М.П. Дымков

МАТЕМАТИКА

Пособие для подготовки к вступительным испытаниям иностранных абитуриентов

Минск БГЭУ 2014

Р е к о м е н д о в а н о кафедрой
высшей математики Белорусского государственного
экономического университета, Протокол № 6 от 17 февраля 2014г.

Дымков М.П.

Математика: Учебное пособие / М.П. Дымков. – Мн.: БГЭУ, 2014. – 62с.

Данное пособие предназначено для иностранных абитуриентов, желающих расширить и углубить свои знания по математике, приобрести навыки решения типовых задач и самостоятельно оценить уровень своей подготовки относительно требованиям, принятым в Республике Беларусь. Задачи, изложенные в пособии, соответствуют минимальным требованиям программы для учащихся, поступающих в белорусские вузы, и охватывают основные разделы школьного курса. Она может быть полезной слушателям подготовительных отделений вузов, а также школьным учителям в их повседневной работе.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень обозначений

N	– множество натуральных чисел
Z	– множество целых чисел
Q	– множество рациональных чисел
R	– множество действительных чисел
$a \in A$	– элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$	– элемент a не принадлежит множеству A
$\{\ \}$	– конечное множество, элементы которого указаны в скобках
$\cup$	– знак объединения множеств
$\cap$	– знак пересечения множеств
$\varnothing$	– пустое множество
$\rightarrow$	– знак следствия
$\leftrightarrow$	– знак равносильности

$[a;b]$, $[a;+\infty)$,
$[a;b)$, $(a;+\infty)$,
$(a;b)$, $(-\infty;a)$,
$(a;b]$, $(-\infty;a]$ – обозначения числовых промежутков

Введение

Данное пособие предназначено для иностранных абитуриентов, желающих расширить и углубить свои знания по математике, приобрести навыки решения типовых задач и самостоятельно оценить уровень своей подготовки относительно требованиям, принятым в Республике Беларусь. Задачи, изложенные в пособие, соответствуют минимальным требованиям программы для поступающих в белорусские вузы и охватывают основные разделы школьного курса. Конечно, формат укороченных вступительных испытаний иностранных абитуриентов вносит определенные особенности, как в тематику задач, так и стиль их выполнения

В пособии дано краткое описание программы по математике, приведен краткий справочный материал и некоторые примеры заданий. Для части этих заданий дано подробное решение, а для остальных приведены ответы, что позволит учащимся самостоятельно контролировать правильность своих решений.

Книга может быть полезной слушателям подготовительных отделений вузов, а также школьным учителям иностранных учащихся в их повседневной работе.

1. Программа вступительных испытаний в БГЭУ по математике

При подготовке материалов для вступительных испытаний по математике основное внимание должно быть обращено на проверку понимания абитуриентом сущности математических понятий, формул и теорем, а также умения решать задачи по разделам программы.

Арифметика, алгебра и начала анализа

- ✓ Натуральные числа и нуль. Сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение натуральных чисел. Квадрат и куб натурального числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Четные и нечетные числа.
- ✓ Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10.
- ✓ Деление с остатком.
- ✓ Разложение натурального числа на простые множители. Делитель общий, кратное общее. Делитель общий наибольший, кратное общее наименьшее.
- ✓ Целые числа. Противоположные числа. Действия над целыми числами.
- ✓ Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение обыкновенных дробей. Сравнение обыкновенных дробей. Их сложение, вычитание, умножение и деление.
- ✓ Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Приближенное значение числа. Округление чисел.
- ✓ Рациональные числа. Действия над рациональными числами.
- ✓ Иррациональные числа. Действительные числа. Представление действительных чисел в форме десятичных дробей. Числовая прямая. Изображение чисел на числовой прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

- ✓ Проценты. Пропорции. Основные свойства пропорции. Прямая и обратная пропорциональность.
- ✓ Степень с натуральным и целым показателем. Свойства степеней с натуральным и целым показателями.
- ✓ Числовые выражения. Алгебраические выражения. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.
- ✓ Одночлен и многочлен. Действия над многочленами. Разложение многочлена на множители. Тождественные преобразования многочленов.
- ✓ Алгебраическая дробь. Основное свойство дроби. Действия над алгебраическими дробями. Тождественные преобразования рациональ-ных выражений.
- ✓ Корень n-й степени $(n \in N)$, его свойства для случаев четного и нечетного значений числа n. Арифметический корень. Свойства арифметических корней.
- ✓ Степень с рациональным показателем. Свойства степеней с рациональными показателями.
- ✓ Степень с действительным показателем.
- ✓ Уравнения. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Линейные уравнения.
- ✓ Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения.
- ✓ Приведенное квадратное уравнение.
- ✓ Теорема Виета (прямая и обратная).
- ✓ Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
- ✓ Биквадратное уравнение. Решение биквадратных уравнений.
- ✓ Решение рациональных уравнений.
- ✓ Решение иррациональных уравнений.
- ✓ Числовые последоватеlьности.
- ✓ Арифметическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.
- ✓ Геометрическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.

- ✓ Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
- ✓ Свойства числовых неравенств.
- ✓ Неравенство с одной переменной. Равносильные неравенства. Решение линейных неравенств вида $ax > b$; $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$; $b < ax < c$; $b \leq ax <$ c; $b < ax \leq c$; $b \leq ax \leq c$.
- ✓ Квадратичное неравенство. Решение квадратичных неравенств.
- ✓ Решение рациональных неравенств.
- ✓ Решение уравнений и неравенств, которые содержат переменную под знаком модуля.
- ✓ Решение систем линейных и квадратных уравнений и неравенств.
- ✓ Понятие функции. Область определения функции. Область значений функции. Способы задания функции. График функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Четность и нечетность функции. Пери-одичность функции. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум функции.
- ✓ Расстояние между двумя точками координатной плоскости. Уравнение окружности.
- ✓ Определение логарифма. Логарифм произведения, степени, частного.
- ✓ Десятичные логарифмы. Натуральные логарифмы. Формула перехода от одного основания логарифма к другому.
- ✓ Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы.
- ✓ Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.
- ✓ Единичная окружность. Определения тригонометрических функций $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Основные тригонометрические тождества.
- ✓ Синус, косинус, тангенс суммы (разности) двух аргументов (формулы сложения).
- ✓ Формулы приведения.
- ✓ Синус, косинус, тангенс двойного аргумента.
- ✓ Синус, косинус, тангенс половинного аргумента.
- ✓ Преобразование в произведение сумм $sin\,\alpha \pm sin\,\beta$, $cos\,\alpha \pm cos\,\beta$, $tg\,\alpha \pm tg\beta$.

- ✓ Арксинус числа *a*.
- ✓ Арккосинус числа *a*.
- ✓ Арктангенс числа *a*.
- ✓ Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$.
- ✓ Решение тригонометрических уравнений, которые приводятся к простейшим.
- ✓ Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = k/x$ (где $k \neq 0$) и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = \sqrt{x}$ и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = x^n$ $(n \in R)$ и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = a^x$ (где $a>0$, $a \neq 1$) и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = \log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = \sin x$ и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = \cos x$ и ее график.
- ✓ Свойства функции $y = tg\, x$ и ее график.
- ✓ Производные основных функций. Касательная к графику функции.

Геометрия

- ✓ Основные (неопределяемые) понятия геометрии: точка, прямая, «лежать между», плоскость.
- ✓ Луч, отрезок; угол, вертикальные и смежные углы; многоугольник, его углы, стороны и диагонали.
- ✓ Треугольник, его медиана, биссектриса, высота. Прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольники. Соотношения между сторонами и углами произвольного и прямоугольного треугольников.
- ✓ Признаки равенства треугольников.

- Свойства равнобедренного треугольника.
- Параллельные прямые. Признаки параллельности прямых.
- Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр и наклонная.
- Свойства серединного перпендикуляра.
- Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
- Теорема Фалеса.
- Теоремы о средней линии треугольника и трапеции.
- Свойства и признаки параллелограмма.
- Свойства прямоугольника, ромба, квадрата.
- Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
- Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности и ее свойства. Дуга окружности.
- Окружность, описанная около треугольника.
- Окружность, вписанная в треугольник.
- Центральные и вписанные углы. Измерение центральных и вписанных углов.
- Свойство секущих, проведенных к окружности из одной точки. Свойство пересекающихся хорд.
- Теорема синусов.
- Теорема косинусов.
- Следствия из теорем синусов и косинусов (решение треугольников).
- Движения плоскости: центральная и осевая симметрии, параллельный перенос, поворот.
- Преобразование подобия.
- Признаки подобия треугольников.
- Подобие прямоугольных треугольников. Свойства высоты, проведенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника.
- Теорема Пифагора и следствия из нее.
- Формулы площадей квадрата и прямоугольника.

- ✓ Формулы площадей параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции.
- ✓ Правильный многоугольник. Окружность, вписанная в правильный многоугольник; окружность, описанная около правильного многоугольника; формулы для вычисления их радиусов.
- ✓ Длина окружности. Радианная мера угла. Площадь круга.
- ✓ Длина дуги окружности. Площадь сектора, сегмента.
- ✓ Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии, их связь с аксиомами планиметрии.
- ✓ Взаимное расположение прямых в пространстве. Свойства параллельности прямых. Перпендикулярность прямых.
- ✓ Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.
- ✓ Параллельные плоскости. Признак параллельности плоскостей.
- ✓ Свойства параллельных плоскостей.
- ✓ Перпендикуляр и наклонная к плоскости, проекция наклонной на плоскость. Угол между прямой и плоскостью.
- ✓ Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- ✓ Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла.
- ✓ Перпендикулярность двух плоскостей. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
- ✓ Теорема о трех перпендикулярах.
- ✓ Многогранники: вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Параллелепипед. Пирамида. Правильная пирамида. Сечения многогранников плоскостью.
- ✓ Понятие о телах и поверхностях вращения. Осевые сечения и сечения, перпендикулярные к оси. Прямой круговой цилиндр. Сечения цилиндра. Прямой круговой конус. Сечения конуса. Сфера и шар. Сечения шара плоскостью. Плоскость, касательная к сфере.
- ✓ Формулы площадей поверхностей и объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса.
- ✓ Формула площади сферы.
- ✓ Формула объема шара.

Основные умения и навыки

Абитуриент должен ***уметь***:

- ✓ выполнять арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; округлять с нужной точностью числа и результаты вычислений;
- ✓ проводить тождественные преобразования многочленов, рациональных выражений и выражений, которые содержат степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;
- ✓ строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;
- ✓ решать уравнения, системы уравнений и неравенств первой и второй степеней, уравнения и неравенства, которые приводятся к ним;
- ✓ решать рациональные уравнения и неравенства;
- ✓ решать текстовые задачи (включая задачи на проценты) по действиям или методом составления уравнений и их систем;
- ✓ решать иррациональные уравнения;
- ✓ решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства, их системы, тригонометрические уравнения;
- ✓ решать уравнения и неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля;
- ✓ решать уравнения, неравенства и системы с параметрами;
- ✓ решать задачи на исследование функций и построение их графиков;
- ✓ решать задачи на нахождение производных функций;
- ✓ решать задачи на нахождение касательных к графикам функций;
- ✓ решать задачи на построение с помощью циркуля и линейки;
- ✓ строить изображения и сечения пространственных геометрических тел;
- ✓ решать геометрические задачи на доказательство, на вычисление эле-ментов геометрических фигур (длин, площадей, объемов, углов, триго-нометрических функций углов), на вычисление расстояний (от точки до плоскости, между прямой и параллельной ей плоскостью, между параллельными плоскостями);
- ✓ решать задачи, связанные с комбинациями призмы и пирамиды с телами вращения.

2. Справочный теоретический материал и основные формулы

2.1. Алгебра

2.1.1. Признаки делимости натуральных чисел

1. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или является четным числом.
2. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначное число, делящееся на 4.
3. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры 000 или образуют трехзначное число, делящееся на 8.
4. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.
5. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.
6. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.
7. Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.
8. Число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначные числа 25, 50, 75.
9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, равна 0 или делится на 11.

2.1.2. НОД, НОК

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, являющееся делителем всех данных чисел.

Способ нахождения НОД: разложить числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

Способ нахождения НОК: разложить числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Для двух натуральных чисел a и b выполняется равенство

$$НОД(a;b)\cdot НОК(a;b)=a\cdot b.$$

2.1.3. Пропорция

Пропорцией называется верное равенство вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ bd\neq 0$.

Свойства пропорции.

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad ad=bc$.
2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\ ac\neq 0$.
3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.
4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},\ a\neq b,\ c\neq d$.
5. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2.1.4. Проценты

Процентом числа называется сотая его часть.

Если число a n раз последовательно увеличивать на $p\%$, то получится число $a\cdot\left(1+\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

Если число a n раз последовательно уменьшать на $p\%$, то получится число $a\cdot\left(1-\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

2.1.5. Степень с натуральным и целым показателем

Произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a и обозначается через a^n $(a \in R,\ n \in N,\ n \neq 1)$. При этом a называется основанием, а n – показателем степени. При $n = 1$ просто полагают $a^1 = a$.

Свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m},\ n \geq m$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$.

Степенью с отрицательным целым показателем называется число $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, где $a \in R,\ a \neq 0,\ n \in N$. Нулевую степень числа $a \neq 0$ полагают по определению равной единице: $a^0 = 1,\ a \neq 0$.

Свойства 1-5 степени с натуральным показателем справедливы и для степени с целым показателем.

2.1.6. Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot (a+b).$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a-b).$$

2.1.7. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

Алгебраическое определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \ \textit{если} \ \ a \ge 0; \\ -a, \ \textit{если} \ \ a < 0. \end{cases}$$

Геометрическое определение модуля: модуль числа a равен расстоянию на числовой прямой от точки, соответствующей числу a, до начала отсчета 0.

Свойства модуля (здесь везде $a \in R, \ b \in R$):

1. $|a| \ge 0$.

2. $|a| = |-a|$.

3. $|a| \ge a$.

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \ b \ne 0$.

6. $|a|^2 = a^2$.

7. $|a^n| = |a|^n$.

8. $|a + b| \le |a| + |b|$.

9. $|a| - |b| \le |a - b|$.

10. $|a| + |b| = |a + b| \quad \leftrightarrow \quad ab \ge 0$.

11. $|a| + |b| = |a - b| \quad \leftrightarrow \quad ab \le 0$.

2.1.8. Корень *n*-й степени. Степень с рациональным показателем

Корнем n-й степени $\left(n \in N, \ n \ne 1 \right)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a (т.е. $b^n = a$).

Арифметическим корнем *n*-й степени $\left(n \in N,\ n \neq 1 \right)$ из неотрицательного числа *a* называется неотрицательное число, *n*-я степень которого равна a.

Свойства арифметического корня:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}},\ a \geq 0,\ n,m,k \in N,\ n \neq 1.$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\ a \geq 0,\ b > 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n},\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ n,m \in N,\ n \neq 1,\ m \neq 1.$
5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}},\ a \geq 0,\ b > 0,\ n,m \in N,\ n \neq 1,\ m \neq 1.$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},\ a \geq 0,\ n,m \in N,\ n \neq 1,\ m \neq 1.$
7. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\ a \geq 0,\ n \in N,\ n \neq 1.$
8. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,\ a \in R,\ n \in N.$
9. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a,\ a \in R,\ n \in N.$

Степенью с рациональным показателем называется число $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0,\ m \in Z,\ n \in N,\ n \neq 1.$

2.1.9. Схемы решения простейших уравнений, содержащих модуль

1. Уравнение вида $|f(x)| = a$
   - при $a < 0$ не имеет решений;
   - при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;
   - при $a > 0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$
2. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

3. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ при условии, что $g(x) \geq 0$.

2.1.10. Схема исследования линейного уравнения вида $x \cdot f(a) = g(a)$

Здесь $f(a), g(a)$ – некоторые функции параметра a.

1. Если $f(a) \neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{g(a)}{f(a)}$.

2. Если $\begin{cases} f(a) = 0, \\ g(a) \neq 0, \end{cases}$, уравнение не имеет решений.

3. Если $\begin{cases} f(a) = 0, \\ g(a) = 0, \end{cases}$, уравнение имеет бесконечное множество решений (уравнению удовлетворяет любое действительное значение x).

2.1.11. Схема исследования системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ двух линейных уравнений с двумя переменными

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение. Графическая интерпретация: графики уравнений системы пересекаются в одной точке.

   Примечание: случай $a_2 \cdot b_2 = 0$ рассматривается отдельно.

2. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений. Графическая интерпретация: графики уравнений системы параллельны.

   Примечание: случай $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 = 0$ рассматривается отдельно.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений. Графическая интерпретация: графики уравнений системы совпадают.

   Примечание: случай $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 = 0$ рассматривается отдельно.

2.1.12. Квадратные уравнения. Теорема Виета

Квадратным относительно переменной x называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

Количество корней квадратного уравнения определяется значением дискриминанта квадратного трехчлена: $D=b^2-4ac$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D=0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета (прямая). Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Теорема Виета (обратная). Если два действительных числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Следствия *из теоремы Виета (разложение квадратного трехчлена на множители):*

1. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

2. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет равные корни $x_1=x_2$, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

3. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, то он не разлагается на множители.

2.1.13. Исследование знаков корней квадратного трехчлена

1. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c, если они существуют, положительны тогда и только тогда, если $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0. \end{cases}$

2. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c, если они существуют, отрицательны тогда и только тогда, если $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0. \end{cases}$

3. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c имеют разные знаки тогда и только тогда, если $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$.

4. Один из корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен нулю тогда и только тогда, если $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\neq 0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0. \end{cases}$

5. Оба корня квадратного трехчлена ax^2+bx+c равны нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0. \end{cases}$

2.1.14. Схемы решения простейших иррациональных уравнений, содержащих квадратные корни

1. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a$
   - при $a<0$ не имеет решений;
   - при $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;
   - при $a>0$ равносильно уравнению $f(x)=a^2$.

2. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$

3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

2.1.15. Схемы решения простейших неравенств, содержащих модуль

1. Неравенство вида $|f(x)|>a$
   - при $a<0$ выполняется для всех значений x, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;
   - при $a=0$ равносильно неравенству $f(x)\neq 0$;
   - при $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)>a, \\ f(x)<-a. \end{array}\right.$

2. Неравенство вида $|f(x)|\geq a$
   - при $a\leq 0$ выполняется для всех значений x, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;
   - при $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)\geq a, \\ f(x)\leq -a. \end{array}\right.$

3. Неравенство вида $|f(x)|<a$
   - при $a\leq 0$ не имеет решений;
   - при $a>0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)<a, \\ f(x)>-a. \end{cases}$

4. Неравенство вида $|f(x)|\leq a$
   - при $a<0$ не имеет решений;
   - при $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;
   - при $a>0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)\leq a, \\ f(x)\geq -a. \end{cases}$

5. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) < 0; \\ \begin{cases} g(x) \ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

6. Неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) \le 0; \\ \begin{cases} g(x) > 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \ge g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

7. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$ или

совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

8. Неравенство вида $|f(x)| \le g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$ или

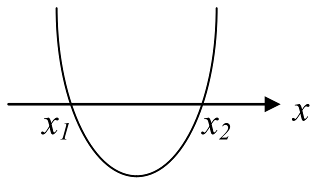
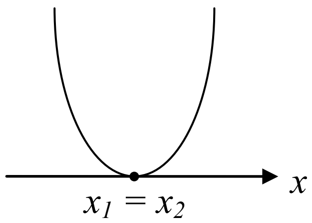
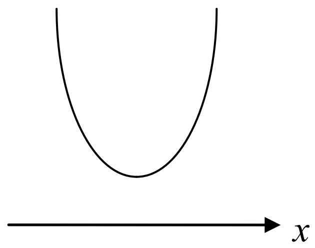
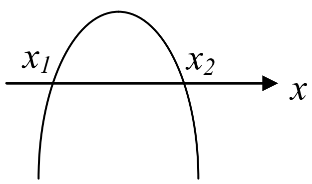
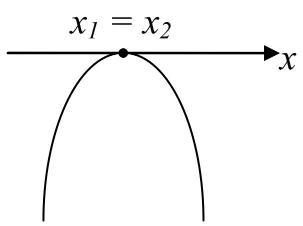
совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \le g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

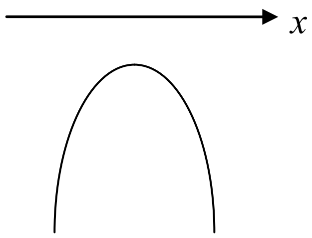
9. Неравенство вида $|f(x)| \le |g(x)|$ равносильно неравенству $(f(x))^2 \le (g(x))^2$.

2.1.16. Квадратные неравенства

Квадратными относительно переменной x называются неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$ $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\le 0$, $a,b,c\in R$, $a\ne 0$.

Схема решения квадратных неравенств с применением графического метода приведена в таблице.

a, D	Графическая интерпретация	Вид неравенства	Решение неравенства
$a>0$, $D>0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in(x_1;x_2)$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in[x_1;x_2]$
$a>0$, $D=0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in R$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x=x_1$
$a>0$, $D<0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in R$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in R$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in\varnothing$
$a<0$, $D>0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in(x_1;x_2)$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in[x_1;x_2]$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$a<0$, $D=0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x=x_1$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in R$

$a<0,$ $D<0$		$ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$
		$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in\varnothing$
		$ax^2+bx+c<0$	$x\in R$
		$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in R$

2.1.17. Обобщенный метод интервалов для решения неравенств вида $f(x)>0,\quad f(x)\ge 0,\quad f(x)<0,\quad f(x)\le 0.$

1. Найти область определения функции $f(x)$.
2. Найти нули функции $f(x)$, для чего решить уравнение $f(x)=0$.
3. Отметить на числовой прямой область определения функции $f(x)$ (в случае строгого неравенства нули функции $f(x)$ не входят в множество решений неравенства, в случае нестрогого неравенства нули функции $f(x)$ входят в множество решений неравенства; граничные точки области определения функции $f(x)$ проверяются непосредственной подстановкой).
4. На каждом из образовавшихся интервалов определить знаки функции $f(x)$ и записать множество решений неравенства.

2.1.18. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же действительным числом d, называемым разностью арифметической прогрессии. То есть $a_{n+1}=a_n+d \;\; (n\in N,\; d\in R)$.

Формула общего члена арифметической прогрессии: $a_n=a_1+d(n-1)$.

Свойства членов арифметической прогрессии:

1. Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому своих соседних: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

2. Суммы членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме первого и последнего:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n .$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n .$$

2.1.19. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же действительное число $q \neq 0$, называемое знаменателем геометрической прогрессии. То есть $b_{n+1} = b_n \cdot q$ $\left(n \in N,\ q \in R,\ q \neq 0 \right)$.

Формула общего члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Свойства членов геометрической прогрессии:

1. Любой член знакоположительной геометрической прогрессии, кроме первого, равен среднему геометрическому своих соседних:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} .$$

Любой член произвольной геометрической прогрессии, кроме первого, обладает тем свойством, что $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

2. Произведения членов конечной геометрической прогрессии, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению первого и последнего:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n .$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ при $q \neq 1$ и равна $S_n = n \cdot b_1$ при $q = 1$.

Бесконечная геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если $|q|<1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\dfrac{b_1}{1-q}$.

2.1.20. Показательная функция

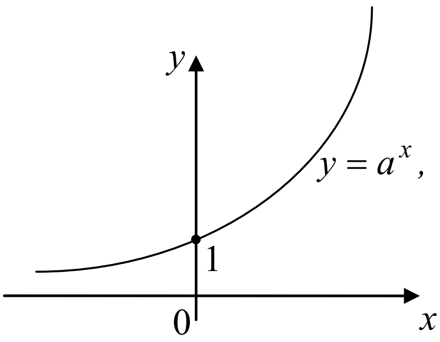
Показательной называется функция вида $y=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$.

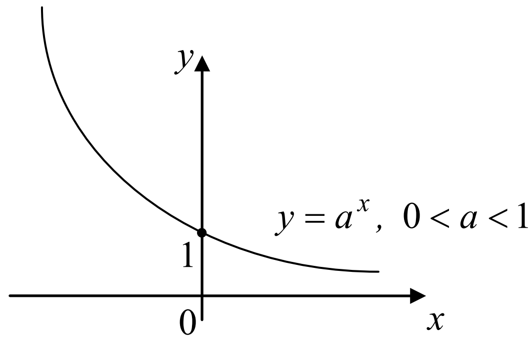
Область определения показательной функции – множество всех действительных чисел, т.е. $D(y)=R$.

Область значений показательной функции – множество всех положительных действительных чисел, т.е. $E(y)=R_+$.

При $a>1$ показательная функция является возрастающей, при $a<1$ – убывающей.

Графики показательной функции при $a>1$ и $0<a<1$ имеют вид:





2.1.21. Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа b $(b>0)$ по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.

Логарифм числа b по основанию a обозначается $\log_a b$.

$$\begin{cases}\log_a b=p,\\ a>0,\ a\neq 1,\\ b>0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}a^p=b,\\ a>0,\ a\neq 1,\\ b>0\end{cases}$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

Логарифм числа b по основанию 10 называется десятичным и обозначается $\lg b$.

Логарифм числа b по основанию e $\left(e \approx 2{,}718\right)$ называется натуральным и обозначается $\ln b$.

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
2. $\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1$.
3. $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|,\ a > 0,\ a \neq 1,\ bc > 0$.
4. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc),\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$.
5. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|,\ a > 0,\ a \neq 1,\ bc > 0$.
6. $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c},\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$.
7. $\log_a b^c = c \cdot \log_a |b|,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b^c > 0$.
8. $c \cdot \log_a b = \log_a b^c,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.
9. $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ n \in N,\ n \neq 1$.
10. $\dfrac{1}{n} \cdot \log_a b = \log_a \sqrt[n]{b},\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ n \in N,\ n \neq 1$.
11. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_{|a|} b,\ a^n > 0,\ a^n \neq 1,\ b > 0$.
12. $\dfrac{m}{n} \cdot \log_a b = \log_{a^n} b^m,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ n \neq 0$.
13. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \cdot \log_{|a|} |b|,\ a^n > 0,\ a^n \neq 1,\ b^m > 0$.
14. $\log_{a^n} b^n = \log_{|a|} |b|,\ a^n > 0,\ a^n \neq 1,\ b^n > 0$.
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$.

16. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ или $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$.

17. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$.

18. Если число под знаком логарифма и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то логарифм положителен, а если по разные – отрицателен.

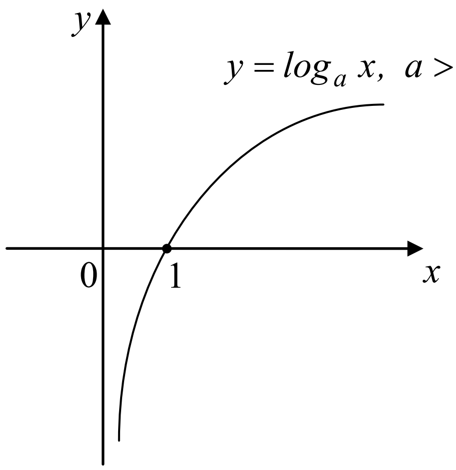
19. Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм (а меньшее – меньший); если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм (а меньшее – больший).

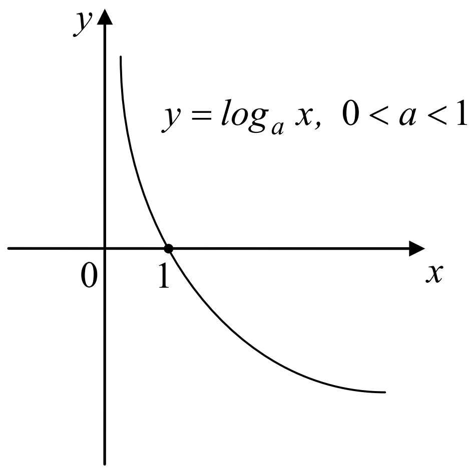
Это свойство формулируют также и как **правило логарифмирования неравенств**, обе части которых положительны: при логарифмировании неравенств по основанию, большему единицы, знак неравенства сохраняется, а при логарифмировании по основанию, меньшему единицы, знак неравенства меняется на противоположный.

2.1.22. Логарифмическая функция

Логарифмической называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0,\ a \neq 1$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной к показательной функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.





Область определения логарифмической функции – множество всех положительных действительных чисел, т.е. $D(y) = R_+$.

Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел, т.е. $E(y)=R$.

При $a>1$ логарифмическая функция является возрастающей, при $0<a<1$ – убывающей.

2.2. Тригонометрия

2.2.1 Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z$$

$$tg\alpha\, ctg\alpha=1,\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z$$

2.2.2. Формулы сложения аргументов

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta},$$

где $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta},$$

где $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$

2.2.3. Функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$$

2.2.4. Функции тройного аргумента

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$$

$$ctg3\alpha=\frac{3ctg^2\alpha-1}{ctg^3\alpha-3ctg\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{3}, n\in Z$$

2.2.5. Функции половинного аргумента

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z$$

2.2.6. Соотношения между $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ и $tg\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z$$

2.2.7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

2.2.8. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z, \quad \beta \neq \pi k, k \in Z$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z, \quad \beta \neq \pi k, k \in Z$$

2.2.9. Таблица основных значений тригонометрических функций

α°	0	30	45	60	90
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определен
$ctg\alpha$	не определен	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2.2.10. Формулы приведения

x	$\pm\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
$\sin x$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$
$ctgx$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

2.2.11. Основные соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad a \in [-1;1]$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad a \in [-1;1]$$

$$arctg(-a) = -arctga, \quad a \in R$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctga, \quad a \in R$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in [-1;1]$$

$$arctga + arcctga = \frac{\pi}{2}, \quad a \in R$$

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1;1]$$

$$\cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1;1]$$

$$tg(arctga) = a, \quad a \in R$$

$$ctg(arcctga) = a, \quad a \in R$$

$$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0;\pi]$$

$$arctg(tga) = a, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$arcctg(ctga) = a, \quad a \in (0;\pi)$$

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}, \quad a \in [-1;1]$$

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}, \quad a \in [-1;1]$$

$$\sin(arctga) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a \in R$$

$$\sin(arcctga) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a \in R$$

$$tg(\arcsin a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad a\in(-1;1)$$

$$ctg(\arcsin a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a},\quad a\in[-1;0)\cup(0;1]$$

$$ctg(\arccos a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad a\in(-1;1)$$

2.2.12. Таблица решений простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Различные случаи	Ответ
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n, n\in Z$
	$\lvert a\rvert>1$	$x\in\varnothing$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n, n\in Z$
	$\lvert a\rvert>1$	$x\in\varnothing$
$tgx=b$	$b\in R$	$x=arctgb+\pi n, n\in Z$
$ctgx=b$	$b\in R$	$x=arcctgb+\pi n, n\in Z$

2.2.13. Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

1. $\sin x=0 \quad\leftrightarrow\quad x=\pi n, n\in Z.$
2. $\sin x=1 \quad\leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$
3. $\sin x=-1 \quad\leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$
4. $\cos x=0 \quad\leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$
5. $\cos x=1 \quad\leftrightarrow\quad x=2\pi n, n\in Z.$
6. $\cos x=-1 \quad\leftrightarrow\quad x=\pi+2\pi n, n\in Z.$
7. $tgx=0 \quad\leftrightarrow\quad x=\pi n, n\in Z.$
8. $tgx=1 \quad\leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$
9. $tgx=-1 \quad\leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

10. $ctgx = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

11. $ctgx = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

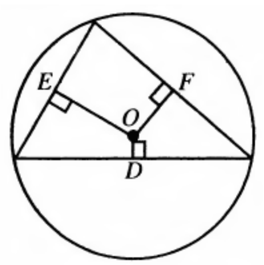
12. $ctgx = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

2.3. Планиметрия

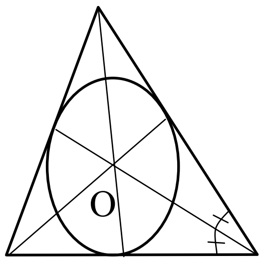
2.3.1. Произвольный треугольник

$a, b, c -$ стороны треугольника; $\alpha, \beta, \gamma -$ противолежащие им углы; $p -$ полупериметр; $R -$ радиус описанной окружности; $r -$ радиус вписанной окружности; $h_a -$ высота, проведенная к стороне a; $m_a -$ медиана, проведенная к стороне a; $l_c -$ биссектриса угла γ; $S -$ площадь

$S = \frac{1}{2} a h_a;$ $\qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

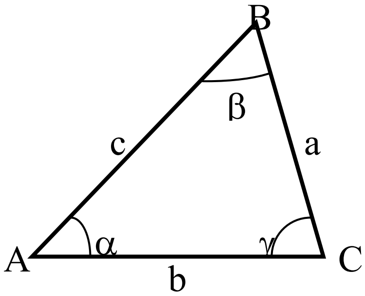


Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам.



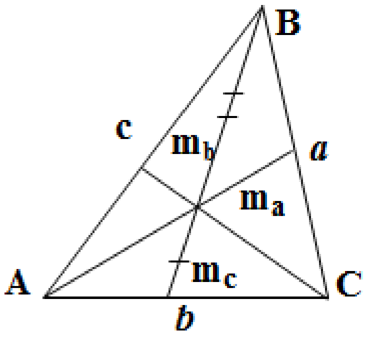
Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении его биссектрис.

$S = pr;$ $\qquad r = \frac{S}{p};$ $\qquad S = \frac{abc}{4R};$ $\qquad R = \frac{abc}{4S}.$



Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R;$



Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

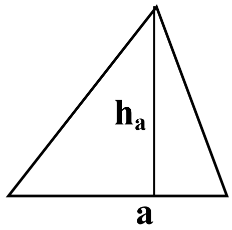
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}; \qquad a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2}.$$

Биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$.

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}; \qquad l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

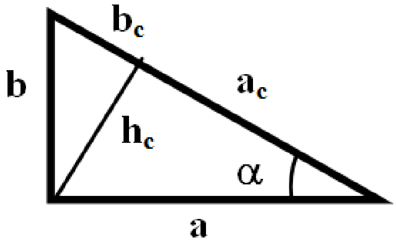
Три высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется *ортоцентром*.



$$h_a = \frac{2S}{a}; \qquad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

2.3.2. Прямоугольный треугольник

$a, b -$ катеты; $c -$ гипотенуза; $a_c, b_c -$ проекции катетов на гипотенузу; $h_c -$ высота, опущенная на гипотенузу



$$S = \frac{1}{2}a \cdot b; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \qquad R = \frac{c}{2}; \qquad h_c = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Некоторые метрические соотношения в прямоугольном треугольнике:

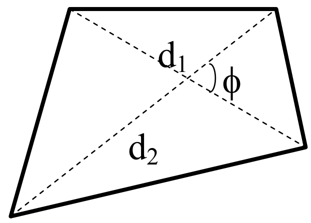
$h^2 = a_c \cdot b_c$; $a^2 = a_c \cdot c$; $b^2 = b_c \cdot c$; $a = b \cdot tg\alpha = b \cdot ctg\beta.$

Медиана, выходящая из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.

2.3.3. Равносторонний треугольник

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

2.3.4. Произвольный выпуклый четырехугольник



d_1, d_2 – диагонали; φ – угол между диагоналями; p – полупериметр; S – площадь четырехугольника

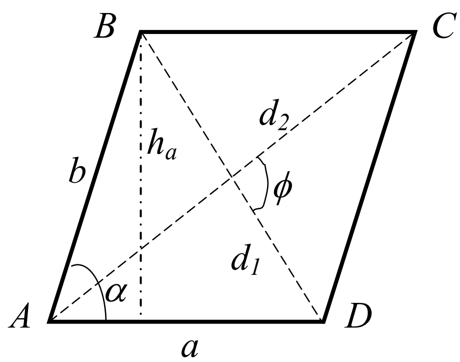
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

Сумма внутренних углов произвольного четырехугольника равна 360°.

Четырехугольник можно *описать около окружности* тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. В этом случае $S = p \cdot r$.

Четырехугольник можно *вписать в окружность* тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

2.3.5. Параллелограмм

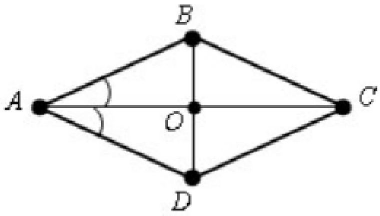


a, b – смежные стороны; α – угол между смежными сторонами; h_a – высота, проведенная к стороне a; d_1, d_2 – диагонали параллелограмма; φ – угол между диагоналями

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.

2.3.6. Ромб



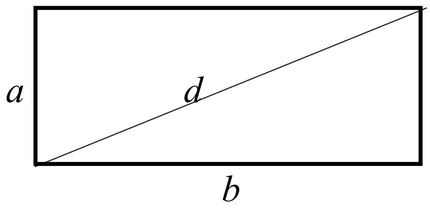
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2; \qquad r = \frac{h}{2}.$$

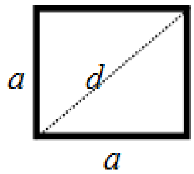
2.3.7. Прямоугольник

$$S = a \cdot b$$



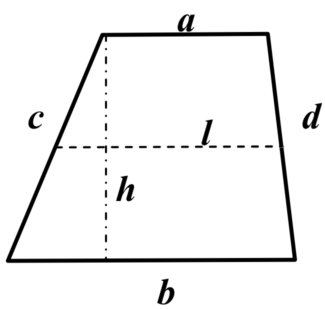
2.3.8. Квадрат

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2; \qquad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



2.3.9. Трапеция

$a, b -$ основания трапеции; $c, d -$ боковые стороны; $h -$ высота трапеции; $l -$ средняя линия; $d_1, d_2 -$ диагонали ; $\varphi -$ угол между диагоналями



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi;$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab\,.$$

В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.

Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то ее боковая сторона равна средней линии.

Средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок, концы которого лежат на основаниях трапеции.

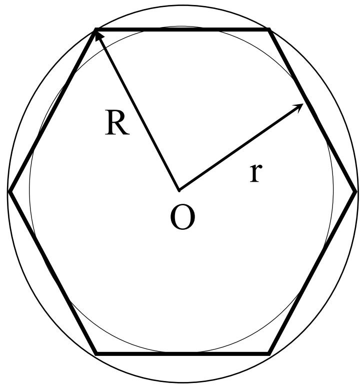
Если в равнобедренной трапеции *диагонали взаимно перпендикулярны*, то ее высота равна средней линии.

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты.

Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

Т*реугольники*, образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей трапеции, равновелики.

2.3.10. Правильный многоугольник



$a_n -$сторона правильного $n -$угольника; $p_n -$полупериметр; $S_n -$площадь правильного $n -$угольника

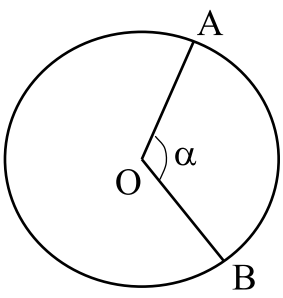
Сумма углов правильного n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

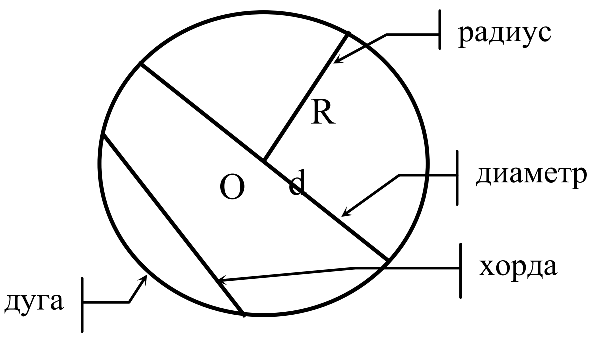
$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \quad a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R.$$

$$a_n = 2r \cdot tg\frac{180^\circ}{n}; \quad a_3 = r \cdot 2\sqrt{3}; \quad a_4 = 2r; \quad a_6 = r \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2.3.11. Окружность, круг

$R -$радиус окружности; $L -$длина окружности; $S -$площадь круга; $l -$длина дуги, ограничивающей сектор; n° – градусная мера центрального угла; $\alpha -$радианная мера центрального угла





$$L = 2\pi R; \qquad S = \pi R^2.$$

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

Равные хорды окружности равноудалены от ее центра.

Если *две хорды пересекаются внутри окружности*, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой.

Касательные, проведенные к окружности из общей точки, расположенной вне окружности, равны.

Если *из точки вне окружности проведены касательная и секущая*, то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезка секущей на ее внешнюю часть.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.

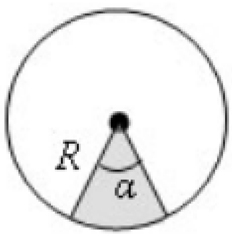
Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами.

Угол между двумя хордами с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, другая – между их продолжениями.

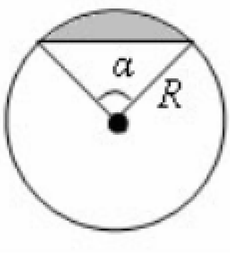
Круговым сектором называется часть круга между его радиусами:

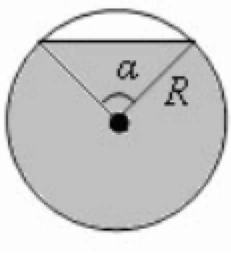
$$l = \frac{\pi R \cdot n^\circ}{180^\circ} = R \cdot \alpha ;$$

$$S_{сек.} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} R \cdot l .$$



Круговым сегментом называется часть круга, отсекаемая хордой:

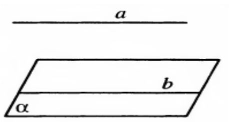




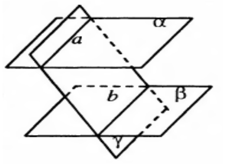
$$S_{сегм.} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha),$$ если центр круга лежит вне сегмента.

2.4. Стереометрия

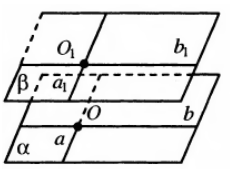
2.4.1. Теоремы о параллельности прямых и плоскостей



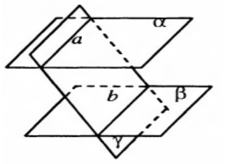
Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.



Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

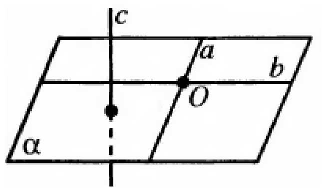


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

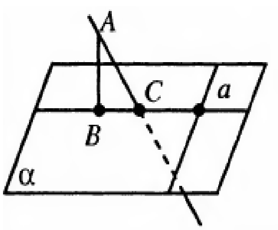


Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

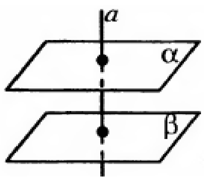
2.4.2. Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей



Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, достаточно, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

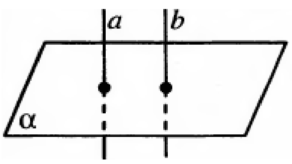


Для того, чтобы прямая, проведенная через основание наклонной, была ей перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на плоскость (*теорема о трех перпендикулярах*).



Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

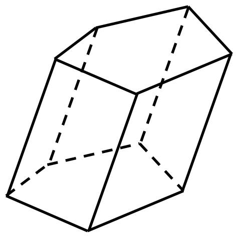
Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.



Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то другая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

2.4.3. Произвольная призма



l – боковое ребро; P – периметр основания; H – высота; $P_\perp$ – периметр перпендикулярного сечения; $S_{осн.}$ – площадь основания; $S_\perp$ – площадь перпендикулярного сечения; $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности; V – объем /

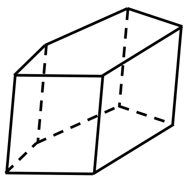
$S_{бок.} = P_\perp \cdot l$; $\qquad V = S_{осн.} \cdot H = S_\perp \cdot l$.

Если боковое ребро призмы образует со смежными сторонами основания равные углы, то оно проектируется на *биссектрису* угла, образованными этими сторонами основания.

Если боковое ребро призмы проектируется на перпендикуляр к какой-либо стороне основания, то боковая грань, проходящая через эту сторону, является прямоугольником.

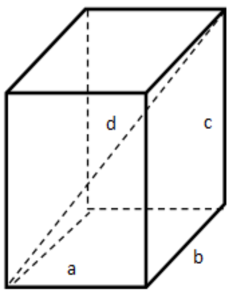
Объем треугольной призмы равен полупроизведению площади боковой грани на расстояние ее от противоположного ребра.

2.4.4. Прямая призма



$$S_{бок.} = P \cdot l \qquad V = S_{осн} \cdot H.$$

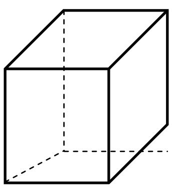
2.4.5. Прямоугольный параллелепипед



a, b, c – ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины; d – диагональ параллелепипеда; $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности

$S_{полн.} = 2(ab + ac + bc)$; $\qquad V = abc$; $\qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

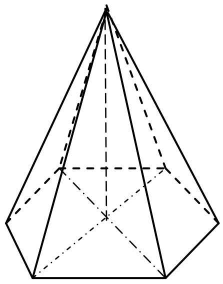
2.4.6. Куб



a – ребро куба

$S_{полн.} = 6a^2$; $\qquad V = a^3$; $\qquad d = a\sqrt{3}$.

2.4.7. Произвольная пирамида



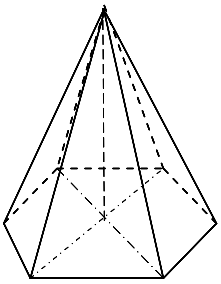
H – высота; P – периметр основания; $S_{осн.}$ – площадь основания; $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности; V – объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн.} \cdot H .$$

Если все *двугранные углы* при основании пирамиды равны φ, либо все апофемы равны между собой, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды и $S_{бок.} = \dfrac{S_{осн.}}{\cos\varphi}$.

Если все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания, либо равны между собой, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

2.4.8. Правильная пирамида



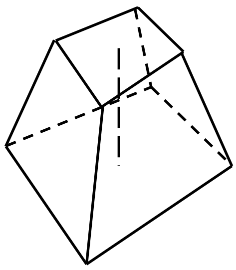
l – апофема

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l .$$

4.4.9. Произвольная усеченная пирамида

S_1, S_2 – площади оснований; h – высота усеченной пирамиды

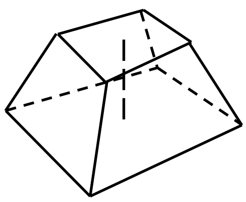
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$



2.4.10. Правильная усеченная пирамида

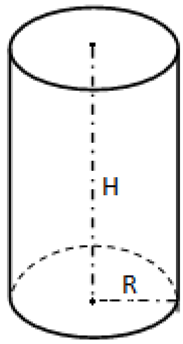
P_1, P_2 – периметры оснований; $h_{бок.}$ – высота боковой грани

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot h_{бок.} .$$



2.4.11. Цилиндр

R – радиус основания; H – высота; $S_{осн.}$ – площадь основания; $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности

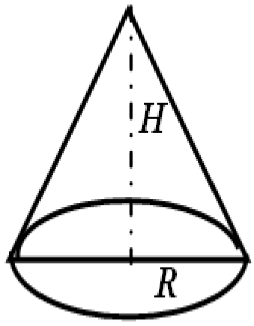


$S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{бок.} = 2\pi RH$;

$S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$; $V = \pi R^2 H$.

2.4.12. Конус

R – радиус основания; H – высота; L – образующая конуса /

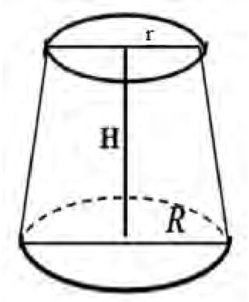


$S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{бок.} = \pi \cdot R \cdot L$;

$S_{полн.} = \pi \cdot R \cdot (R + L)$; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

2.4.13. Усеченный конус

/ R, r – радиусы оснований; h – высота усеченного конуса; l – образующая усеченного конуса /



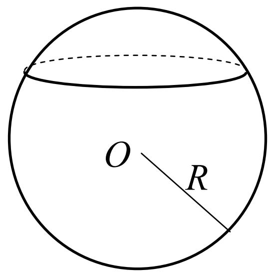
$S_{бок.} = \pi \cdot (R + r) \cdot l$;

$S_{полн.} = \pi \cdot \left(R^2 + r^2 + (R + r) \cdot l\right)$;

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

2.4.14. Шар, сфера

R – радиус шара; V – объем шара; S – площадь сферы

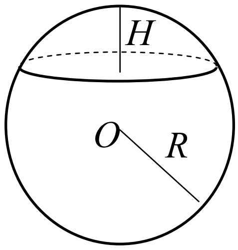


$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Если r – радиус шара, вписанного в многогранник объемом V и площадью поверхности $S_{полн.}$, то $r = \frac{3 \cdot V}{S_{осн.}}$.

2.4.15. Сегментная поверхность, шаровой сегмент, шаровой сектор

R – радиус шара; h – высота сегмента; $S_{сег.}$ – площадь сегментной поверхности; $V_{сег.}$ – объем сегмента; $S_{сект.}$ – площадь поверхности сектора; $V_{сект..}$ – объем сектора



Сегментной поверхностью называется часть шаровой поверхности, отсекаемой от нее плоскостью.

Отрезок радиуса, перпендикулярного плоскости сечения, заключенный между шаровой поверхностью и плоскостью, называется *высотой сегментной* поверхности.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

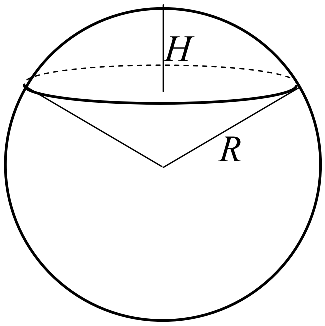
Шаровой сектор состоит из конуса и шарового сегмента.

$$S_{сег.} = 2\pi \cdot R \cdot h;$$

$$V_{сег.} = \pi \cdot h^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3}h\right);$$

$$S_{сект.} = \pi \cdot R \cdot \left(2h + \sqrt{2Rh - h^2}\right);$$

$$V_{сект..} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h.$$



3. Примеры заданий

Задания части А предполагают выбор правильного ответа из предложенных вариантов, которые размещены в правой колонке. Задания части В даны без вариантов ответа и предполагают самостоятельное решение. Полученное решение как правило имеет целочисленное значение.

Следует заметить, что в реальных вступительных испытаний используется обычно меньшее количество заданий, комплектуемых из частей А и В.

Вариант «X»

Часть А

А1. Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле…	**1)** $2\pi R$, **2)** πR^2, **3)** πR, **4)** $2\pi R^2$, **5)** $0{,}5\pi R^2$.
А2. 20% числа равны 4. Найти число.	**1)** 16, **2)** 24, **3)** 32, **4)** 40, **5)** 20.
А3. Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 и катетом 6.	**1)** 60, **2)** 40, **3)** 24, **4)** 30, **5)** 48.
А4. Вычислить: $\dfrac{\left(\dfrac{3}{8}-0{,}75\right)\cdot\dfrac{4}{3}}{\left(\dfrac{1}{2}+0{,}25\right):\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{3}$.	**1)** $\frac{1}{2}$, **2)** $\frac{1}{3}$, **3)** $-\frac{1}{3}$, **4)** 0, **5)** $\frac{1}{6}$.
А5. Найти остаток от деления трехчлена $3x^2-6x+2$ на двучлен $x-2$.	**1)** 0, **2)** 2, **3)** 20, **4)** 26, **5)** -2.
А6. Определить угловой коэффициент прямой $\frac{1}{6}x+2y-\frac{1}{2}=0$.	**1)** $\frac{1}{3}$, **2)** $-\frac{1}{12}$, **3)** $-\frac{1}{6}$, **4)** $\frac{1}{6}$, **5)** 12.

А7. Найти сумму ($x + y$), где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$	**1**) 0, **2**) 1, **3**) 2, **4**) 3, **5**) -1.
А8. Найти произведение корней уравнения $29x^2 - 4x - 11 = 0$.	**1**) 11, **2**) 4, **3**) $-\dfrac{11}{29}$, **4**) $\dfrac{4}{29}$, **5**) -11.
А9. Упростить выражение $\dfrac{\left(8+4\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(9-4\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{4}}}$	**1**) $2\sqrt{5}-14$, **2**) 4, **3**) 1, **4**) $2\sqrt{5}-4$, **5**) 2.
А10. Изделие стоимостью 400 руб. подорожало дважды на 10% каждый раз. Какова новая цена изделия?	**1**) 440, **2**) 484, **3**) 480, **4**) 466, **5**) 444.
А11. Вычислить: $\left(1+3^{\frac{1}{log_2 3}}\right)^{log_{0,5} 4}$.	**1**) 9, **2**) 3, **3**) $\dfrac{1}{3}$, **4**) $\dfrac{1}{9}$, **5**) 27.
А12. Найти сумму целых значений из области определения функции $y = \sqrt{(x-1)(5-x)}$.	**1**) 14, **2**) 13, **3**) 12, **4**) 15, **5**) 11.
А13. Если $3^{15-3a} = 27$, то a равно…	**1**) -4, **2**) 6, **3**) 0, **4**) 4, **5**) -6.
А14. Найти сумму корней уравнения $\left\|x^2 - x - 5\right\| = 1$.	**1**) 2, **2**) -5, **3**) -2, **4**) 3, **5**) 5.
А15. Окружность радиуса $10\sqrt{3}$ разделена в отношении 1:2:3 и точки деления соединены хордами. Найти среднюю по величине сторону полученного треугольника.	**1**) 15, **2**) 45, **3**) 30, **4**) 60, **5**) 35.

Часть В

В1. Вычислить: $\dfrac{3^{-5}\cdot 6^{4}\cdot 2^{-7}}{2^{-5}\cdot 3^{-2}\cdot 6}$.
В2. Решить уравнение $\sqrt{x^2}=x+4$.
В3. В арифметической прогрессии первый член равен (-124), а седьмой член равен (-22). Найти разность прогрессии.
В4. Определить какой цифрой оканчивается число 1993^{1993}.
В5. Найти сумму целых решений неравенства $(0{,}25)^{2-\sqrt{5x+1}}-4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}\le 0$.
В6. Решить уравнение $lg(x-4)+lg(x-19)=lg\,250$.
В7. Найти в градусах наименьшее решение x уравнения $6sin^2 x-13sin\,x=0$, удовлетворяющее условиям $0^\circ < x < 270^\circ$.
В8. Радиусы оснований усеченного конуса $2/\sqrt{\pi}$ и $4/\sqrt{\pi}$. Образующая наклонена к основанию под углом 60°. Найти боковую поверхность конуса.
В9. Найдите сумму всех целых решений x неравенства $log_a(tg43^\circ)\cdot\sqrt{cos\,43^\circ-a}\cdot(x^2-5x)<0$, принадлежащих отрезку $[-10;1]$.
В10. По дороге мимо наблюдателя проехали через равные промежутки времени автобус, мотоцикл и автомобиль. Мимо другого наблюдателя позже они проехали с такими же промежутками времени, но в другом порядке: автобус, автомобиль, мотоцикл. Найти скорость автобуса, если автомобиля 60 км/час, а мотоцикла 30 км/час.

Решение заданий варианта «X»

А1. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

Ответ: № 2.

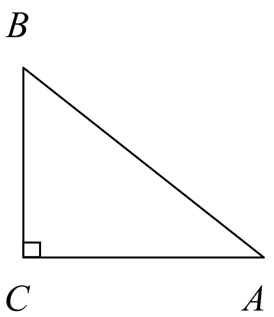
А2. Найдем число a, 20% которого равны 4, используя формулу $a = \dfrac{100\%}{p\%} \cdot c$,

где $p = 20\%$, $c = 4$. Получим: $a = \dfrac{100}{20} \cdot 4 = 20$.

Ответ: № 5.

А3. Площадь прямоугольного треугольника

вычислим по формуле $S = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot AC = 3 \cdot AC$



Для нахождения катета AC воспользуемся теоремой Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$.

Найдем площадь треугольника ABC:

$S = 3 \cdot AC = 3 \cdot 8 = 24$

Ответ: №3.

А4. Вычислим:

$$\frac{\left(\frac{3}{8} - 0{,}75\right) \cdot \frac{4}{3}}{\left(\frac{1}{2} + 0{,}25\right) : \frac{1}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{3}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{-\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1}} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: №5.

А5. Для нахождения остатка от деления трехчлена $3x^2 - 6x + 2$ на двучлен $x - 2$ воспользуемся теоремой Безу: остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - a$ равен значению многочлена при $x = a$. Вычислим значение трехчлена $3x^2 - 6x + 2$ при $x = 2$. Получим: $3x^2 - 6x + 2 = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 2 = 2$.

Ответ: №2.

А6. Запишем уравнение прямой $\frac{1}{6}x+2y-\frac{1}{2}=0$ в виде $y=k\cdot x+b$, где k – угловой коэффициент прямой:

$$\frac{1}{6}x+2y-\frac{1}{2}=0 \quad \leftrightarrow \quad 2y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}.$$

Угловой коэффициент прямой $k=-\frac{1}{12}$.

Ответ: №2.

А7. Сложим оба уравнения системы. Получим: $4x=4 \quad \leftrightarrow \quad x=1$.

Подставим полученное значение x во второе уравнение системы и найдем значение y: $1+y=2 \quad \leftrightarrow \quad y=1$. Найдем произведение $(x\cdot y)$, где $(x;y)$ – решение системы уравнений: $x\cdot y=1\cdot 1=1$.

Ответ: №3.

А8. Заметим, что уравнение $29x^2-4x-11=0$ имеет корни, так как дискриминант уравнения больше нуля. Для нахождения произведения корней уравнения воспользуемся теоремой Виета: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{11}{29}$.

Ответ: №3.

А9. Упростим выражение:

$$\frac{\left(8+4\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(9-4\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{4}}}=\sqrt{8+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{4\left(2+\sqrt{5}\right)}\cdot\sqrt[4]{4+5-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=2\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=2\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\left|2-\sqrt{5}\right|}=2\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}=$$

$$=2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}=2\cdot\sqrt{5-4}=2.$$

Ответ: №5.

А10. Для решения задачи воспользуемся формулой сложных процентов: $A_n = A_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$. Найдем новую цену A_2 изделия стоимостью $A_0 = 400$, которое подорожало дважды на $p = 10\%$ каждый раз:

$$A_2 = 400\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = 400\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{400\cdot 121}{100} = 4\cdot 121 = 484\,.$$

Ответ: №4.

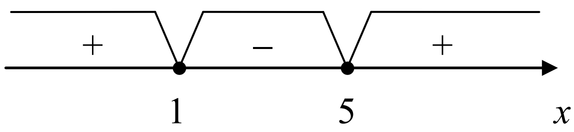
А11. $$\left(1+3^{\frac{1}{log_2 3}}\right)^{log_{0,5} 4} = \left(1+3^{log_3 2}\right)^{log_{2^{-1}} 2^2} = (1+2)^{-2log_2 2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}\,.$$

Ответ: №4.

А12. Областью определения функции $y=\sqrt{(x-1)(5-x)}$ является множество решений неравенства $(x-1)\cdot(5-x)\ge 0$.

Решим неравенство методом интервалов:

$$(x-1)(5-x)\ge 0 \quad \leftrightarrow \quad (x-1)(x-5)\le 0\,.$$



Решением неравенства является отрезок $x\in[1;5]$. Найдем сумму целых значений x, принадлежащих данному отрезку: $1+2+3+4+5=15$.

Ответ: №4.

А13. Для нахождения *а*, приведем обе части показательного уравнения к одному основанию, равному 3, и приравняем показатели этих функций:

$$3^{15-3a} = 27 \quad \leftrightarrow \quad 3^{15-3a} = 3^3 \quad \leftrightarrow \quad 15-3a = 3 \quad \leftrightarrow \quad 3a = 12 \quad \leftrightarrow \quad a = 4\,.$$

Ответ: №4.

А14. Решим уравнение:

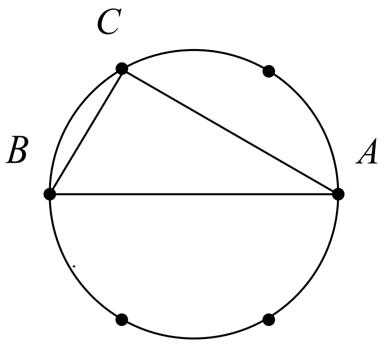
$$\left|x^2-x-5\right|=1 \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2-x-5=1, \\ x^2-x-5=-1 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0, \\ x^2-x-4=0. \end{array}\right.$$

Заметим, что оба уравнения имеют корни. Для нахождения суммы корней уравнений воспользуемся теоремой Виета: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

Сумма корней первого уравнения равна 1, сумма корней второго уравнения тоже равна 1, следовательно, сумма всех корней исходного уравнения равна 2.

Ответ: № 1.

А15.



Найдем, сколько градусов составляет одна часть дуги, если окружность разделена в отношении $1:2:3$. Получим:

$$x+2x+3x=360^{\circ} \ \leftrightarrow \ 6x=360^{\circ} \ \leftrightarrow \ x=60^{\circ}.$$

Построим треугольник *ABC*, соединяя точки деления окружности хордами. Заметим, что дуга *ACB* составляет 180°, поэтому треугольник *ABC* – прямоугольный (диаметр окружности является гипотенузой треугольника). Вписанный угол *ABC* опирается на дугу 120°, поэтому его величина составляет 60°. Найдем среднюю по величине сторону прямоугольного треугольника *AC*:

$$AC = AB\cdot sin\,\angle ABC = 20\sqrt{3}\cdot sin\,60^{\circ} = 20\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=30.$$

Ответ: № 3.

В1. $\dfrac{3^{-5}\cdot 6^4\cdot 2^{-7}}{2^{-5}\cdot 3^{-2}\cdot 6}=3^{-5+2}\cdot 6^{4-1}\cdot 2^{-7+5}=3^{-3}\cdot 6^3\cdot 2^{-2}=3^{-3}\cdot 3^3\cdot 2^3\cdot 2^{-2}=3^0\cdot 2^1=2.$

Ответ: 2.

В2. Решим уравнение, преобразовав его к виду:

$$\sqrt{x^2}=x+4 \quad \leftrightarrow \quad |x|=x+4 \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x+4\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=x+4, \\ x=-x-4 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x\ge -4, \\ \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x=-2 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad x=-2.$$

Ответ: -2.

B3. Воспользуемся формулой общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

Так как $a_1 = -124,\ a_7 = -22,$ то

$$a_7 = a_1 + 6d \quad \leftrightarrow \quad -22 = -124 + 6d \quad \leftrightarrow \quad 6d = 102 \quad \leftrightarrow \quad d = 17\,.$$

Ответ: 17.

B4. Число 1993 при возведении в первую степень оканчивается цифрой 3, при возведении во вторую степень оканчивается цифрой 9, при возведении в третью степень оканчивается цифрой 7, при возведении в четвертую степень оканчивается цифрой 1. При возведении числа 1993 в пятую и последующие степени, оно будет оканчивается снова на 3, 9, 7, 1 соответственно.

Представим число 1993^{1993} в виде $\left(1993^4\right)^{498} \cdot 1993$. Число 1993^4 оканчивается цифрой 1. Если число оканчивается цифрой 1, то при возведении его в любую степень, оно будет тоже оканчиваться цифрой 1, значит число $\left(1993^4\right)^{498}$ оканчивается цифрой 1.

Если число, оканчивающееся цифрой 1, умножить на 1993, то оно будет оканчиваться цифрой 3.

Ответ: 3.

B5. Найдем область допустимых значений неравенства:

$$5x + 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -0{,}2\,.$$

Решим неравенство.

$$(0{,}25)^{2-\sqrt{5x+1}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}} \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{5x+1}} \leq 2^2 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}} \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad \left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{5x+1}} \leq 2^{2+\sqrt{5x+1}} \quad \leftrightarrow \quad 2^{-4+2\sqrt{5x++1}} \leq 2^{2+\sqrt{5x+1}}\,.$$

Так как основания обеих частей неравенства равны между собой и больше единицы, то перейдем к решению равносильного неравенства: $-4 + 2\sqrt{5x+1} \leq 2 + \sqrt{5x+1} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{5x+1} \leq 6 \quad \leftrightarrow \quad 5x + 1 \leq 36 \quad \leftrightarrow \quad x \leq 7\,.$

Учитывая область допустимых значений, решением неравенства является отрезок $x \in [-0{,}2\,;7]$. Целыми значениями x из данного отрезка являются числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, сумма которых равна 28.

Ответ: 28.

B6. Для решения уравнения $lg(x-4)+lg(x-19)=lg\,250$ перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x-4>0, \\ x-19>0, \\ lg(x-4)+lg(x-19)=lg\,250 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ x>19, \\ lg((x-4)\cdot(x-19))=lg\,250 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x>19, \\ x^2-23x+76=250 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>19, \\ x^2-23x-174=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>19, \\ \left[\begin{array}{l} x=29, \\ x=-6 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \quad x=29.$$

Ответ: 29.

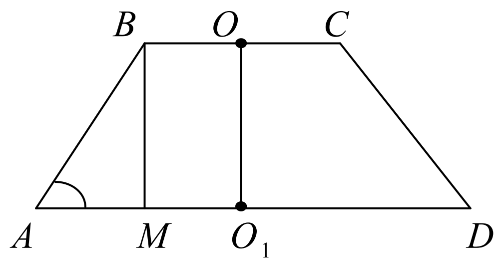
B7. $6\,sin^2 x-13\,sin\,x=0 \quad \leftrightarrow \quad sin\,x(6\,sin\,x-13)=0 \quad \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin\,x=0, \\ 6\,sin\,x-13=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin\,x=0, \\ sin\,x=\dfrac{13}{6}. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, так как $\frac{13}{6}>1$. Решением уравнения $sin\,x=0$ является множество решений $x=180^\circ n,\ n\in Z$. Решением уравнения, удовлетворяющим условию $0^\circ<x<270^\circ$, является угол 180°, получаемый из множества решений уравнения при $n=1$.

Ответ: 180.

B8.



Рассмотрим осевое сечение конуса.

По условию $OB = r = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, $O_1A = R = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB=l$. Найдем длину отрезка AM: $AM = O_1A - OB = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

В прямоугольном треугольнике ABM катет AM лежит напротив угла в 30°, поэтому $AB = 2 \cdot AM = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса найдём по формуле:

$$S_{бок} = \pi\left(R + r\right)l = \pi\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} = \pi \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 24.$$

Ответ: 24.

B9. Найдем область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ \cos 43^\circ - a \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a \leq \cos 43^\circ \end{cases} \leftrightarrow a \in \left(0; \cos 43^\circ\right].$$

Функция $y = cos\,x$ убывает, поэтому $cos\,43^\circ < cos\,30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, функция $y = tgx$ возрастает, поэтому $tg43^\circ < tg45^\circ = 1$. Отсюда следует, что и основание и аргумент функции $y = log_a\left(tg43^\circ\right)$ меньше единицы, поэтому $log_a\left(tg43^\circ\right) > 0$.

Также заметим, что $\sqrt{cos\,43^\circ - a} \geq 0$.

Исходное неравенство $log_a\left(tg43^\circ\right) \cdot \sqrt{cos\,43^\circ - a} \cdot \left(x^2 - 5x\right) < 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ a \neq cos\,43^\circ. \end{cases}$

Решением данной системы является интервал $x \in \left(0;5\right)$. Отрезку $\left[-10;1\right]$ принадлежит только одно целое значение $x = 1$ из интервала $x \in \left(0;5\right)$.

Ответ: 1.

B10. Пусть S – расстояние между наблюдателями, x - скорость автобуса, t - промежуток времени, с которым проехали мимо первого наблюдателя автобус, мотоцикл и автомобиль. Время, затраченное автобусом, мотоциклом и автомобилем на преодоление расстояния от первого наблюдателя до второго наблюдателя будет, соответственно, равно $\frac{S}{x}, \frac{S}{30}, \frac{S}{60}$.

Составим систему уравнений, используя условия задачи: $\begin{cases} \frac{S}{30} = \frac{S}{x} + t, \\ \frac{S}{60} = \frac{S}{x} - t. \end{cases}$

Сложим оба уравнения системы:

$$\frac{S}{30} + \frac{S}{60} = \frac{2S}{x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{35}{60} = \frac{2S}{x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{20} = \frac{2}{x} \quad \leftrightarrow \quad x = 40.$$

Ответ: 40.

Варианты заданий для самостоятельной работы

Часть А

А1. Длина окружности радиуса R вычисляется по формуле…	**1)** πR, **2)** πR^2, **3)** $2\pi R$, **4)** $2\pi R^2$, **5)** $0{,}5\pi R$.
А2. 16% числа равны 24. Найти число.	**1)** 86, **2)** 164, **3)** 84, **4)** 150, **5)** 162.
А3. Найти площадь прямоугольного треугольника с острым углом 30° и гипотенузой 6.	**1)** $4{,}5\sqrt{3}$, **2)** 9, **3)** $9\sqrt{3}$, **4)** 4,5, **5)** 6.
А4. Вычислить: $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-0{,}5\right):\frac{5}{4}}{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot 1{,}5}-\dfrac{1}{15}$.	**1)** 0,2, **2)** 0,5, **3)** $\frac{1}{15}$, **4)** $\frac{3}{5}$, **5)** $\frac{1}{3}$.
А5. Найти остаток от деления трехчлена $2x^2-3x+5$ на двучлен $x-1$.	**1)** 0, **2)** -1, **3)** 4, **4)** 5, **5)** 3.
А6. Определить угловой коэффициент прямой $1-\frac{1}{2}x+3y=0$.	**1)** $\frac{3}{2}$, **2)** $-\frac{1}{2}$, **3)** $\frac{1}{2}$, **4)** $\frac{1}{6}$, **5)** $\frac{2}{3}$.
А7. Найти сумму (x + y), где (x; y) – решение системы уравнений $\begin{cases} y+x=1, \\ 2y-x=2. \end{cases}$	**1)** 4, **2)** 2, **3)** 1, **4)** 0, **5)** -1.
А8. Найти сумму корней уравнения $13x^2-27x-26=0$.	**1)** $\frac{27}{13}$, **2)** -2, **3)** $-\frac{27}{13}$, **4)** 27, **5)** -26.
А9. Упростить выражение $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$.	**1)** 1, **2)** $\sqrt{3}$, **3)** $\sqrt{6}$, **4)** $2\sqrt{2}$, **5)** $\sqrt{2}$.
А10. Изделие стоимостью 900 руб. подешевело дважды на 20% каждый раз. Найти новую цену изделия.	**1)** 576, **2)** 540, **3)** 720, **4)** 756, **5)** 644.

А11. Вычислить: $81^{log_{27}5 \cdot log_5 4}$.	**1**) $\sqrt[3]{4}$, **2**) $2\sqrt[3]{4}$, **3**) $4\sqrt[3]{4}$, **4**) 4, **5**) 8.
А12. Найти сумму натуральных значений из области определения функции $y=\sqrt{(x+1)(3-x)}$.	**1**) 5, **2**) 6, **3**) 4, **4**) 0, **5**) 7.
А13. Если $2^{2x-8}=2$, то x равно…	**1**) 4, **2**) $-\frac{7}{2}$, **3**) $\frac{9}{2}$, **4**) 0, **5**) $-\frac{3}{2}$.
А14. Найти сумму корней уравнения $\left\|x^2+5x+6\right\|=2$.	**1**) -1, **2**) -4, **3**) 5, **4**) -5, **5**) 0.
А15. Высоты, опущенные из вершины тупого угла параллелограмма на боковые стороны, равны 6 и 8. Найти периметр параллело-грамма, если тупой угол его содержит 150°.	**1**) 28, **2**) 56, **3**) 32, **4**) 64, **5**) 14.

Часть В

В1. Вычислить: $\left(2^{-10}\right)^{\frac{-1}{2}}-7\cdot(-0{,}5)^{-2}$.
В2. Решить уравнение $\sqrt{5x+1}=1-x$.
В3. Первый член в геометрической прогрессии равен 5, а шестой член равен 1215. Найти знаменатель этой прогрессии.
В4. Определить, какой цифрой оканчивается число 2004^{2004}.
В5. Найти наименьшее целое решение неравенства $(0{,}1(6))^{2x-5}\cdot 0{,}25\le 324$.
В6. Вычислить: $4log_4^2\, log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{49}\right)$.
В7. Вычислить $\frac{3}{tg\alpha}$, если $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.
В8. Радиусы оснований прямого усеченного конуса 3 и 7, образующая 5. Найти площадь его осевого сечения.

B9. Найдите количество целых решений неравенства $\sqrt{0{,}1-a}\cdot\left(3x-x^{2}\right)\cdot log_{a}\dfrac{1}{sin\,75^{0}}\le 0$.
B10. Расстояние между кораблями, движущимся равномерно и прямолинейно по морю, в 6.00 часов было равно 200 км, в 13.00 было 150 км, а в 17.00 было 130 км. Каково наименьшее расстояние может быть между этими кораблями?

Ответы к заданиям для самостоятельной работы

А1	2
А2	5
А3	3
А4	5
А5	2
А6	2
А7	3
А8	3
А9	5
А10	2
А11	4
А12	4
А13	4
А14	1
А15	3
В1	2
В2	-2
В3	17
В4	3
В5	28
В6	29
В7	180
В8	24
В9	1
В10	40

Литература

1. Справочник. Абитуриент 2010. Высшие учебные заведения Республики Беларусь.– Мн.: «Вышэйшая школа», 2010.
2. М.П. Дымков и др. Математика. Тесты: Пособие для подготовки к тестированию .– Мн.: БГЭУ, 2006.
3. Математика. Материалы централизованного тестирования с решениями и комментариями. Пособие для подготовки к тестированию. Под редакцией О.Б.Борисевич. – Мн.: РИКЗ, Мозырь: ООО «Белый ветер», 2005.
4. К.Н.Лунгу. Тесты по математике: Для абитуриентов. – М.: «Айрис-пресс», 2003.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (с решениями). В двух книгах / Под ред. М.И.Сканави. – 9-ое изд., перер. и доп. – М.: ОНИКС, «Новая волна», 1996.
6. А.Г.Цыпкин, А.И.Пинский. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: «Наука», 1983.
7. Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики). – изд. 3-е, перер. – М.: «Наука», 1978.
8. В.С.Кущенко. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. – Л.: «Судостроение», 1964.
9. Т.П.Бахтина. Математикон 7: Готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям. Пособие для учащихся общеобразов. школ, гимназий, лицеев. – Мн.: «Аверсэв», 2004.
10. В.В.Вавилов, И.И.Мельников и др. Задачи по математике: Уравнения и неравенства. Справочное пособие. – М.: «Наука», 1988.