МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

В.Н.Аксень, Л.Ф.Янчук

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
Для студентов заочной формы обучения

МИНСК 2004

Печатается в авторской редакции

Р е ц е н з е н т доцент, к. экон. наук Самаль С.А.

Р е к о м е н д о в а н о   кафедрой высшей математики

У т в е р ж д е н о   Редакционно-издательским советом университета

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Учебно-методическое пособие. Для студентов заочной формы обучения

В.Н.Аксень, Л.Ф.Янчук

– Мн.: БГЭУ, 2004. – 67 с.

Предисловие

Пособие содержит вопросы программы курса «Высшая математика», перечень рекомендуемой литературы, методические указания по изучению курса, две контрольные работы, правила их выполнения и оформления. Каждая контрольная работа состоит из 10 вариантов (1 – 10) и варианта « α », снабженного подробными решениями.

Контрольная работа № 1 включает задачи по аналитической геометрии, линейной алгебре, дифференциальному исчислению. Задачи по темам функции нескольких переменных, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, включены в контрольную работу № 2.

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Литература

1. Высшая математика. Общий курс. Под общей ред. Самаля С.А. Мн.: Выш. шк., 2000.
2. Кузнецов А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс: Учебное пособие. Мн.: Выш. шк., 1994.
3. Минюк С.А., Самаль С.А, Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов. Т.1. Мн.: ООО «Элайда», 2003.
4. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Выш. шк., 1976.
5. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Выш. шк., 1976.
6. Шипачев В.С. Курс высшей математики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. Т. 1, 2.
7. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Выш. шк., 1988. Ч. 1, 2.
8. Говор Т.И., Янчук Л.Ф. Методы интегрирования. Учебно-методическое пособие. Мн.: БГЭУ, 2003.

Вопросы по курсу
«Высшая математика»

1. Аналитическая геометрия

1. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.
2. Понятие об уравнении линии. Определение окружности и ее уравнения.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение пучка прямых с центром в данной точке.
5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
7. Канонические уравнения параболы, гиперболы, эллипса.
8. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку.
9. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
10. Уравнения прямой в пространстве.
11. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
12. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Линейная алгебра

1. Понятие определителя n-го порядка. Свойства определителей n-го порядка.
2. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Правило Крамера. Метод Гаусса.
3. Понятие n-мерного вектора. Действия над n-мерными векторами.
4. Линейная зависимость векторов.
5. Ранг и базис векторного пространства. Разложение вектора по данному базису.
6. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
7. Действия над матрицами и их свойства.
8. Обратная матрица и ее вычисление.
9. Выпуклые множества точек.
10. Теорема о пересечении конечного числа выпуклых множеств. Графический метод решения системы m линейных неравенств с двумя неизвестными.

3. Математический анализ

1. Понятие функции. Область определения функции. Различные способы задания.
2. Основные элементарные функции. Элементарные функции.
3. Числовая последовательность. Определение предела числовой последовательности.
4. Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей.
5. Определение предела функции в точке. Односторонние пределы.
6. Основные теоремы о пределах функций. Два замечательных предела.
7. Непрерывность функции в точке. Непрерывность элементарных функций.
8. Геометрическая задача, приводящая к понятию производной. Определение производной. Геометрический смысл производной.
9. Теорема о производной сложной функции. Таблица производных.
10. Теоремы Ролля, Лагранжа.
11. Правило Лопиталя. Раскрытие всех видов неопределенностей.
12. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
13. Максимум и минимум функции. Необходимое условие экстремума.
14. Достаточные условия экстремума функции.
15. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
16. Асимптоты графика функции.
17. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
18. Определение функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.
19. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия.
20. Понятие об эмпирических формулах. Подбор параметров по способу наименьших квадратов. Выравнивание по прямой, параболе.
21. Определение первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов.
22. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле.
23. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
24. Интегрирование рациональных функций.
25. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

26.Интегрирование некоторых иррациональных функций.
27.Геометрическая задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла.
28.Свойства определенных интегралов.
29.Теорема о существовании первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
30.Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
31.Площадь плоской фигуры. Объем тела вращения.
32.Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
33.Несобственные интегралы от неограниченных функций.
34.Дифференциальные уравнения (основные понятия).
35.Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
36.Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
37.Понятие числового ряда и суммы ряда. Геометрическая прогрессия.
38.Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда.
39.Интегральный признак сходимости.
40.Признаки сравнения для положительных рядов. Признаки Даламбера и Коши.
41.Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости.
42.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
43.Понятие степенного ряда. Область сходимости степенного ряда.
44.Ряды Тейлора и Маклорена.
45.Разложение функций $\sin x$, $\cos x$, e^x в ряд Маклорена. Биномиальный ряд.
46.Применение рядов к приближенным вычислениям.

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Линия и ее уравнение

Уравнением линии называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Пример 1.1. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a,b)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная (текущая) точка окружности. По определению окружности имеем $CM = R$.

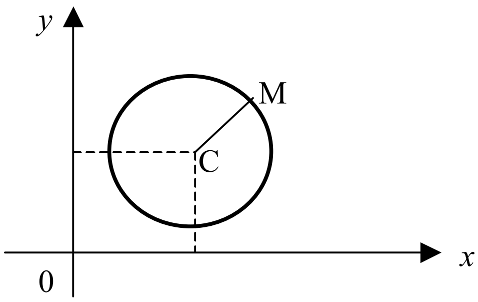


Рис. 1.1.

Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками $C(a,b)$ и $M(x,y)$. Получим $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$, отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется *нормальным уравнением окружности*.

Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=b=0$, то уравнение (1.1) принимает вид $x^2+y^2=R^2$. Это уравнение называется *каноническим (простейшим) уравнением окружности*.

1.2. Прямая линия

[1], 5.1; к. р. №1 (В – «α», задание №1).

1.3. Кривые второго порядка

[1], 5.6.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки F (фокуса) и данной прямой Δ (директрисы).

Расстояние от фокуса F до директрисы Δ называется *параметром параболы* и обозначается через p $(p>0)$. Составим уравнение параболы. Систему координат выберем следующим образом. Проведем ось Ох через фокус F перпендикулярно директрисе Δ в направлении от директрисы к фокусу. Начало координат возьмем в середине отрезка AF, где A – точка пересечения оси Ох с директрисой Δ (рис. 1.2)

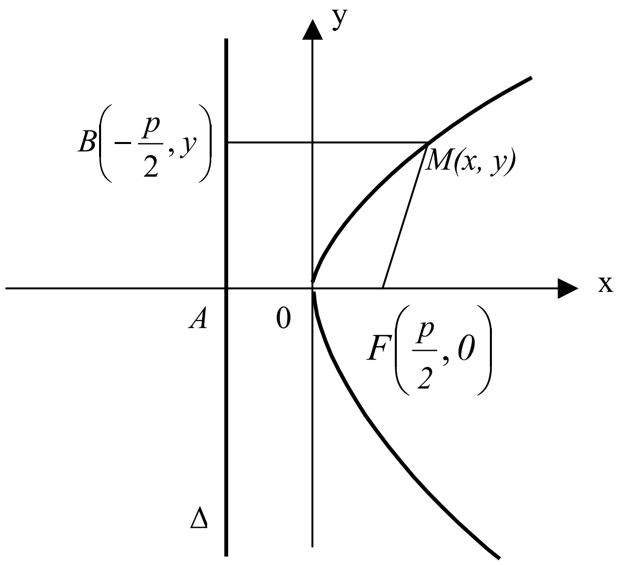


Рис. 1.2

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Из точки M опустим перпендикуляр MB на директрису Δ. По определению параболы $FM = MB$ или

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2},$$

отсюда

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

или $y^2 = 2px$ (1.2)

Уравнение (1.2) называется *каноническим уравнением параболы.* Осью симметрии параболы (осью) является ось Ох. Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*. В данном случае вершина параболы совпадает с началом координат. Уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

Примечание. Каждое из уравнений $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяет параболу.

1.4. Прямая и плоскость в пространстве

[1], 5.2.

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие матрицы

[1], 3.1.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица mn чисел, содержащая m строк и n столбцов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Числа a_{ik}, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. В записи a_{ik} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс k – номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ik}. Для кратного обозначения матрицы употребляют заглавные латинские буквы: A, B, C, … или символ $A = (a_{ik})$ $(i = 1,2,\dots,m; \quad k = 1,2,\dots,n)$. Если хотят указать размеры матрицы, то пишут $A_{m\times n}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется *квадратной*, а число $m = n$ – ее *порядком*. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ*, а элементы $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – *побочную диагональ*.

2.2. Определители *n*-го порядка

[1], 3.3, 3.4, 3.5.

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Определителем (детерминантом) второго порядка, соответствующим матрице (2.1) называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Употребляются также следующие обозначения определителя: $\Delta, |A|, \det A$.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (2.2), называется число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \tag{2.3}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Каждое из слагаемых суммы (2.3) называют *членом определителя*. В каждый член определителя входит только по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Знаки членов определителя легко запомнить, пользуясь *правилом Саррюса* (или *правилом треугольников*)

Преобразуем формулу (2.3), объединяя справа члены, содержащие элементы первого столбца a_{11}, a_{21}, a_{31}.

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Таким образом, вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей второго порядка.

Определитель второго порядка, который получается из определителя третьего порядка Δ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца называется минором *элемента* a_{ik} определителя Δ и обозначается M_{ik}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя Δ называется минор M_{ik}, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$ и обозначается A_{ik}.

Итак, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Учитывая эти определения, равенство (2.4) перепишем в виде

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$\text{или } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \tag{2.5}$$

Равенства (2.3) и (2.5) равносильны. Поэтому определение определителя третьего порядка можно сформулировать иначе.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (2.2), называется сумма произведений элементов первого столбца на соответствующие им алгебраические дополнения.

Аналогично можно сформулировать определение определителя n-го порядка, соответствующего квадратной матрице n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots a_{n1}A_{n1}. \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) называют *разложением определителя по элементам первого столбца*.

Справедлива теорема о разложении определителя по элементам любой строки (столбца).

Теорема. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Удобно разлагать определитель по элементам той строки или столбца, которые содержат наибольшее количество нулевых элементов.

Пример 2.1. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Так как во втором столбце содержится наибольшее количество нулей, то разложим определитель по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{4\cdot 2} = 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\left(1 \cdot 1(-3) + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3(-3) - 1 \cdot 0 \cdot 2\right) =$$

$$= -5(-3 + 6 - 4 + 18) = -85.$$

Вычисление определителей, особенно высших порядков, часто упрощается, если воспользоваться их свойствами.

2.3. Свойства определителей

[1], 3.6.

2.4. Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными. Правило Крамера

[1], 4.2.

Системой *m* линейных уравнений с *n* неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.7)$$

где $a_{ik}, b_i (i = 1,2,\ldots,m; k = 1,2,\ldots,n)$ – действительные числа a_{ik} – коэффициент при неизвестном x_k в *i*-м уравнении системы; b_i – свободный член в этом уравнении.

Система (2.7) называется *однородной*, если все ее свободные члены $b_i (i = 1,2,\ldots,m)$ равны нулю.

*Решением системы (*2.7) называется такая упорядоченная совокупность *n* чисел $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которая при подстановке в систему (2.7) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в верные равенства.

Система уравнений (2.7) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если у нее не существует ни одного решения. Совместная система, имеющая единственное решение называется *определенной* и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Пусть в системе (2.7) $m = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных. Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ $(k = 1, 2, ..., n)$, где Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой в нем k-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Находим определители Δ_1, Δ_2, заменяя в определителе Δ первый и второй столбцы соответственно столбцом свободных членов: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 5 = 14$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$.

По формулам Крамера находим: $x_1 = \dfrac{14}{7} = 2$; $x_2 = \dfrac{7}{7} = 1$.

2.5. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

[1], 4.3.

Рассмотрим систему (2.7) т.е. систему m линейных уравнений с n неизвестными.

Элементарными преобразованиями системы (2.7) называются следующие преобразования:

1) перемена местами уравнений в системе;
2) умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на число $c \neq 0$;
3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на произвольное число c;
4) вычеркивание уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$.

Можно доказать, что в результате элементарных преобразований (1 – 4) получается система линейных уравнений, равносильная исходной, т.е. имеющая то же самое множество решений.

Наиболее распространенным методом решения и исследования систем (2.7) является *метод последовательного исключения неизвестных*, называемый также *методом Гаусса*.

Будем производить над системой (2.7) элементарные преобразования.

Среди коэффициентов при неизвестном x_1 есть отличные от нуля (в противном случае x_1 не входит в данную систему). Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то можно поменять местами уравнения в системе (2.7)). Исключим неизвестное x_1 из уравнений системы, начиная со второго. Для этого к i-му $(i = 2,...,m)$ уравнению системы прибавим первое, умноженное на $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$. Аналогично исключим неизвестное x_2 из уравнений системы, начиная с третьего, x_3 – начиная с четвертого уравнения и так далее.

В процессе преобразований придем к одному из двух случаев.

1. Система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$, $(b \neq 0)$. В этом случае система (2.7) не имеет решений, т.е. *несовместна.*
2. В системе уравнения вида $0 = b$, $(b \neq 0)$ отсутствуют и система имеет вид

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1r}x_r + ... + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad b_{22}x_2 + ... + b_{2r}x_r + ... + b_{2n}x_n = c_{2,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r + ... + b_{rn}x_n = c_{r,} \end{cases} \tag{2.8}$$

где коэффициенты $b_{11}, b_{22}, ..., b_{rr}$ отличны от нуля. В системе (2.8) может оказаться меньше уравнений, чем в исходной системе $(r \le m)$, так как в процессе преобразований отбрасываются уравнения вида $0 = 0$.

Система уравнений вида называется *диагональной* или *ступенчатой*. Переход от системы (2.7) к равносильной ей системе (2.8) называется *прямым ходом метода Гаусса.*

При решении системы (2.8) возможны два случая.

1. $r = n$, т.е. число уравнений системы (2.8) равно числу неизвестных. Система имеет треугольный вид. Тогда из последнего уравнения, имеющего вид $b_{nn}x_n = c_n \quad (b_{nn} \ne 0)$, находим значение x_n. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим значение x_{n-1} и так далее, наконец, из первого уравнения – значение x_1. Указанный способ нахождения неизвестных называется *обратным ходом метода Гаусса.*

   Итак, *в случае $r = n$ система уравнений (2.8), а, следовательно, и исходная система имеет единственное решение*.
2. $r < n$, т.е. число уравнений системы (2.8) меньше числа неизвестных. Тогда r неизвестных будут *базисными*, а остальные $(n - r)$ – *свободными*. Из последнего уравнения системы (2.8) выражаем x_r через свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Осуществляя обратный ход выразим базисные неизвестные $x_{r-1}, x_{r-2}, ..., x_1$ через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения базисных неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$, получим бесконечное множество решений системы (2.8), а, следовательно, и системы (2.7).

   Итак, *в случае $r < n$ система (2.7) имеет бесконечное множество решений.*

Таким образом, метод Гаусса позволяет одновременно исследовать систему и решить ее, если она совместна.

На практике элементарные преобразования производят не над системой, а над расширенной матрицей системы, т.е. над матрицей, состоящей из коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений.

Пример 2.3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы, отделяя столбец из свободных членов вертикальной чертой. При помощи элементарных преобразований сводим матрицу к диагональному виду. Конкретные преобразования по исключению неизвестных будем пояснять в виде стрелок

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \boxed{-2}\ \boxed{3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -19 \\ 0 & 7 & 11 & 19 \end{array}\right] \boxed{7} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & -38 & -114 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ \quad -x_2 - 7x_3 = -19, \\ \qquad -38x_3 = -114, \end{cases}$$

равносильная данной.

Эта система совместа и имеет единственное решение, которое находим обратным ходом метода Гаусса: $x_3 = 3,\ x_2 = -2,\ x_1 = 1$.

Пример 2.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1, \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы и сводим ее при помощи элементарных преобразований к диагональному виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \boxed{-5}\ \boxed{7} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \boxed{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система уравнений диагонального вида

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_3 - 4x_4 = 12. \end{cases}$$

Неизвестное x_4 перенесем в правую часть. Система примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 + 4x_4, \\ x_2 - x_3 = -3 - x_4, \\ 2x_3 = 12 + 4x_4. \end{cases}$$

В системе неизвестное x_4 – свободное, неизвестные x_1, x_2, x_3 – базисные. Осуществляя обратный ход, базисные неизвестные выражаем через свободное неизвестное x_4. Имеем $x_3 = 6 + 2x_4$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_1 = -8$, где $x_4 \in R$. Положим $x_4 = c$, где c – произвольное число. Таким образом, множество решений данной системы бесконечно и имеет вид

$$\{-8, 3 + c, 6 + 2c, c \,|\, \forall c \in R\}.$$

Пример 2.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \boxed{-4}\ \boxed{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right] \boxed{-\frac{1}{3}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Последней строке в полученной матрице соответствует уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$, т.е. 0 = 1. Следовательно система несовместна.

2.6. Арифметическое *n*-мерное векторное пространство

[1] , 1.1, 1.2.

Упорядоченная совокупность n действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *n-мерным вектором*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами вектора*, а число n – его *размерностью*. При этом записывают

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Пусть даны два n-мерных вектора

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ и } \overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Два n-мерных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если их соответствующие координаты равны, т.е.

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Суммой двух n-мерных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Произведением вектора $\overline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *на число k* называется вектор

$$k\overline{a}=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n).$$

Нетрудно показать, что операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ для любого $\overline{a}$, вектор $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$ называется *нулевым*.
4. $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$, вектор $-\overline{a}=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$ называется *противоположным* вектору $\overline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.
5. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ для любого $\overline{a}$.
6. $k(l\overline{a})=(kl)\overline{a}$.
7. $(k+l)\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$.
8. $k(\overline{a}+\overline{b})\overline{a}=k\overline{a}+k\overline{b}$.

Вектор $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$ называется *разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Множество всех *n*-мерных векторов с определенными на нем операциями сложения и умножения вектора на число называется *n-мерным векторным пространством*. Если координаты векторов – действительные числа, то *n*-мерное векторное пространство называется *арифметическим* и обозначается R^n.

2.7. Линейная зависимость векторов

[1], 2.1.

Пусть дана система *n*-мерных векторов

$$\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_m}. \tag{2.9}$$

Возьмем произвольные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ и составим вектор $\overline{a}=\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\ldots+\lambda_m\overline{a_m}$, который назовем *линейной комбинацией векторов* системы (2.9), а числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ – *коэффициентами линейной комбинации*.

Пример 2.6. Найти линейную комбинацию $3\overline{a_1}-2\overline{a_2}$ векторов $\overline{a_1}=(1,-2,0,1)$ и $\overline{a_2}=(4,-1,1,3)$.

Решение. Воспользовавшись определениями произведения вектора на число и суммы векторов, имеем

$$3\overline{a_1} - 2\overline{a_2} = 3 \cdot (1,-2,0,1) - 2 \cdot (4,-1,1,3) = (3,-6,0,3) + (-8,2,-2,-6) =$$
$$= (-5,-4,-2,-3).$$

Система векторов (2.9) называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов системы. В противном случае она называется *линейно независимой*.

Пример 2.7. Система векторов $\overline{a_1} = (1,2,3)$, $\overline{a_2} = (3,2,1)$, $\overline{a_3} = (4,4,4)$ линейно зависима, так как $\overline{a_3} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$.

Пример 2.8. Система векторов $\overline{a_1} = (3,2,4,-1)$, $\overline{a_2} = (6,4,8,-2)$ линейно зависима, так как $\overline{a_2} = 2\overline{a_1}$.

Два вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ называются *коллинеарными*, если существует такое число k, что $\overline{a_1} = k\overline{a_2}$. Таким образом, система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Определение линейной зависимости можно сформулировать и в другой, равносильной форме.

Система векторов (2.9) называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \ldots + \lambda_m\overline{a_m} = \overline{0}. \qquad (2.10)$$

Если равенство (2.10) возможно лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то система векторов (2.9) называется *линейно независимой*.

Пример 2.9. Выяснить будет ли линейно зависимой система векторов $\overline{a_1} = (1,1,1)$, $\overline{a_2} = (1,2,3)$, $\overline{a_3} = (1,4,4)$.

Решение. Задача сводится к выяснению того, будет ли уравнение

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \ldots + \lambda_m\overline{a_m} = \overline{0}. \qquad (2.11)$$

иметь хотя бы одной ненулевое решение.

Запишем равенство (2.11) в координатной форме

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,3) + \lambda_3(1,4,4) = (0,0,0).$$

Отсюда

$$(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2) + (\lambda_3, 4\lambda_3, 4\lambda_3) = (0,0,0)$$

или $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_2,\quad \lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3)=(0,0,0)$.
Приравнивая соответствующие координаты двух равных векторов, получим систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+\ \ \lambda_2+\ \ \lambda_3=0,\\ \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0,\\ \lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$$

Эту однородную систему решим с помощью метода Гаусса

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&4&0\\1&3&4&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&2&3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&0&-3&0\end{array}\right].$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\ \lambda_3=0,\\ \qquad\ \lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \qquad\qquad -3\lambda_3=0.\end{cases}$$

Эта система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, система векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ линейно независима.

Пример 2.10. Показать, что система векторов $\overline{a_1}=(1,-1,1,-1)$, $\overline{a_2}=(1,0,1,0)$, $\overline{a_3}=(1,-3,1,-3)$ линейна зависима и найти эту зависимость.

Решение. Решаем векторное уравнение

$$\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=\overline{0}\ . \tag{2.12}$$

В координатной записи оно равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\ \ \lambda_1+\lambda_2+\ \lambda_3=0,\\ -\lambda_1\qquad -3\lambda_3=0,\\ \ \ \lambda_1+\ \lambda_2+\lambda_3=0,\\ -\lambda_1\qquad -3\lambda_3=0,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\ \ \lambda_1+\lambda_2+\ \lambda_3=0,\\ -\lambda_1\qquad -3\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $\lambda_1=-3\lambda_3,\quad \lambda_2=2\lambda_3$, где λ_3 – свободное неизвестное.

Придавая λ_3 различные значения, не равные нулю, получаем различные ненулевые решения уравнения (2.12). Следовательно, система $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ линейно зависима. Найдем одну из зависимостей между данными векторами. Полагая $\lambda_3 = 1$, получаем $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ и соотношение (2.12) примет вид $-3\overline{a_1} + 2\overline{a_2} + \overline{a_3} = \overline{0}$.

Приведем **основные свойства** линейной зависимости.

1. Если система векторов (2.9) содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2. Если часть системы (2.9) линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Пример 2.11. Система векторов $\overline{a_1} = (1, 2, 1, 1)$, $\overline{a_2} = (2, 4, 2, 2)$, $\overline{a_3} = (0, 1, 1, 0)$ линейна зависима, так как содержит два коллинеарных вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$.

Система векторов

$$\begin{array}{l} \overline{b_1} = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1r}, \ldots, b_{1n}), \\ \overline{b_2} = (\ 0,\ b_{22}, \ldots, b_{2r}, \ldots, b_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{b_r} = (\ 0,\ \ 0, \ldots,\ b_{rr}, \ldots, b_{rn}), \end{array} \qquad (2.12)$$

где числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля, называется *диагональной* или *ступенчатой.*

3. Диагональная система векторов линейно независима.

Пример 2.12. Примером диагональной системы векторов служит система n единичных n-мерных векторов

$$
\begin{array}{l}
\overline{e_1} = (1, 0, \ldots, 0) \\
\overline{e_2} = (0, 1, \ldots, 0) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{e_n} = (0, 0, \ldots, 1)
\end{array}.
$$

По свойству 3 эта система линейно независима.

4. Любой вектор $\overline{a} \in R^n$ может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации единичных векторов.

Пример 2.13. Дан вектор $\overline{a} = (3, 1, -2, 5)$.

По свойству 4 его можно представить единственным образом в виде линейной комбинации единичных векторов с коэффициентами, равными координатам вектора $\overline{a}$, т.е. $\overline{a} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} - 2\overline{e_3} + 5\overline{e_4}$.

5. В пространстве R^n любая система, состоящая более чем из n векторов, линейно зависима.

Пример 2.14. Система векторов из R^2 $\overline{a_1} = (2, 1)$, $\overline{a_2} = (3, 2)$, $\overline{a_3} = (2, 4)$ линейна зависима, так как число векторов превосходит 2.

2.8. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по данному базису

[1], 2.2; к. р. № 1 (В – «*α*», задание № 2).

2.9. Ранг матрицы

[1], 3.8.

2.10. Операции над матрицами и их свойства

[1], 3.2.

2.11. Обратная матрица и ее вычисление

[1], 3.7; к. р. № 1 (В – «*α*», задание № 3).

2.12. Выпуклые множества. Системы линейных неравенств и *n* неизвестными

[1], 5.4, 5.5; к. р. № 1 (В – «*α*», задание № 4).

3. Математический анализ

3.1. Функции одной переменной
[1], 7.1.

3.2. Теория пределов
[1], 6.2., 6.3, 7.1; к. р. № 1 (В – «α», задание № 5).

3.3. Непрерывность функции
[1], 7.2, 7.3.

3.4. Производная
[1], 8.1 – 8.7; к. р. № 1 (В – «α», задание № 6).

3.5. Дифференциал
[1], 8.8 – 8.10.

3.6. Исследование функций и построение графиков
[1], 8.11 – 8.13; к. р. № 1 (В – «α», задание № 7 и № 8).

3.7. Функции нескольких переменных
[1], 9.1 – 9.6. К. р. № 2 (В – «α», задания № 1, № 8).

3.8. Неопределенный интеграл
[1], 10.1; 10.2.; [8]. К. р. № 2 (В – «α», задание № 2).

3.9. Определенный интеграл
[1], 10.3; 10.5 – 10.8; 1.010. [8]. К. р. № 2 (В – «α», задания № 3, № 4).

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Рассмотрим обобщение понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ на случай, когда область интегрирования является бесконечным промежутком.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$, тогда по определению

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,. \qquad (3.1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (3.1), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же этот предел не существует или равен бесконечности, то – *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx\,,$$

где *c* – любое действительное число.

Пример 3.1. Установить, при каких α несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится или расходится.

Решение. Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty\,.$$

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \acute{a}<1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \acute{a}>1. \end{cases}$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

3.10. Дифференциальные уравнения

[1], 11.1 – 11.3. К. р. № 2 (В – «*α*», задание № 5).

3.11. Ряды

[1], 12.1 – 12.3. К. р. № 2 (В – «*α*», задания № 6, № 7).

Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (3.2)$$

где $\{a_n\}$ – последовательность чисел. Каждое слагаемое называется членом ряда, a_n – n-м или общим членом. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется его n-й частичной суммой:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Ряд (3.2) называется *сходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится к числу S, которое называется *суммой* ряда, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots + = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $(a \neq 0)$, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем q, называется геометрическим рядом; он сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Необходимый признак сходимости ряда: если ряд (3.2) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 3.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{5n+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{5n+3} = \dfrac{2}{5} \neq 0$, то данный ряд расходится.

Рассмотрим ряды с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (3.3)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (3.4)$$

Первый признак сравнения: пусть выполняется неравенство $a_n \le b_n$ (для всех n или с некоторого номера $n = N$), тогда, если сходится ряд (3.4), то и сходится ряд (3.3); если расходится ряд (3.3), то расходится и ряд (3.4).

Второй признак сравнения: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = K$, $(0 < K < \infty)$, то ряды (3.3) и (3.4) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Признак Даламбера: если для ряда (3.3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Признак Коши: если для ряда (3.3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Отметим, что если по признаку Даламбера или Коши $l = 1$, то в этом случае требуется дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Интегральный признак Коши-Маклорена: пусть члены ряда (3.3) не возрастают $(a_1 \ge a_2 ... \ge a_n \ge ...)$ и существует функция $f(x)$, которая определена для $x \ge 1$, непрерывна, не возрастает и $f(n) = a_n$, $(n = 1, 2, ...)$, тогда для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

а) с помощью признака Даламбера; б) используя интегральный признак.

Решение.

а) Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{\ln n}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} = 1$, т.е. признак Даламбера не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

б) Члены данного ряда положительны и убывают; в качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ при $x\ge 2$. Эта функция непрерывна, убывает и $f(n)=\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, $(n=1, 2, ...)$. Так как

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_{2}^{b}=2\lim_{b\to+\infty}(\sqrt{\ln b}-\sqrt{\ln 2})=+\infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится, следовательно, данный ряд расходится.

Ряд $1+\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{1}{3^{\alpha}}+...+\dfrac{1}{n^{\alpha}}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ называется *обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле*. Он сходится, если $\alpha>1$ и расходится, если $\alpha\le 1$ (см. пример 3.1).

Ряд называется *знакопеременным*, если его членами являются действительные числа произвольного знака. Знакопеременный ряд

$$a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{3.5}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд

$$|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{3.6}$$

В этом случае ряд (3.5) называется *абсолютно сходящимся.* Если ряд (3.5) сходится, а ряд (3.6) расходится, то ряд (3.5) называется *условно* или *неабсолютно сходящимся*.

Знакопеременный ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется *знакочередующимся*.

Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n-1}a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \tag{3.7}$$

где $a_n>0,\ (n=1, 2, ...)$.

Признак Лейбница: если для знакочередующегося ряда (3.7) выполняются условия: $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_4\ge ...$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд сходится и его сумма $0<S\le a_1$.

Таким образом, при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой n его первых членов погрешность (ошибка) не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Пример 3.4. Исследовать, сходится абсолютно или условно или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^n+1)}{n\cdot 3^n}$.

Решение. Исследуемый ряд является знакочередующимся. Применим признак Лейбница. Так как $a_n > a_{n+1}$, $(n=1,2,...)$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{n\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{n\cdot 3^n} = 0,$$

то данный ряд сходится. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин исследуемого ряда, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n\cdot 3^n}$. Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+1)n}{n\cdot 3^n}$, так как предел отношения равен 1, то на основании второго признака сравнения заключаем, что данный ряд расходится. Получили, что ряд из абсолютных величин расходится, а знакочередующийся ряд сходится условно.

II. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задание 1.

Дан треугольник с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Требуется найти:

1) уравнение стороны BC;
2) внутренний угол B;
3) уравнение высоты AD;
4) уравнение прямой, проходящей через основание медианы AE параллельно стороне AB.

В – 1	$A\,(-3;\,2)$,	$B\,(-6;\,1)$,	$C\,(0;\,-2)$.
В – 2	$A\,(1;\,5)$,	$B\,(4;\,4)$,	$C\,(-2;\,1)$.
В – 3	$A\,(2;\,5)$,	$B\,(5;\,4)$,	$C\,(-1;\,1)$.
В – 4	$A\,(5;\,3)$,	$B\,(8;\,2)$,	$C\,(2;\,-1)$.
В – 5	$A\,(-2;\,5)$,	$B\,(-5;\,4)$,	$C\,(1;\,1)$.
В – 6	$A\,(-4;\,5)$,	$B\,(-7;\,4)$,	$C\,(-1;\,1)$.
В – 7	$A\,(3;\,5)$,	$B\,(6;\,4)$,	$C\,(0;\,1)$.
В – 8	$A\,(4;\,5)$,	$B\,(7;\,4)$,	$C\,(1;\,1)$.
В – 9	$A\,(-1;\,7)$,	$B\,(-4;\,6)$,	$C\,(2;\,3)$.
В – 10	$A\,(4;\,2)$,	$B\,(7;\,1)$,	$C\,(1;\,-2)$.
В – «α»	$A\,(1;\,7)$,	$B\,(4;\,6)$,	$C\,(-2;\,3)$.

Задание 2.

Даны четыре вектора $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\overline{d}=(d_1,d_2,d_3)$. Показать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис трехмерного векторного пространства R^3, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

В – 1	$\overline{a}=(0,1,2)$,	$\overline{b}=(3,-1,-5)$,	$\overline{c}=(2,1,1)$,	$\overline{d}=(8,0,-7)$.
В – 2	$\overline{a}=(-2,3,5)$,	$\overline{b}=(1,-3,4)$,	$\overline{c}=(7,8,-1)$,	$\overline{d}=(8,0,-7)$.
В – 3	$\overline{a}=(3,1,4)$,	$\overline{b}=(2,1,3)$,	$\overline{c}=(-1,3,1)$,	$\overline{d}=(2,-3,0)$.
В – 4	$\overline{a}=(-3,1,2)$,	$\overline{b}=(1,3,-1)$,	$\overline{c}=(2,-1,1)$,	$\overline{d}=(-5,8,5)$.
В – 5	$\overline{a}=(1,1,2)$,	$\overline{b}=(0,-3,-1)$,	$\overline{c}=(-5,-2,-6)$,	$\overline{d}=(8,-1,7)$.

В – 6 $\bar{a}=(1,2,-1)$, $\bar{b}=(1,2,3)$, $\bar{c}=(3,0,4)$, $\bar{d}=(6,6,5)$.

В – 7 $\bar{a}=(1,0,-1)$, $\bar{b}=(2,5,3)$, $\bar{c}=(-2,1,4)$, $\bar{d}=(-2,8,13)$.

В – 8 $\bar{a}=(2,1,2)$, $\bar{b}=(1,0,-3)$, $\bar{c}=(3,1,1)$, $\bar{d}=(6,1,-4)$.

В – 9 $\bar{a}=(0,1,2)$, $\bar{b}=(1,-2,1)$, $\bar{c}=(3,-1,2)$, $\bar{d}=(4,3,7)$.

В – 10 $\bar{a}=(2,-1,0)$, $\bar{b}=(2,-1,1)$, $\bar{c}=(0,1,-1)$, $\bar{d}=(4,2,-5)$.

В – «α» $\bar{a}=(1,0,2)$, $\bar{b}=(1,-2,1)$, $\bar{c}=(4,2,1)$, $\bar{d}=(7,-2,3)$.

Задание 3.
Решить матричным способом систему уравнений.

В – 1 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=-4 \end{cases}$

В – 2 $\begin{cases} 2x_1-x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-x_3=1, \\ -x_1+8x_2+3x_3=2 \end{cases}$

В – 3 $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 5x_1-x_2+5x_3=4, \\ x_1-x_2+3x_3=-2 \end{cases}$

В – 4 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=6, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=4 \end{cases}$

В – 5 $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=15 \end{cases}$

В – 6 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ -2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$

В – 7 $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=-3, \\ x_1-2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

В – 8 $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+x_2-3x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=1 \end{cases}$

В – 9 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$ **В – 10** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

В – «α» $\begin{cases} x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

Задание 4.

В торговом зале необходимо выставить для продажи товары A и B. Рабочее время продавцов не превышает T ч, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает S м^2. Рабочее время продавцов на единицу проданного товара A равно t_1 ч, товара B – t_2 ч. Площадь торгового зала на единицу проданного товара A равна S_1м^2, а товара B – S_2м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в p_1 и p_2 ден. ед. Составить систему неравенств, которым должна удовлетворять структура товарооборота, обеспечивающая прибыль не менее P ден. ед. Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов товарооборота.

Вариант	t_1	t_2	s_1	s_2	p_1	p_2	T	S	P
В – 1	0,5	0,4	0,3	0,1	30	40	320	160	12000
В – 2	0,2	0,4	0,3	0,4	40	50	310	180	20000
В – 3	0,3	0,2	0,2	0,4	60	50	330	200	30000
В – 4	0,6	0,4	0,2	0,2	70	50	360	110	35000
В – 5	0,5	0,6	0,1	0,2	40	60	300	100	24000
В – 6	0,4	0,5	0,3	0,2	50	60	400	180	30000
В – 7	0,3	0,5	0,2	0,3	60	70	375	180	42000
В – 8	0,4	0,6	0,2	0,1	50	80	360	120	40000
В – 9	0,3	0,4	0,2	0,3	50	70	300	170	35000
В – 10	0,2	0,4	0,1	0,4	80	50	280	160	40000
В– «α»	0,4	0,3	0,2	0,3	80	40	300	180	32000

Задание 5.

Не применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

В – 1 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при : а) $x_0=2$, б) $x_0=5$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 4x}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{5n+3}$.

В – 2 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ при : а) $x_0=1$, б) $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}-3)}{\sin^2 x}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n-5}$.

В – 3 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$ при : а) $x_0=5$, б) $x_0=-5$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sqrt{x+4}-2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n+3}$.

В – 4 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при : а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x(\sqrt{9+x}-3)}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+4}$.

В – 5 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при : а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$.

В – 6 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при : а) $x_0=2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{4-x}-2)}{\sin^2 2x}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

В – 7 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при : а) $x_0=0$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}$.

В – 8 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при : а) $x_0=3$, б) $x_0=-3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}$.

В – 9 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при : а) $x_0=-3$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+6}\right)^{n-3}$.

В – 10 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ при : а) $x_0=2$, б) $x_0=4$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}-3)}{\cos x-\cos^3 x}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5}$.

В – «α» 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2-5x+2}$ при : а) $x_0=4$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x(\sqrt{4+x}-2)}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-2}$.

Задание 6.

Зависимость между спросом на товар и его ценой выражается формулой $q=f(p)$, где q - спрос на товар, p - цена товара. Определить эластичность спроса относительно цены $E_p(q)$ при цене $p=p_0$.

В – 1 $q=\dfrac{p+1}{3p-2}$; $p_0=2$;

В – 2 $q=\dfrac{2p-1}{p-2}$; $p_0=3$;

В – 3 $q=\dfrac{2p+3}{3p+2}$; $p_0=1$;

В – 4 $q=\dfrac{1-2p}{2-p}$; $p_0=3$;

В – 5 $q=\dfrac{3p+2}{p-1}$; $p_0=2$;

В – 6 $q=\dfrac{5-2p}{p+2}$; $p_0=1$;

В – 7 $q=\dfrac{2p+3}{p+1}$; $p_0=2$;

В – 8 $q=\dfrac{p+2}{2p+1}$; $p_0=2$;

В – 9 $q=\dfrac{p+2}{2p-3}$; $p_0=3$;

В – 10 $q=\dfrac{1-3p}{1-2p}$; $p_0=1$;

В – «α» $q=\dfrac{5p+2}{p-1}$; $p_0=2$;

Задание 7.

Исследовать функцию и построить ее график.

В – 1 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

В – 6 $y=\dfrac{2}{x^2-4}$;

В – 2 $y = \frac{e^x}{x}$;

В – 3 $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$;

В – 4 $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;

В – 5 $y = \frac{1}{1 - x^2}$;

В – 7 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

В – 8 $y = \frac{2x}{1 + x^2}$;

В – 9 $y = e^{-x^2}$;

В – 10 $y = xe^{-x}$;

В – «α» $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Задание 8.

В – 1. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

В – 2. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр задан. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

В – 3. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

В – 4. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать брус прямоугольного сечения так, чтобы получилось наименьшее количество отходов.

В – 5. Лодка находится на расстоянии 3км от ближайшей точки берега A. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу, на расстоянии 5 км от A. Лодка проплывает по 4 км в час, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села *B* в кратчайшее время?

В – 6. Судно *B*, находящееся на расстоянии 75 км к востоку от судна *A*, идет на запад со скоростью 12 км в час; судно *A* идет к югу со скоростью 9 км в час. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

В – 7. Чтобы оградить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора, имеется кусок проволоки длиной 20 м. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

В – 8. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

В – 9. Консервная банка данного объема *V* имеет форму цилиндра. Каким должно быть соотношение ее размеров (высоты и диаметра), чтобы на ее изготовление пошло минимальное количество жести?

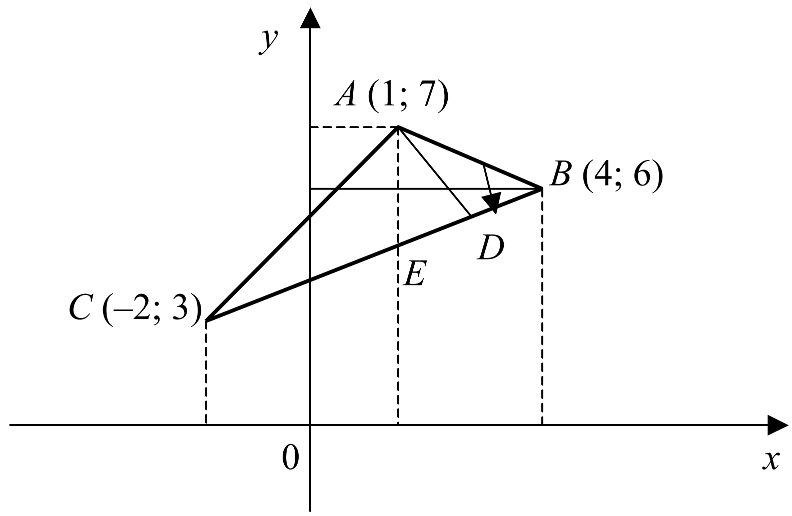
В – 10. Определить отношение высоты конического шатра к радиусу основания при условии, что его боковая поверхность наименьшая при заданной вместимости.

В – «α». Найти наибольший объем цистерны, имеющей форму цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 1

Решение варианта «α»

Задание 1. Построим треугольник ABC в системе координат $x0y$:



1. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Подставляя в уравнение вместо x_1, y_1 координаты точки B, а вместо x_2, y_2 координаты точки C, получаем уравнение стороны BC:

$$\frac{y-6}{3-6}=\frac{x-4}{-2-4}\Rightarrow\frac{y-6}{-3}=\frac{x-4}{-6}\Rightarrow y-6=\frac{x-4}{2}\Rightarrow 2(y-6)=x-4\Rightarrow$$

$$x-2y+8=0 \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{2}x+4 \quad \left(k_{BC}=\frac{1}{2}\right).$$

2. Для нахождения внутреннего угла B треугольника воспользуемся формулой

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1},$$

где φ – угол, полученный вращением против часовой стрелки прямой с угловым коэффициентом k_1 до совмещения с прямой с угловым коэффициентом k_2.

В нашем случае $k_2 = k_{BC} = \frac{1}{2}$, $k_1 = k_{AB}$. Угловой коэффициент прямой *AB* определим по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$k_{AB} = \frac{6-7}{4-1} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$tg\angle B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\angle B = arctg1, \text{ т.е. } \angle B = 45^0.$$

3. Для нахождения уравнения высоты *AD* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Так как $AD \perp BC$, то из условия перпендикулярности двух прямых имеем:

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Учитывая, что высота *AD* проходит через точку *A* (1; 7), получаем уравнение *AD*:

$$y - 7 = -2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 9 = 0.$$

4. Так как *AE* – медиана, то точка *E* – середина отрезка *BC*. Координаты точки *E* определим по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$:

$$x = \frac{4-2}{2} = 1, \quad y = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad E\left(1; \frac{9}{2}\right).$$

Искомая прямая проходит через точку $E\left(1; \frac{9}{2}\right)$ и параллельна AB. Угловой коэффициент к искомой прямой определим из условия параллельности двух прямых:

$$k = k_{AB} = -\frac{1}{3}.$$

Воспользовавшись уравнением $y - y_1 = k(x - x_1)$, получим

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{1}{3}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 2x - 6y - 29 = 0.$$

Ответ: 1) $x - 2y + 8 = 0$; 2) 45^0;

3) $2x + y - 9 = 0$;4) $2x - 6y - 29 = 0$.

Задание 2. Составим определитель из координат векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и вычислим его по правилу Саррюса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 4 + 16 - 2 + 0 = 20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независима. Следовательно, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис пространства R^3 и вектор $\overline{d}$ единственным образом разлагается по векторам этого базиса

$\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c}$ или

$$\lambda_1 (1, 0, 2) + \lambda_2 (1, -2, 1) + \lambda_3 (4, 2, -1) = (7, -2, 3)$$

Приравнивая соответствующие координаты двух равных векторов, получаем следующую систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 7, \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений решим методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right)$$

Соответствующая диагональная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 7, \\ \qquad \lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ \qquad -10\lambda_3 = -10. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$.

Таким образом, $\lambda = \overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c}$, т.е. вектор $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ имеет координаты 1, 2, 1.

Ответ: (1, 2, 1).

Задание 3. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Она невырожденная, так как соответствующий ей определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, решение системы может быть найдено по формуле $X = A^{-1}B$, где X – матрица, состоящая из неизвестных, B – матрица, состоящая из свободных членов, A^{-1} – обратная матрица для матрицы A. Обратную матрицу A^{-1} найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определим алгебраические дополнения A_{ik} элементов данной матрицы. Получим

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В данном случае матричное равенство $X = A^{-1}B$ может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

откуда

$$x_1 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 3,$$
$$x_2 = -3 \cdot 2 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 2,$$
$$x_3 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 1.$$

Ответ: (3, 2, 1)

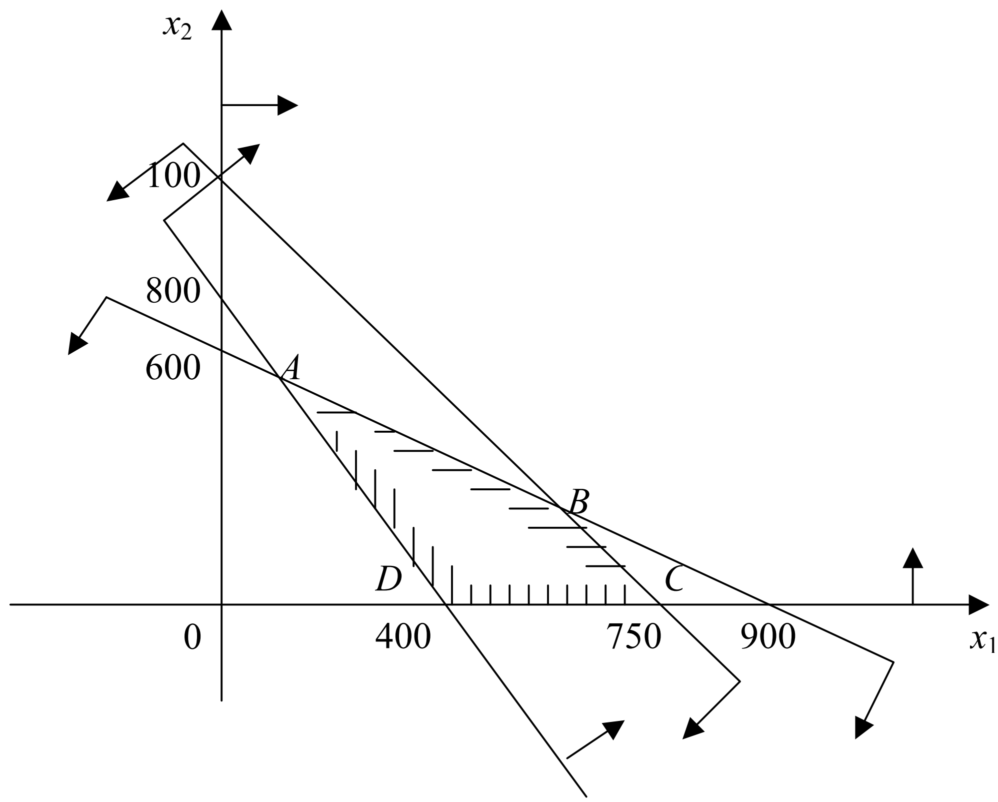
Задание 4. Пусть x_1 – количество единиц проданного товара A, а x_2 – количество единиц проданного товара B. Система неравенств, удовлетворяющая ограничениям задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \le 300, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \le 180, \\ 80x_1 + 40x_2 \ge 32000, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 3000, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 1800, \\ 2x_1 + x_2 \ge 800, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Заменим знаки неравенств на знаки равенств, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 3000, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1800, \\ 2x_1 + x_2 = 800, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Построим граничную прямую $4x_1 + 3x_2 = 3000$. Она делит плоскость $x_1\,0\,x_2$ на две полуплоскости. Та из них, которая содержит начало координат, и есть область решений неравенства $4x_1 + 3x_2 \le 3000$, так как координаты точки O (0, 0) удовлетворяют данному неравенству $(4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 3000)$. Аналогично построим граничные прямые, соответствующие остальным неравенствам системы. Стрелками укажем полуплоскости, являющиеся областями решений данных неравенств.



Пересечение отмеченных полуплоскостей – многоугольник $ABCD$ является искомой областью допустимых вариантов товарооборота.

Задание 5.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 5x + 2}$.

а) $x_0 = 4$. Данная функция элементарная и точка 4 принадлежит ее области определения, следовательно, предел функции в точке 4 равен ее значению в этой точке (по теореме о пределе элементарной функции):

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 8}{2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 2} = \frac{32}{14} = \frac{16}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{16}{7}$.

б) $x_0 = 2$. Теорему о пределе элементарной функции здесь применить нельзя, так как в точке 2 знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль. Имеем неопределенность вида $0/0$. Так как при

$x = 2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то многочлены $3x^2 - 2x - 8$ и $2x^2 - 5x + 2$ делятся без остатка на $x - 2$ (в силу известного из алгебры следствия из теоремы Безу).

Выполним это деление, предварительно разложив числитель и знаменатель на множители. Получим

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3\left(x + \frac{4}{3}\right)(x-2)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{2x-1} = \frac{3\cdot 2 + 4}{2\cdot 2 - 1} = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

в) $x_0 = \infty$. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень x (в данном случае на x^2), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2/x - 8/x^2}{2 - 5/x + 2/x^2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 6x}{x\left(\sqrt{4+x} - 2\right)}$. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, т.е. мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, избавимся от иррациональности в знаменателе, умножив числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{4+x} + 2\right)$, числитель преобразуем по формуле $1 - \cos 6x = 2\sin^2 3x$ и воспользуемся известным пределом $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 6x}{x\left(\sqrt{4+x} - 2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 3x(\sqrt{4+x} + 2)}{x(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x(\sqrt{4+x}+2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}(\sqrt{4+x}+2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=$$

$$=8\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9=72\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=72\cdot 1^2=72.$$

Ответ: 72.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-2}$. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Выражение, стоящее под знаком предела, преобразуем к такому виду, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{2n+3}-1\right)^{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{3n-2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2n+3}(3n-2)}=e^{-6},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-4}}=e \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{-4(3n-2)}{2n+3}=-6$$

Ответ: -6.

Задание 6. Эластичность спроса относительно цены $E_p(q)$ определяется по формуле $E_p(q)=\dfrac{p}{q}q'(p)$. Рассмотрим функцию $q=\dfrac{5p+2}{p-1}$. Найдем производную

$$q'(p)=\frac{5(p-1)-(5p+2)}{(p-1)^2}=\frac{5p-5-5p-2}{(p-1)^2}=-\frac{7}{(p-1)^2}.$$

Тогда $E_p(q)=-\dfrac{p(p-1)}{(5p+2)}\cdot\dfrac{7}{(p-1)^2}=-\dfrac{7p}{(5p+2)(p-1)}$.

При $p=2$ получаем $E_2(p)=-\dfrac{14}{12}=-\dfrac{7}{6}\approx -1{,}17\%$. Это означает, что если цена возрастет на 1 % (от 2 до 2,01), то спрос на товар уменьшится приблизительно на 1,17 %.

Задание 7. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Исследование функции проводим по следующей схеме:

1. Находим область определения функции.

Функция не определена лишь в точке $x = 1$, в которой знаменатель обращается в нуль. Следовательно, $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x-1)^2}=-\frac{-x}{(x+1)^2} \quad и \quad f(-x)\neq f(x),\;\; f(-x)\neq -f(x).$$

3. Исследуем функцию на непрерывность и определим вертикальные асимптоты.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 1$. Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = 1$, причем

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty.$ Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции при $x\to 1-0$ *и* $x\to 1+0$. В каждой точке области определения функция непрерывна как элементарная.

4. Находим точки пересечения кривой с осями координат. Кривая проходит через начало координат, так как $y = 0$ при $x = 0$. Других точек пересечения с осями координат нет.

5. Определим точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Находим производную данной функции

$$y'=\frac{(x-1)^2-2x(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(x-1-2x)}{(x-1)^4}=-\frac{(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Решаем уравнение $y'=0$, т.е.

$$-\frac{x+1}{(x-1)^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1.$$

Таким образом, $x = -1$ — критическая точка первого рода. Производная не определена в точке $x = 1$. Однако, эта точка не является критической, так как в ней не определена и сама функция.

Найденная критическая точка $x = -1$ разбивает область определения функции на три интервала: $(-\infty,-1), (-1,1)$ *и* $(1,+\infty)$.

Исследуем знак y' на каждом из этих интервалов. Результаты исследования пометим в табл. 1.

Таблица 1

x	$(-\infty, 1)$	-1	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\searrow$
		min		

Из табл. 1 следует, что функция в интервалах $(-\infty, -1)$ *и* $(1, +\infty)$ убывает, так как $y' < 0$; в интервале $(-1, 1)$ возрастает, так как $y' > 0$.

При переходе через критическую точку первого рода $x = -1$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет минимум, равный $f(-1) = -\dfrac{1}{4}$.

6. Определяем точки перегиба и интервалы выпуклости, вогнутости. Находим вторую производную:

$$y'' = \left(-\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' = -\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} =$$

$$= -\frac{(x-1)^2(x-1-3x-3)}{(x-1)^6} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Решаем уравнение $y'' = 0$, т.е.

$$\frac{2(x+2)}{(x-1)^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Итак, $x = -2$ – критическая точка второго рода. Других критических точек нет.

Найденная критическая точка $x = -2$ разбивает область определения на следующие интервалы: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, +\infty)$.

Определим знак y'' на каждом из этих интервалов. Результаты поместим в табл. 2.

Таблица 2

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$
y	Выпукла $\cap$	$-\frac{2}{9}$	Вогнута $\cup$	Вогнута $\cup$
		перегиб		

Из табл. 2 видно, что в интервале $(-\infty, -2)$ кривая выпукла, так как $y'' < 0$; а в интервалах $(-2, 1)$ и $(1, +\infty)$ – вогнута, так как $y'' > 0$.

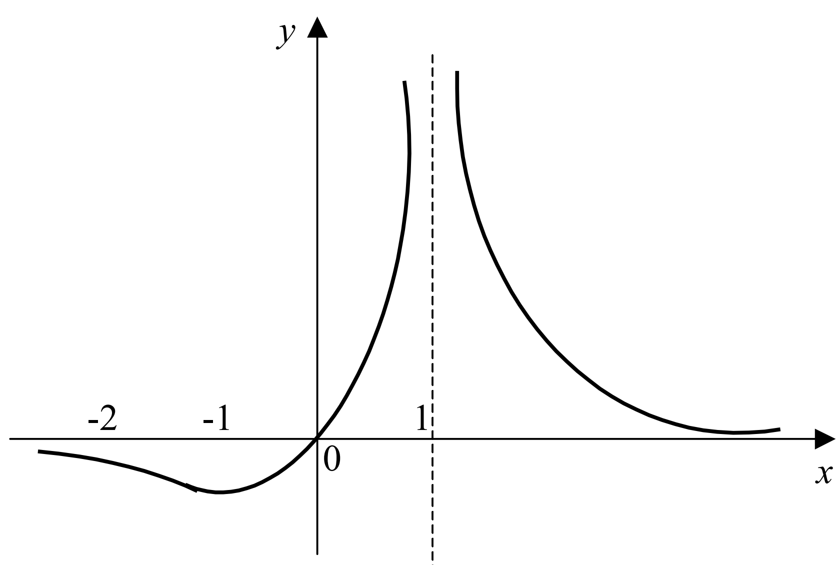
При переходе через критическую точку второго рода $x = -2$ слева направо вторая производная меняет знак. Следовательно, точка $x = -2$ является точкой перегиба, причем $f(-2) = -\frac{2}{9}$.

7. Определяем горизонтальные асимптоты. Так как

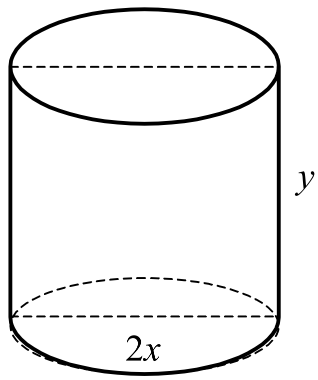
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

то прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Построим график функции



Задание 8. Обозначим через x радиус основания цилиндра, а через y высоту цилиндра. Тогда объем цилиндра будет равен $V = \pi x^2 y$



Получим функцию двух переменных x и y. Эту функцию легко преобразовать в функцию одной переменной. По условию задачи периметр осевого сечения цилиндра равен a, т.е. $4x + 2y = a$. Отсюда $y = \dfrac{a-4x}{2}$. Следовательно

$$V = \pi x^2 \frac{a-4x}{2} = \frac{\pi}{2} x^2 (a-4x).$$

Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0, \end{cases} \text{ т.е. } \quad \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{a-4x}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < x < \frac{a}{4}$$

Итак, требуется найти наибольшее значение функции $V = \dfrac{\pi}{2} x^2 (a-4x)$ на интервале $\left(0, \dfrac{a}{4}\right)$. Найдем стационарные точки данной функции, содержащейся в рассматриваемом интервале. Вычислим $V' = \dfrac{\pi}{2}(2ax - 12x^2)$ и решим уравнение $V' = 0$, т.е.

$$\pi x(a-6x) = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ или $x = \dfrac{a}{6}$. На интервале $\left(0, \dfrac{a}{4}\right)$ рассматриваемая функция имеет лишь одну стационарную точку $x = \dfrac{a}{6}$. Исследуем стационарную точку $x = \frac{a}{6}$ на экстремум с помощью второго достаточного условия экстремума. Найдем вторую производную:

$$V'' = \pi(a - 12x).$$

Так как $V''\left(\frac{a}{6}\right) = -\pi a < 0$, то в точке $x = \frac{a}{6}$ рассматриваемая функция имеет максимум. Он равен

$$V = \left(\frac{a}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{6}\right)^2\left(a - 4\frac{a}{6}\right) = \frac{\pi a^3}{216}.$$

Так как рассматриваемая функция непрерывна на интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ и на этом интервале имеет лишь один экстремум, который является максимумом, то этот экстремум является и наибольшим значением рассматриваемой функции на интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi a^3}{216}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 1.

Зависимость производства национального дохода Z от объемов использования основных производственных факторов – рабочей силы x и производственных фондов y можно описать функцией $Z = f(x, y)$. Изменение значения функции национального дохода при малом изменении ее аргументов приближенно выражается полным дифференциалом

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Найти полный дифференциал функции.

В – 1	$Z = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$	при $x = 3$,	$y = 2$;
В – 2	$Z = 3x^2y^2 + 4xy^3 - 7x^2$	при $x = 2$,	$y = 3$;
В – 3	$Z = (x^2 + y)e^{xy}$	при $x = 1$,	$y = 1$;

В – 4	$Z=\sqrt{3x^2+y^2}$	при $x=2$,	$y=2$;
В – 5	$Z=6\sqrt[3]{1+4xy+x^2+y^3}$	при $x=2$,	$y=1$;
В – 6	$Z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	при $x=1$,	$y=2$;
В – 7	$Z=\dfrac{2xy}{x^2+y}$	при $x=1$,	$y=2$;
В – 8	$Z=3\sqrt[3]{x^2}y+2\sqrt{xy}$	при $x=1$,	$y=1$;
В – 9	$Z=2\sqrt{x}\cdot y^3+6\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$	при $x=4$,	$y=1$;
В – 10	$Z=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$	при $x=2$,	$y=2$;
В – «α»	$Z=x^4-3x^2y^2+5xy^3+y^4$	при $x=2$,	$y=1$.

Задание 2.

Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а) и б) проверить дифференцированием).

В – 1 а) $\int (2-5\sin x)^{1/3}\cos x\,dx$; б) $\int xe^{2x}dx$;

в) $\int \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; г) $\int sin^3 5x\,dx$;

В – 2 а) $\int \dfrac{e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$;

в) $\int \dfrac{2x-5}{4x^2-4x+17}dx$; г) $\int \sqrt{\cos x}\sin^3 x\,dx$;

В – 3 а) $\int x^2 e^{2x^3} dx$; б) $\int x\, tg^2 x\, dx$;

в) $\int \dfrac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$; г) $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos^3 x\, dx$;

В – 4 а) $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx$; б) $\int \dfrac{\ln(x+2)}{x+2} dx$;

в) $\int \dfrac{3x-1}{\sqrt{2x^2+2x+1}} dx$; г) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$;

В – 5 а) $\int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x} dx$; б) $\int x\, arctgx\, dx$;

в) $\int \dfrac{5x+8}{6x^2+x-2} dx$; г) $\int \sin^4 x\, dx$;

В – 6 а) $\int \dfrac{e^x dx}{4+e^{2x}}$; б) $\int (x^2-2x+1)\ln x\, dx$;

в) $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{2+4x-x^2}} dx$; г) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

В – 7 а) $\int \sin(\ln x)\dfrac{dx}{x}$; б) $\int \arccos x\, dx$;

в) $\int \dfrac{x+5}{2x^2+2x+3} dx$; г) $\int \sin^2 5x\, dx$.

В – 8 а) $\int x7^{-x^2}dx$; б) $\int x^2e^{3x}dx$;

в) $\int \frac{8x-1}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$; г) $\int \cos^2 3x\,dx$.

В – 9 а) $\int \frac{4^{arctgx}}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

в) $\int \frac{x+3}{3+4x-4x^2}dx$; г) $\int \cos^4\frac{x}{2}dx$.

В – 10 а) $\int \frac{x^3dx}{x^8+1}$; б) $\int (x-3)\sin 2x\,dx$;

в) $\int \frac{x-8}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx$; г) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

В – «α» а) $\int (3-4\cos x)^{1/3}\sin x\,dx$; б) $\int xe^{-x}dx$;

в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx$; г) $\int \cos^2 3x\,dx$;

Задание 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями. Сделать чертеж.

В – 1 $y^2=9x$, $y - x - 2 = 0$.

В – 2 $y^2=2x+1$, $x-y - 1 = 0$.

В – 3 $y=x^2+1$, $x + y = 3$.

В – 4 $y^2=4x$, $x^2=4y$.

В – 5 $y = x^2 - 6x + 7$, $y - x - 1 = 0$.

В – 6 $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

В – 7 $y = x^2 + 2$, $y - x - 2 = 0$.

В – 8 $y = -x^2 - 6x - 5$, $y - x - 1 = 0$.

В – 9 $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = x - 5$.

В – 10 $y = 4x$, $x^2 = 4y$

В – «α» $y = -x^2 + 4x + 1$, $y - x - 1 = 0$.

Задание 4.

Пусть известна непрерывная функция *f(x)*, которая характеризует изменение производительности труда от времени x рабочего некоторого предприятия. Определить объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от x_1 до x_2.

В – 1 $f(x) = 10 + 2\sin^2 \pi x$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

В – 2 $f(x) = 42\left(1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

В – 3 $f(x) = 13\cos^2 \dfrac{\pi}{4}(x - 2)$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

В – 4 $f(x) = 31 \cdot e^{\frac{x}{2}}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

В – 5 $f(x) = 40 \cdot 2^{-\frac{x}{3}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

В – «α_1» $f(x) = \sqrt{2x + 5}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 10$.

Найти среднее значение издержек $K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от x_1 до x_2.

В – 6 $K(x) = 3^x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

В – 7 $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

В – 8 $K(x) = e^x + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

В – 9 $K(x) = 2x^2 + 3x + 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

В – 10 $K(x) = 2^{x+1} + 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

В – «α_2» $K(x) = 6x^2 + 2x + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

В – 1	$y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x,$	$x_0 = e,$	$y_0 = e^2/2.$
В – 2	$y' + 3y\,tg3x = \sin 6x,$	$x_0 = 0,$	$y_0 = 1/3.$
В – 3	$y' - 2y = e^x - x,$	$x_0 = 0,$	$y_0 = 1/4.$
В – 4	$y'\sin x - y\cos x = 1,$	$x_0 = \pi/2,$	$y_0 = 0.$
В – 5	$xy' + y + xe^{-x^2} = 0,$	$x_0 = 1,$	$y_0 = 1/2e.$
В – 6	$y' - yctgx = e^x\sin x,$	$x_0 = \pi/2,$	$y_0 = 1.$
В – 7	$y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,$	$x_0 = 0,$	$y_0 = 0.$
В – 8	$(x^2+1)y' + 4xy = 3,$	$x_0 = 0,$	$y_0 = 0.$
В – 9	$y' + y\cos x = \cos x,$	$x_0 = 0,$	$y_0 = 3.$
В – 10	$(x^2+1)y' - 2xy = x^2 + 1,$	$x_0 = 1,$	$y_0 = \pi.$
В – «α»	$y' + y\,tgx - \dfrac{1}{\cos x} = 0,$	$x_0 = \pi,$	$y_0 = 1.$

Задание 6.

Найти интервал и область сходимости степенного ряда.

В – 1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}};$	В – 2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\sqrt{n+1}};$
В – 3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(3n-1)3^n};$	В – 4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{n^4};$
В – 5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n \cdot x^n}{\sqrt{n}};$	В – 6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 3^{n-1}};$
В – 7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2n+3};$	В – 8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x+1)^n}{\sqrt{n+1}};$

В – 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n}\, x^n}{4^n}$; В – 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{5n+2}$;

В – «α» $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$;

Задание 7.

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно его интегрируя.

В – 1 $\int_0^{0,2} \frac{\sin 5x}{x}\, dx$; В – 2 $\int_0^{1} x^3 \cos x\, dx$;

В – 3 $\int_0^{0,4} e^{-1,7x^2}\, dx$; В – 4 $\int_0^{1} \sqrt[3]{x} \cos x\, dx$;

В – 5 $\int_0^{0,8} \frac{\sin 1,25x}{x}\, dx$; В – 6 $\int_0^{0,5} e^{-0,9x^2}\, dx$;

В – 7 $\int_0^{0,4} \sqrt{x}\, e^{-0,25x}\, dx$; В – 8 $\int_0^{1} \cos\sqrt{x}\, dx$;

В – 9 $\int_0^{0,6} e^{-0,4x^2}\, dx$; В – 10 $\int_0^{1} x^2 \sin x\, dx$;

В – «α» $\int_0^{1} \frac{\sin x^2}{x^2}\, dx$;

Задание 8.

Данные о выпуске продукции y (млн. руб.) на 11 предприятиях за 5 лет приведены в таблицах. Предполагая, что x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти методом наименьших квадратов параметры этой зависимости и определить прогноз на 6-й год.

В – 1

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	0,8	0,3	2,3	3,8	2,8

В – 2

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	2	1,5	3,5	5	4

В – 3

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	1,2	0,7	2,7	4,2	3,2

В – 4

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	1,4	0,9	2,9	4,4	3,4

В – 5

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	2,1	1,6	3,6	5,1	4,1

В – 6

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	1,8	1,3	3,3	4,8	3,8

В – 7

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	2,6	2,1	4,1	5,6	4,6

В – 8

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	2,8	2,3	4,3	5,8	4,8

В – 9

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	1,6	1,1	3,1	4,6	3,6

В – 10

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	2,4	1,9	3,9	5,4	4,4

В – «α»

Год, x	1 – й	2 – й	3 – й	4 – й	5 – й
Млн. р., y	1	0,5	2,5	4	3

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 2

Решение варианта « α »

Задание 1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 3x^2y^2 + 5xy^3 + y^4)'_x = 4x^3 - 6xy^2 + 5y^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 3x^2y^2 + 5xy^3 + y^4)'_y = -6x^2y + 15xy^2 + 4y^3.$$

Вычислим значения этих производных при $x = 2$, $y = 1$.

$$\frac{\partial z(2,1)}{\partial x} = 4\cdot 2^3 - 6\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 25,$$

$$\frac{\partial z(2,1)}{\partial y} = -6\cdot 2^2\cdot 1 + 15\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 10.$$

Таким образом, по формуле $dy(x,y) = \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}dy$. Получим $dz = 25dx + 10dy$.

Ответ: $25dx + 10dy$.

Задание 2.

а) сделаем замену $3 - 4\cos x = t$, тогда $(3 - 4\cos x)'dx = dt$,

$4\sin x\, dx = dt$, $\sin x\, dx = \dfrac{1}{4}\, dt$ и

$$\int (3 - 4\cos x)^{1/3}\sin x\, dx = \int t^{1/3}\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}t^{4/3}\cdot\frac{3}{4} + c = \frac{3}{16}(3 - 4\cos x)^{4/3} + c.$$

Для проверки полученного результата убедимся в том, что производная от полученного выражения равна подынтегральной функции

$$\left(\frac{3}{16}(3 - 4\cos x)^{4/3} + c\right)' = \frac{3}{16}\cdot\frac{4}{3}(3 - 4\cos x)^{1/3}\cdot 4\sin x =$$

$$= (3 - 4\cos x)^{1/3}\cdot\sin x,$$

т.е. получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден верно.

Ответ: $\dfrac{3}{16}(3 - 4\cos x)^{4/3} + c$.

б) используем формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Пусть $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$. Поэтому

$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$. Проверка:

$$\left(-e^{-x}(x+1)+c\right)' = \left(-e^{-x}\right)'(x+1) - e^{-x}(x+1)' = e^{-x}(x+1) - e^{-x} = xe^{-x},$$

т.е. производная от полученного выражения равна подынтегральной функции.

Ответ: $-e^{-x}(x+1) + c.$

в) выделим полный квадрат квадратного трехчлена:

$$4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) =$$

$$4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4.$$

Положим $\quad x + \frac{1}{2} = t, \quad x = t - \frac{1}{2}, \quad dx = dt.$

Тогда $\quad \int \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx = \int \frac{2x+1}{\sqrt{4(x+1/2)^2 - 4}}dx = \int \frac{2t}{\sqrt{4t^2-4}}dt =$

$=$ (сделаем замену: $4t^2 - 4 = z$, тогда $8tdt = dz$ и $2tdt = \frac{1}{4}dz$) $=$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4}\int z^{-1/2}dz = \frac{1}{2}z^{1/2} + c = \frac{1}{2}\sqrt{4t^2-4} + c = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x-3} + c.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + c.$

г) воспользуемся формулой понижения степени:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, *т.е.* $\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$. *Тогда* $\int \cos^2 3x\, dx =$

$$\int \frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c.$$

Ответ: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c.$

Примечание: интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m и n положительные четные числа (или одно из них – нуль) вычисляются с помощью формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2};$$

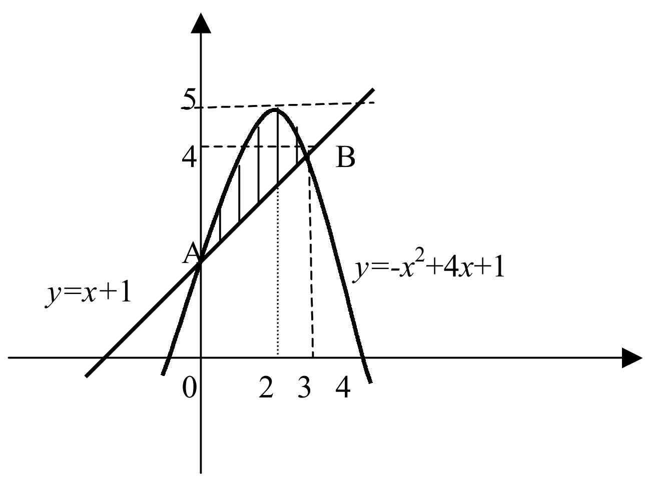
если же m – нечетное число, то вычисляются с помощью подстановки $\cos x = t$; если n – нечетное, то подстановка $\sin x = t$.

Задание 3.

Найдем точки пересечения параболы $y = -x^2 + 4x + 1$ и прямой $y = x + 1$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + 1 = -x^2 + 4x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = x + 1. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, а точки пересечения $A(0;\ 1)$, $B(3;\ 4)$. Построим чертеж и найдем пределы интегрирования.



Так как $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $\varphi(x) = x + 1$, то искомая площадь равна:

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx=\int_0^3(-x^2+4x+1-(x+1))dx=\int_0^3(-x^2+3x)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5\,(\textit{кв. ед.}).$$

Ответ: 4,5 кв. ед.

Задание 4.

I. Количество (объем) L продукции, произведенной рабочим за время от x_1 часа смены до x_2 часа, выражается определенным интегралом $L=\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)* непрерывная функция, которая характеризует изменение производительности от времени *x*. Если $f(x)=\sqrt{2x+5},\ x_1=2,\quad x_2=10$, то

$$L=\int_2^{10}\sqrt{2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+5)^{3/2}\Bigg|_2^{10}=\frac{1}{3}(2x+5)^{3/2}\Bigg|_2^{10}=\frac{1}{3}(125+27)\approx 50{,}67.$$

Таким образом, за указанный промежуток времени рабочим будет произведено 50,67 единиц продукции.

Ответ: 50,67.

II. Если объем продукции изменяется от x_1 до x_2, то среднее значение издержек производства $K(x)$ выражается формулой

$$K(c)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}K(x)dx\,.$$

Если $f(x)=6x^2+2x+1,\quad x_1=1,\quad x_2=3$, то

$$K(c)=\frac{1}{3-1}\int_1^3(6x^2+2x+1)dx=\frac{1}{2}(2x^3+x^2+x)\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{2}(54+9+3-2-1-1)=31,$$

т.е. среднее значение издержек равно 31 денежной единице.

Ответ: 31.

Задача 5.

Данное уравнение является линейным, поэтому полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + uv\,tgx = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{или}$$

$$u'v + (v' + v\,tgx)u = \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

В качестве функции v возьмем частное решение уравнения $v' + v\,tgx = 0$, обращающее в нуль коэффициент при u в уравнении (1). Тогда из (1) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' + v\,tgx = 0 \\ u'v = 1/\cos x. \end{cases} \qquad (2)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2), находим функцию v:

$$v' + v\,tgx = 0, \qquad \frac{dv}{v} + tgx\,dx = 0, \qquad \int \frac{dv}{v} + \int tgx\,dx = c.$$

В этом и только в этом случае полагаем $c = 0$. Тогда

$$\ln|v| - \ln|\cos x| = 0, \quad v = \cos x.$$

Интегрируем второе уравнение системы (2):

$$u'v = \frac{1}{\cos x}, \quad u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}, \quad u' = \frac{1}{\cos^2 x}, \; u = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + c, \; u = tgx + c.$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = u \cdot v = (tgx + c)\cos x \qquad (3)$$

Из (3) найдем c, полагая $x = \pi$, $y = 1$: $1 = (tg\pi + c)\cos\pi$, отсюда $c = -1$. Подставляя значение $c = -1$ в общее решение (3), получим частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию:

$$y = (tgx - 1)\cos x = \sin x - \cos x.$$

Ответ: $y = (tgx + c)\cos x$; $y = \sin x - \cos x$.

Задание 6.

Полагая $x + 2 = y$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(5^n+1)} \tag{4}$$

Найдем радиус сходимости этого ряда. Так как $a_n = \dfrac{1}{n(5^n+1)}$,

$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(5^{n+1}+1)}$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{n(5^n+1)} = 5$.

Следовательно, (- 5; 5) – интервал сходимости полученного ряда (4).

Исследуем сходимость ряда (4) на концах интервала сходимости, т.е. при $y = -5$ и $y = 5$. При $y = -5$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n(5^n+1)}.$$

Это знакочередующийся ряд, члены которого убывают по абсолютной величине при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n(5^n+1)} = 0$. По признаку Лейбница этот ряд сходится. При $y = 5$ получим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n+1)}.$$

Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. По второму признаку сравнения $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5^n}{n(5^n+1)} : \dfrac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$. Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n(5^n+1)}$ расходится.

Таким образом, областью сходимости ряда (4) является промежуток [-5; 5). Заменив переменную y переменной x, получим $-5 \le x+2 < 5$, $-7 \le x < 3$, т.е. [-7; 3) – область сходимости данного ряда.

Ответ: (-7; 3), [-7; 3).

Задание 7.

Разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Подставив x^2 вместо x, получим

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^5}{5\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 7!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} + \ldots.$$

Так как $\dfrac{1}{9\cdot 5!} = \dfrac{1}{1080} < \dfrac{1}{1000}$, то по признаку Лейбница, чтобы выполнить заданную точность, достаточно взять сумму первых двух членов. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0{,}9667.$$

Ответ: 0,9667.

Задание 8.

Для нахождения коэффициентов a и b линейной зависимости $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов составим нормальную систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \ . \end{cases}$$

Для этого необходимые результаты вычислений занесем в таблицу

i	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
1	1	1	1	1
2	2	0,5	1	4
3	3	2,5	7,5	9
4	4	4	16	16
5	5	3	15	25
$\sum$	15	11	40,5	55

В последней строке таблицы записаны коэффициенты нормальной системы уравнений, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} 55a + 15b = 40{,}5 \\ 15a + 5b = 11. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем a = 0,75, b = -0,05. Следовательно, зависимость между величинами x и y выражается формулой

$$y = 0{,}75x - 0{,}05.$$

Подставляем в полученную формулу $x = 6$, получаем

$$y(6) = 0{,}75 \cdot 6 - 0{,}05 = 4{,}45.$$

Это и есть искомое прогнозируемое значение.

Ответ: $y = 0{,}75x - 0{,}05$; 4,45.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Студент должен выполнить две контрольные работы №1 и №2, строго придерживаясь указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не допускаются к собеседованию и возвращаются студенту для доработки.

1. Студент должен выполнять контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки. Контрольные работы, выполненные не по своему варианту, к собеседованию не допускаются.
2. Контрольные работы следует выполнять каждую в отдельной тетради чернилами любого цвета кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. В заголовке должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента в родительном падеже, номер зачетной книжки (шифр), специальность, номер группы, факультет и номер выполняемой кон-

трольной работы. Заголовок работы надо поместить на обложке тетради; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес студента.

4. Решения задач располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условия задач, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.
7. В конце выполненной контрольной работы следует указать использованную литературу.
8. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты и вернуть ее на повторное рецензирование. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

Содержание