрос нужно, пользуясь другими признаками сходимости.

3а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{1+25^n}=\dfrac{5}{26}+\dfrac{25}{626}+\ldots$.

Заметим, что $\dfrac{5^n}{1+25^n}<\dfrac{5^n}{25^n}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, n = 1, 2, 3, … . Поскольку больший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ есть сходящийся геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\left(|q|<1\right)$, то по первому признаку сравнения меньший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{1+25^n}$ сходится.

3б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}=\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots$. Заметим, что $\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\ln 4}>\frac{1}{4}$, …, $\frac{1}{\ln(n+2)}>\frac{1}{n+2}$, ... Поскольку меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ расходится (это ряд, полученный из расходящегося гармоническо-го ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ отбрасыванием первых двух членов), то по первому признаку сравнения больший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$ также расходится.

3в) Сравним исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^3+2n+1}$ с расходящим-ся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя признак сравне-ния в предельной форме. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{n^3+2n-1}\cdot\frac{n}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n}{n^3+2n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3-\frac{n}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2n}{n^3}-\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=3.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, $L\neq 0$, $L\neq\infty$, то по признаку сравнения в предельной форме оба ряда сходятся или расходятся одновременно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, значит, исходный ряд также расходится.

3г) Сравним исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+n-1}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p \le 1$). Находим

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^3+n-1}\cdot\frac{n^2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{2n^2+n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$. Поскольку $L \ne 0$, $L \ne \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, значит, исходный ряд также сходится.

4а) Найдем $l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, где $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Имеем

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n!}{n!(n+1)3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0.$$

Поскольку $l < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

4б) Здесь $a_n = \frac{4^n}{n3^n}$, $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$. Находим

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n 4n\cdot 3^n}{(n+1)3^n 3\cdot 4^n} =$$

$$\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Поскольку $l > 1$, то ряд расходится.

4в) Здесь $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$, $a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \dfrac{2n+1}{3n+5}$. Тогда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+2)}{(3n+5)(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+7n+2}{6n^2+7n-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(6+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}}{6+\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2}} = 1.$$

Поскольку $l = 1$, то признак Даламбера не дает ответа о сходимости данного ряда. Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2}{3} \neq 0$, заключаем, что по следствию из необходимого признака сходимости ряд расходится.

4г) Здесь $a_n = \dfrac{n!\sqrt{2n+1}}{3^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!\sqrt{2n+3}}{3^{n+1}}$. Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\sqrt{2n+3}\cdot 3^n}{3^{n+1}n!\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!\sqrt{2n+3}\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n!\sqrt{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\infty\cdot 1 = \infty.$$

Так как $l > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

5а) Здесь $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Для применения признака Коши сходимости числового ряда найдем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e.$$

Поскольку $e \approx 2{,}72$, то $l > 1$. Значит, по признаку Коши ряд расходится.

5б) Находим

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+n-1}{3n^2+n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{3n^2+n+2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}.$$

Поскольку $l<1$, то по признаку Коши данный ряд расходится.

6а) Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$.

Имеем: $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^2)}{2(1+x^2)}=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\Big|_1^{+\infty}=$

$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}(\ln(1+B^2)-\ln 2)$. Поскольку $\lim_{B\to+\infty}\ln(1+B^2)=\infty$, то несобственный интеграл расходится, значит, по интегральному признаку данный ряд также расходится.

6б) Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{x^4+4}$.

Имеем $\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{x^4+4}= \ =\lim_{B\to+\infty}\int_1^{B}\frac{d(x)^2}{(x^2)^2+2^2}=\lim_{B\to+\infty}(arctgx^2)\Big|_1^{B}=$

$$=\lim_{B\to+\infty}(arctgB-arctg1)=\lim_{B\to+\infty}arctgB-\lim_{B\to+\infty}arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Значит, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{x^4+4}$ сходится, поэтому сходится и исходный числовой ряд.

7а) Для исследования на абсолютную сходимость составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 3^3}{(2n+1)!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}.\ \text{Здесь}\ a_n=\frac{3^n}{(2n+1)!},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

Применим признак Даламбера, для чего вычислим

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(2n+1)!}{(2n+3)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

Поскольку $l<1$, то по признаку Даламбера ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

7б) Составляем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Это ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, причем $p=\frac{1}{3}$, $p<1$, поэтому он расходится, значит, абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ нет. Исследуем теперь этот знакочередующийся ряд на условную сходимость, для чего применим к нему признак Лейбница. Имеем: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\ldots$.
Поскольку члены ряда убывают по абсолютной величине: $1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$, то по признаку Лейбница ряд сходится (условно).

7в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+5}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

то в данном случае не выполняется необходимый признак сходимости ряда, значит, ряд расходится.

8а) Выполним замену $x-1=y$ и найдем радиус сходимости R полученного степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n y^n=\sum_{n=1}^{\infty}n!\,y^n$. Поскольку

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

то ряд сходится в единственной точке $y=0$, значит, по замене $x-1=0$, $x=1$. Исходный ряд сходится в единственной точке $x=1$. Это и есть область его сходимости.

8б) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ находим радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$. Это и есть область сходимости ряда.

8в) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$ имеем: $a_n=\frac{1}{n^2+n}$,

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}=\frac{1}{n^2+3n+2}.$$ Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+3n+2}{n^2+n}\right|=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Значит, интервал сходимости данного ряда (– R; R) есть интервал (– 1; 1). Исследуем теперь сходимость ряда на концах интервала. При x = 1 из исходного ряда получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$, здесь $a_n=\frac{1}{n^2+n}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.е. $b_n=\frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$, а у нас $p=2$). Поскольку $a_n<b_n$ $\left(\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}\right)$, то меньший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ сходится, поэтому x = 1 принадлежит области сходимости. При x = – 1 получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$, который сходится абсолютно, как доказано выше. Значит, x = – 1 принадлежит области сходимости. Область сходимости исходного ряда есть отрезок [– 1; 1].

8г) Выполним замену $y = x + 1$. Получаем степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{5^n}$. Здесь $a_n=\frac{1}{5^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{5^{n+1}}$, значит $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}}{5^n}\right|=5$.

Поэтому $-5<y<5$, $-5<x+1<5$, $-6<x<4$. Интервал сходимости исходного ряда (– 6; 4). Исследуем сходимость на концах интервала. При x = – 6 получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-\ldots\ .$$

Общий член ряда не стремится к нулю, значит, он расходится и x=-6 не входит в область сходимости. Аналогично, при x = 4 получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+\ldots$. Данный ряд также расходится, поэтому областью сходимости исходного ряда остается интервал (– 6; 4).

9а) $f(x)=x^3e^{-x}$. Воспользуемся известным разложением

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots$, где $-\infty<t<+\infty$.

Полагаем здесь $t=-x$, получим

$$f(x)=x^3\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=x^3-x^4+\frac{x^5}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)x^{n+3}}{n!}+\ldots.$$

Данное разложение сходится к $f(x)$ при всех значениях x.

9б) $f(x)=\sin 3x$. Воспользуемся известным разложением

$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$, где $-\infty<t<+\infty$. Полагаем теперь $t=3x$, получаем

$$\sin 3x=3x-\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{3^5x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ \forall x\in R.$$

9в) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$. Представим $f(x)$ в виде $f(x)=\left(1+\left(-x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ и воспользуемся известным разложением

$$(1+t)^m=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n+\ldots,$$

которое верно при $-1<t<1$. Полагая теперь $m=\frac{1}{2}$, $t=x^3$, получим

$$f(x)=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}x^3+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(x^3\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(x^3\right)^3}{3!}+\ldots+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(x^3\right)^n+\ldots,$$

и, произведя упрощения, получаем

$$f(x)=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^9+\ldots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)x^{3n}}{2^n n!}+\ldots.$$

Это разложение верно, если $-1<x^3<1$, т.е. $-1<x<1$.

9г) $f(x)=\ln(x+2)$. Преобразуем $f(x)$. Имеем

$f(x)=\ln\left(2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Воспользуемся разложением

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+\ldots$, где $-1<t\leq 1$.

Полагая $t=\frac{x}{2}$, получим, что

$f(x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2}+\frac{x^3}{8\cdot 3}-\frac{x^4}{16\cdot 4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n\cdot n}+\ldots$, где

$-1<\frac{x}{2}\leq 1$, значит $-2<x\leq 2$.

10а) Неопределенный интеграл $\int\frac{\sin x}{x}dx$ относится к «небе-рущимся» интегралам, т.е. его нельзя выразить в элементарных функциях, поэтому для вычисления определенного интеграла $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ нельзя применить формулу Ньютона-Лейбница. Разложив подынтегральную функцию $\frac{\sin x}{x}$ в ряд Маклорена, получаем, что $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots\right)=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$. Данное разложение верно для любых x. Можно проинтегрировать почленно степенной ряд в правой части последнего равенства, применив к каждому слагаемому формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)dx=x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^1-\frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^1-\frac{x^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^1+\ldots=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\ldots=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+\ldots.$$

В правой части последнего равенства находится ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине абсолютной величины первого отбрасываемого члена. Так $\dfrac{1}{35280}<\dfrac{1}{10000}$, то для вычисления интеграла с требуемой точностью $0{,}0001$ достаточно взять три первых члена разложения:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 0{,}9461.$$

10б) Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}=e^{-\frac{1}{4}}$, то из известного разложения

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad \text{при } x=-\frac{1}{4}, \text{ получаем}$$

$$e^{-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16\cdot 2}-\frac{1}{64\cdot 6}+\frac{1}{256\cdot 120}-\ldots\ .$$

Поскольку $\dfrac{1}{64\cdot 6}>\dfrac{1}{10000}$, $\dfrac{1}{256\cdot 120}<\dfrac{1}{10000}$, то для достижения заданной точности достаточно четырех первых членов разложения:

$$e^{-\frac{1}{4}}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{32}-\frac{1}{384}\approx 1-0{,}25000+0{,}03125-0{,}00260\approx 0{,}77865\approx 0{,}7787$$

Вопросы к экзамену

1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания.
2. Основные элементарные функции. Элементарные функции.
3. Числовая последовательность. Определение предела числовой последовательности.
4. Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей.
5. Определение предела функции в точке. Односторонние пределы.
6. Основные теоремы о пределах функций. Два замечательных предела.
7. Непрерывность функции в точке. Непрерывность элементарных функций.
8. Геометрическая задача, приводящая к понятию производной. Определение производной. Геометрический смысл производной.
9. Теорема о производной сложной функции. Таблица производных.
10. Теоремы Ролля, Лагранжа.
11. Правило Лопиталя. Раскрытие всех видов неопределенностей.
12. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
13. Максимум и минимум функции. Необходимое условие экстремума.
14. Достаточные условия экстремума функции.
15. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
16. Асимптоты графика функции.
17. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
18. Определение функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.

19. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия.
20. Понятие об эмпирических формулах. Подбор параметров по способу наименьших квадратов. Выравнивание по прямой, параболе.
21. Определение первообразной функции и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов.
22. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле.
23. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
24. Интегрирование рациональных функций.
25. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
26. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
27. Геометрическая задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла.
28. Свойства определенных интегралов.
29. Теорема о существовании первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
30. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
31. Площадь плоской фигуры. Объем тела вращения.
32. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
33. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
34. Дифференциальные уравнения (основные понятия).
35. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
36. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
37. Понятие числового ряда и суммы ряда. Геометрическая прогрессия.
38. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда.
39. Интегральный признак сходимости.
40. Признак сравнения для положительных рядов. Признаки Даламбера и Коши.

41. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости.
42. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
43. Понятие степенного ряда. Область сходимости степенного ряда.
44. Ряды Тейлора и Маклорена.
45. Разложение функций $\sin x$, $\cos x$, e^x в ряд Маклорена. Биномиальный ряд.
46. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Литература

1. Высшая математика: Общий курс. Учеб.- 2-е изд., перераб / А.И. Яблонский, А.В.Кузнецов, Е.И.Шилкина и др.; Мн.: Выш. шк., 2000.
2. Гусак А.А. Высшая математика: В 2 т. Мн.: Университетское, 1984, т. 1, 2.
3. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Вышэйшая школа, 1988. Ч. 1, 2.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1985.
5. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
6. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
7. Математический анализ в вопросах и задачах. Учеб. пособие для студентов вузов/ В.Ф.Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев и др.; М.: Высш.шк.,1984
8. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 1999.
9. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Шилкина Е.И. и др.; Мн.: Вышэйшая школа, 1994.