МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

Л.С.Барковская, Л.В.Станишевская, Ю.Н.Черторицкий

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Контрольные задания и методические рекомендации

МИНСК 2005

Р е ц е н з е н т *В.И.Лузин* старший преподаватель

Р е к о м е н д о в а н о кафедрой высшей математики

У т в е р ж д е н о Редакционно-издательским советом университета

Введение

Для овладения курсом теории вероятностей и математической статистики после прослушивания лекций и составления конспекта работу следует организовать следующим образом.

Изучить указанную литературу с учетом содержания самостоятельной работы. Результаты этой работы записать в тетрадь. Здесь же необходимо привести решения типовых задач. Если после тщательного изучения темы по учебнику с использованием методических рекомендаций и других пособий останутся невыясненные вопросы, следует обратиться за консультацией (устной или письменной) на кафедру высшей математики.

Для студентов-заочников возможны письменные консультации. Перед экзаменом студенту необходимо повторить весь курс по составленному конспекту и ознакомиться с отрецензированной контрольной работой.

Содержание самостоятельной работы

1. Случайные события и их классификация [8, с. 5 – 8].
2. Классическое определение вероятности [8, с. 8 – 9].
3. Статистическое определение вероятности [8, с. 10 – 11].
4. Аксиоматическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности [8, с. 11 – 13, с. 5 – 24].
5. Теорема сложения вероятностей [8, с. 9 – 10].
6. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей [8, с. 13 – 16].
7. Формула полной вероятности. Формула Байеса [8, с. 16 – 17].
8. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли [8, с. 51 – 52].
9. Наивероятнейшее число наступления события [8, с. 53 – 54].
10. Локальная теорема Лапласа [8, с. 55 – 56].
11. Теорема Пуассона. Простейший поток событий [8, с. 56 – 57].

12. Интегральная теорема Лапласа [8, с. 86 – 88].
13. Функция распределения случайной величины и ее свойства [8, с. 18 – 21].
14. Дискретные случайные величины [8, с. 21 – 24].
15. Плотность распределения вероятностей и ее свойства [8, с. 25 – 26].
16. Функция одной случайной величины [8, с. 39 – 42].
17. Случайный вектор. Система случайных величин [8, с. 27 – 30].
18. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин и их свойства [8, с. 33 – 36].
19. Дисперсия случайной величины и ее свойства [8, с. 43 – 48].
20. Биноминальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону [8, с. 57 – 58].
21. Закон распределения Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона [8, с. 58 – 60].
22. Равномерный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по равномерному закону [8, с. 60 – 62].
23. Показательный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону [8, с. 62 – 63].
24. Нормальный закон распределения. Математическое ожидание и дис -персия случайной величины, распределенной по нормальному закону [8, с. 64 – 66].
25. Выражение функции распределения нормальной величины через функцию Лапласа. Вероятность попадания значения нормальной случайной величины в заданный интервал, правило трех сигм [8, с. 66 – 67].
26. Корреляционный момент, коэффициент корреляции и их свойства [7, § 205, с. 587 – 588; 13].

27. Моменты случайной величины. Ассиметрия и эксцесс [8, с. 70 – 72].
28. Неравенства Маркова и Чебышева [8, с. 72 – 77].
29. Закон больших чисел «в форме» теоремы Чебышева [8, с. 78 – 81].
30. Теорема Бернулли [8, с. 82 – 83].
31. Понятие о «центральной предельной теореме». Теорема Ляпунова [8, с. 84 – 86].
32. Понятие случайного процесса. Корреляционная функция случайного процесса [8, с. 88 – 93].
33. Стационарный случайный процесс. Гармонический анализ стационарного случайного процесса [8, с. 94 – 98].
34. Цепи Маркова. Переходные вероятности. Применение цепей Маркова в экономике. Теорема Маркова [8, с. 99 – 106].
35. Разрывные марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чепмена [8, с. 117 – 123].
36. Статистическая совокупность. Генеральная и выборочная совокупности. Несмещенная, состоятельная и эффективная оценки параметров [8, с. 125 – 127].
37. Основные числовые характеристики статистического распределения. Среднее арифметическое и статистическая дисперсия и их свойства. Мода, медиана [8, с. 127 – 145].
38. Выборочный метод, точечное оценивание параметров распределения [8, с. 145 – 146].
39. Интервальное оценивание. Формула доверительной вероятности для большой и малой повторных выборок [8, с. 146 – 148].
40. Несмещенные оценки для генерального среднего и генеральной дисперсии. Расчет доверительного интервала и объема выборки (при повторном и бесповторном отборах) [8, с. 149 – 154].
41. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок [9, с. 170 – 174, § 7.3].

42. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки 1-го и 2-го рода при проверке гипотез. Уровень значимости, критическая область. Критерий согласия и его мощность [8, с. 155 – 162].

43. Проверка гипотезы о значении среднего значения для нормально распределенной величины при известной и неизвестной дисперсиях [8, с. 163 – 167].

44. Критерий согласия Пирсона [8, с.167 – 170; 7, § 219, с. 657 – 663].

45. Критерий согласия Фишера-Снедекора и его применение для проверки гипотезы о равенстве дисперсий.

46. Критерий согласия Колмогорова [8, с. 172 – 174; 9, § 8.6, с. 207 – 208].

47. Однофакторный дисперсионный анализ. Основные понятия дисперсионного анализа [8, с. 175 – 183, § 8.5, с. 199 – 203].

48. Двухфакторный дисперсионный анализ [8, с. 185 – 190].

49. Модели и основные понятия корреляционного и регрессионного анализа [8, с. 191 – 196].

50. Линейная корреляционная зависимость и прямые регрессии [8, с. 196 – 202].

51. Коэффициент линейной корреляции и его свойства [8, с. 203 – 210].

52. Понятие о нелинейной корреляции. Корреляционные отношения и его свойства [9, с. 211 – 218; 7, § 224, с. 687 – 693].

53. Понятие о множественной регрессии. Уравнение линейной регрессии и определение ее коэффициентов по методу наименьших квадратов [7, § 225, с. 693 – 697; 8, с. 218 – 221].

54. Совокупный коэффициент корреляции и его свойства [8, с. 221 – 223; 7, § 225, с. 696].

55. Частные коэффициенты корреляции и их свойства [8, с. 223 – 224; 7, § 9.7, с. 249 – 250].

56. Анализ соответствия регрессионной модели эмпирическим данным [8, с. 225 – 228].

Выбор контрольного задания

Номер варианта контрольной работы совпадает с последней цифрой зачетной книжки.

Студенты факультетов ФБД и ФЭФ выполняют две контрольные работы № 3: это задачи – 1, 2, 3, 4, 5, 6 и № 4 – задачи 7, 8, 9, 10, 11. Студенты остальных факультетов выполняют одну контрольную работу № 3. Это задачи 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12. Перед решением задачи обязательно нужно писать ее условие. Ниже приводится образец оформления титульного листа контрольной работы.

Белорусский государственный экономический университет

Кафедра высшей математики

Контрольная работа № 3

по теории вероятностей и математической статистике
студента 2 курса УЭФ, гр. УАПК-2,
зачетная книжка № 931807/з,
Иванова Ивана Ивановича.

222720, Минская обл.,
г. Дзержинск, ул. Чкалова,
д. 73, кв. 51.

Задание 1.

Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна P_1. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна P_2. Вероятность того, что потребитель прочтет об этом продукте в газете, равна P_3. Предполагается, что все эти три события независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит:

1) только одну рекламу;
2) хотя бы одну рекламу;
3) только две рекламы;
4) хотя бы две рекламы.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	«*а*»
P_1	0,08	0,07	0,08	0,10	0,09	0,07	0,06	0,06	0,05	0,09	0,10
P_2	0,05	0,06	0,07	0,08	0,07	0,04	0,05	0,05	0,04	0,04	0,02
P_3	0,06	0,05	0,06	0,07	0,08	0,11	0,10	0,09	0,10	0,06	0,09

Решение варианта «*а*»

Обозначим события: A – «потребитель увидит рекламу по телевидению»; B – «потребитель увидит рекламу на стенде»; C – «потребитель увидит рекламу в газете». События противоположные указанным («потребитель не увидит соответствующей рекламы» обозначим через $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.

По условию задачи $P(A)=0{,}10$; $P(B)=0{,}02$; $P(C)=0{,}09$. Тогда $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}10=0{,}90$; $P(\overline{B})=1-0{,}02=0{,}98$; $P(\overline{C})=1-0{,}09=0{,}91$.

1. Событие D – «Потребитель увидит только одну рекламу» можно рассматривать как сумму событий: «увидит только по телевидению и не увидит в газете и на стенде» $\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)$, «увидит только на стенде и не увидит по телевидению и в газете» $\left(\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\right)$, и, наконец, «увидит только в газете и не увидит по телевидению и на стенде» $\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\right)$:

$$D = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}.$$

Применяя теоремы: сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий, получим

$$P(D)=P(A)\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)+P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})=$$
$$=0{,}10\cdot 0{,}98\cdot 0{,}91+0{,}90\cdot 0{,}98\cdot 0{,}09+0{,}90\cdot 0{,}02\cdot 0{,}91=0{,}18494.$$

2. Событие E – «Потребитель увидит хотя бы одну рекламу», имеет противоположное событие $\left(\overline{E}\right)$ – «потребитель вообще не увидит рекламы»,

тогда $$P(\overline{E})=P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=0{,}90\cdot 0{,}98\cdot 0{,}91=0{,}80262,$$
$$P(E)=1-0{,}80262=0{,}19738.$$

3. Событие F – «Потребитель увидит только две рекламы» можно представить в виде:

$$F = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C;$$

$$P(F) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) =$$
$$= 0{,}10 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}91 + 0{,}10 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}09 + 0{,}90 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}09 = 0{,}01226.$$

4. Событие G – «Потребитель увидит хотя бы две рекламы» можно представить как сумму событий F и H, где $H = A \cdot B \cdot C$ – «потребитель увидит все три рекламы». Тогда

$$P(G) = P(F + H) = P(F) + P(H) = 0{,}01226 + 0{,}10 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}09 = 0{,}01244.$$

Задание 2.

0. В цехе три группы станков производят одни и те же детали. Производительности этих станков относятся как 1 : 2 : 4. Известно, что станки первой группы дают 3 % брака, второй – 4 % и третьей – 5 %. Все произведенные в цехе детали в нерассортированном виде сложены на складе. 1). Найти вероятность того, что наугад взятая оттуда деталь окажется бракованной, если количество станков каждой группы одинаково. 2). Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена станком второй группы?

1. Экономист аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,20; 0,65; 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,60, когда ситуация «хорошая», с вероятностью 0,30, когда ситуация «посредственная», и с вероятностью 0,10, когда ситуация «плохая». 1). Чему равна вероятность того, что этот экономический индекс в данный момент времени возрастет? 2). Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

2. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 15 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 % и третьего – 5 %. 1). Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода , 20 % – со второго, 50 % – с третьего? 2). Приобретенный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен вторым заводом?

3. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает 6 % брака, второй – 4 %. Для контроля отобрано 10 деталей из первого цеха и 8 деталей из второго. Эти детали смешаны в одну партию и из нее извлекают одну деталь. 1). Какова вероятность того, что она бракованная? 2). Извлеченная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена во втором цехе?

4. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,8 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,75, при понижении – с вероятностью 0,4. 1). Найти вероятность того, что фирма получит прибыль. 2). Фирма получила прибыль в течение квартала. Какова вероятность того, что за это время курс доллара возрос?

5. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,05, а в период экономического кризиса – 0,12. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,60. 1). Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит? 2). Клиент банка не вернул полученный кредит. Какова вероятность того, что наступил период экономического кризиса?

6. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 60 % женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 30 % мужчин реагирует на них негативно. Пусть 10 женщин и 12 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предполагаемым ситуациям.1). Чему равна вероятность того, что случайно извлеченная анкета содержит позитивную реакцию? 2). Случайно изготовленная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина?

7. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,65. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,38. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода, равна 0,30. 1). Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех? 2). Выпущенный новый товар имел на рынке успех. Какова вероятность того, что конкурент выпустил на рынок аналогичный товар?

8. Предположим, что 5 % мужчин и 2 % женщин дальтоники. Для обследования случайно отобраны 10 мужчин и 8 женщин. 1). Какова вероятность того, что лицо, наугад выбранное из этой группы, страдает дальтонизмом? 2). Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина?

9. Для определенного товара известно, что вероятность его возможного успеха на рынке составляет 0,75, если товар действительно удачный, 0,12, если он неудачен. Из прошлого опыта известно, что новый товар может иметь успех на рынке с вероятностью 0,60. Новый товар прошел выборочную проверку. 1). Какова вероятность того, что он имеет успех? 2). Результаты выборочной проверки нового товара показали, что он имеет успех. Чему равна вероятность того, что это действительно так?

«*а*». Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45, в противном случае – в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,40. 1). Чему равна вероятность заключения контракта? 2). Фирма заключила контракт на поставку. Чему равна вероятность того, что конкурент не выдвинул предложения на заключение контракта?

Решение варианта «*а*»

Обозначим через A – событие, состоящее в том, что фирма заключит контракт на поставку оборудования; H_1 – конкурент выдвинет аналогичное предложение; H_2 – конкурент не выдвинет своего предложения. По условию задачи $P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0,4 = 0,6$. Вероятность того, что фирма заключит контракт, если конкурент выдвинет аналогичное предложение $P_{H_1}(A) = 0,25$, и вероятность заключения контракта при условии, что конкурент не будет претендовать на заключение контракта $P_{H_2}(A) = 0,45$.

1. Для ответа на первый вопрос воспользуемся формулой полной вероятности:
$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,4 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 0,45 = 0,10 + 0,27 = 0,37.$$

2. Для ответа на второй вопрос необходимо найти вероятность того, что конкурент не выдвинул своего предложения по заключению контракта, если уже стало известно, что фирма заключила контракт на поставку, т.е. $P_A(H_2)$ применим формулу Байеса, по которой
$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)};$$
$$P_A(H_2) = \frac{0,6 \cdot 0,45}{0,37} = \frac{0,27}{0,37} = \frac{27}{37} \approx 0,73.$$

Ответ: $P(A) = 0,37$; $P_A(H_2) \approx 0,73$.

Задание 3.

Партия содержит N изделий, из которых n подвергается проверке. Партия принимается, если среди этих n изделий будет обнаружено меньше m бракованных. Найти вероятность того, что партия будет принята, если число бракованных изделий во всей партии равно M.

Вариант	N	M	n	m
0	20	7	5	4
1	18	5	4	4
2	16	5	4	3
3	22	8	5	4
4	21	6	4	3
5	17	6	5	4
6	19	6	5	4
7	25	8	6	5
8	24	7	5	4
9	23	6	5	4
«*a*»	15	5	5	4

Решение варианта «*a*»

$N = 15$, $M = 5$, $n = 5$, $m = 4$. Партия изделий принимается, если число бракованных изделий в выборке равно k, где $k < m$, т.е. $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Найдем вероятности этих событий, используя классическое определение вероятностей. Вероятности этих событий будут равны: $P(k=0)=\frac{C_{N-M}^{n}}{C_N^n}$,

$P(k=1)=\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$, $P(k=2)=\frac{C_M^2 \cdot C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$, …, $P(k=m-1)=\frac{C_M^{m-1} \cdot C_{N-M}^{n-m+1}}{C_N^n}$.

Вероятность того, что партия изделий будет принята (событие A) получим, если воспользуемся теоремой сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A)=P(k=1)+P(k=2)+\ldots+P(k=m-1).$$

Находим вероятности $P(k=i)$ $\quad i=0,1,2,3$:

$$P(k=0)=\frac{C_{10}^5}{C_{15}^5}=\frac{\frac{10!}{5!5!}}{\frac{15!}{5!10!}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}=\frac{12}{143};$$

$$P(k=1)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^4}{C_{15}^5}=\frac{5\cdot\frac{10!}{4!6!}}{\frac{15!}{5!10!}}=\frac{5\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}=\frac{50}{143};$$

$$P(k=2)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^3}{C_{15}^5}=\frac{\dfrac{10\cdot10\cdot9\cdot8}{2\cdot3}}{\dfrac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11!}{2\cdot3\cdot4\cdot5}}=\frac{10\cdot10\cdot9\cdot8\cdot20}{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}=\frac{400}{1001};$$

$$P(k=3)=\frac{C_5^3\cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}=\frac{10\cdot5\cdot9\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}=\frac{150}{1001};$$

$$P(A)=\frac{12}{143}+\frac{50}{143}+\frac{400}{1001}+\frac{150}{1001}=\frac{984}{1001}\approx0{,}983.$$

Ответ: вероятность приемки партии $P(A)\approx 0{,}983$.

Задание 4.

Известно, что в определенном городе p % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны m человек.

1. Составьте ряд распределения числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, и постройте его график.
2. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение этого распределения.
3. Напишите функцию распределения числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, и постройте ее график.
4. Чему равна вероятность того, что среди m случайно отобранных человек: а) окажется хотя бы один человек, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом; в) будет не больше двух, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом?

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	«*а*»
p %	15	20	25	30	16	18	22	24	26	23	20
m	6	5	4	5	4	3	4	3	4	4	4

Решение варианта «*а*»

Вероятность того, что каждый из отобранных людей предпочитает добираться на работу личным автотранспортом, постоянна и равна 0,2 (p = 0,2). Вероятность противоположного события $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Все четыре испытания – независимы, поэтому случайная величина X подчиняется биномиальному закону.

1. Чтобы построить ряд распределения, необходимо вычислить вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных зна-

чений которые равны 0, 1, 2, 3, 4 и записать полученные результаты в таблицу. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=P_{n,m}=C_n^m p^m\cdot q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m\cdot q^{n-m};$$

$$P(X=0)=P_{4,0}=C_4^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{4-0}=\frac{4!}{0!(4-0)!}0{,}2^0\cdot 0{,}8^{4-0}=1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096;$$

$$P(X=1)=P_{4,1}=C_4^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^3=4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^3=0{,}4096;$$

$$P(X=2)=P_{4,2}=C_4^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^2=6\cdot 0{,}04\cdot 0{,}64=0{,}1536;$$

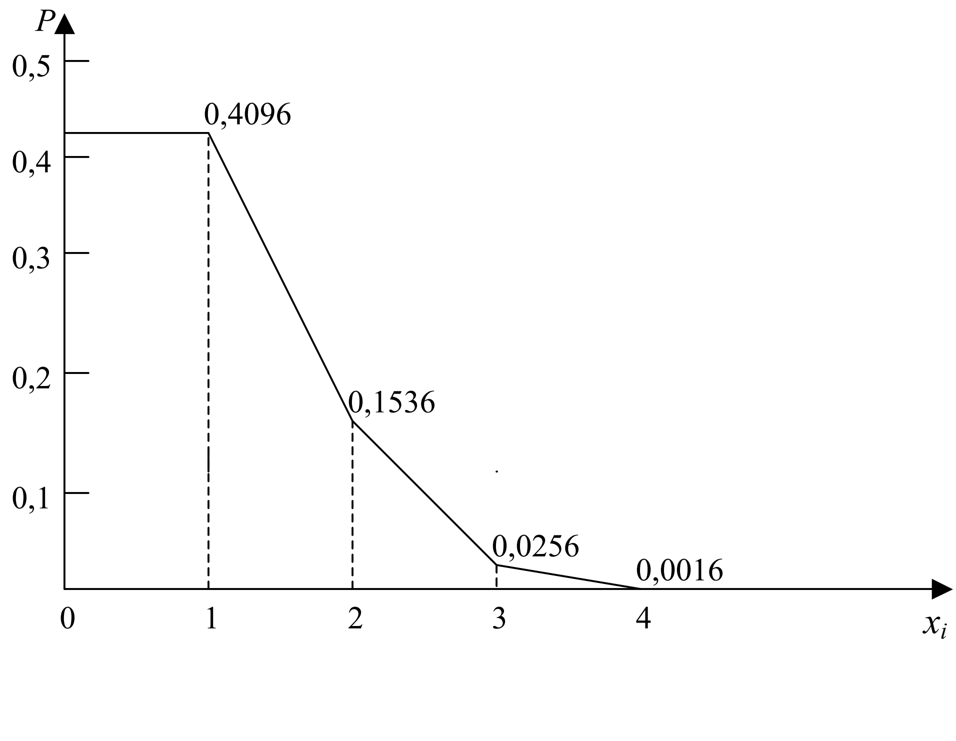
$$P(X=3)=P_{4,3}=C_4^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8=4\cdot 0{,}008\cdot 0{,}8=0{,}0256;$$

$$P(X=4)=P_{4,4}=C_4^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^0=1\cdot 0{,}0016\cdot 1=0{,}0016.$$

Итак, искомый ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Построим многоугольник распределения:



2. Найдем основные числовые характеристики распределения данной случайной величины.

Математическое ожидание $M(X)$ находим по формуле: $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$,
$M(X)=0\cdot 0{,}4096+1\cdot 0{,}4096+2\cdot 0{,}1536+3\cdot 0{,}0256+4\cdot 0{,}0016=0{,}8$ (чел.) или $M(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$ (чел.).

Дисперсия дискретной случайной величины может быть рассчитана по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i = (0-0{,}8)^2\cdot 0{,}4096+(1-0{,}8)^2\cdot 0{,}4096+$$
$$+(2-0{,}8)^2\cdot 0{,}1536+(3-0{,}8)^2\cdot 0{,}0256+(4-0{,}8)^2\cdot 0{,}0016=0{,}64(\text{чел.}^2) \text{ или}$$
$$D(X)=n\cdot p\cdot q=4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}64(\text{чел.}^2).$$

Среднее квадратическое отклонение:
$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$ (чел.).

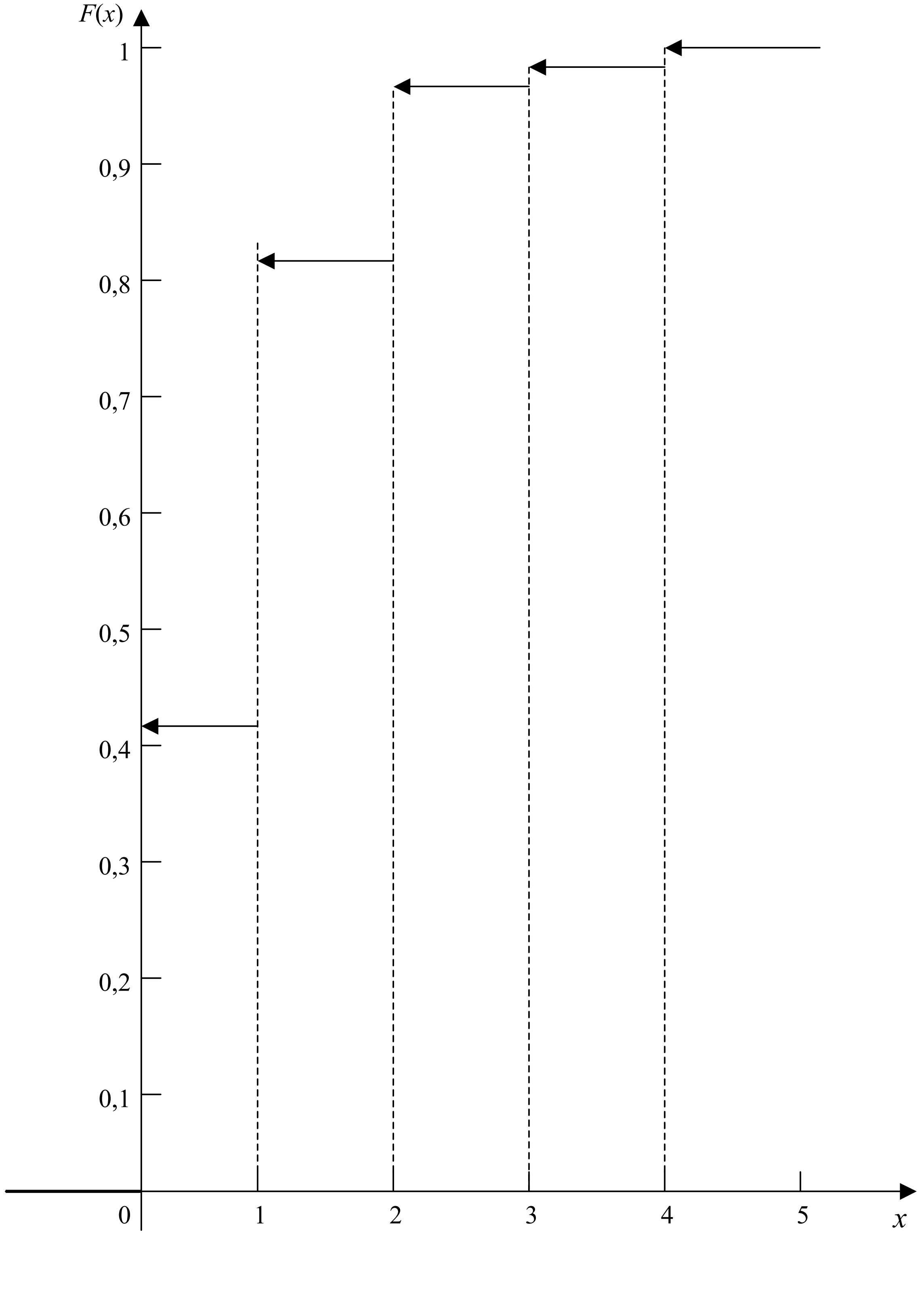
3. Функция распределения $F(x)$ – это вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x, т.е.
$$F(x)=P(X<x)=\sum_{\substack{i \\ x_i<x}} P(X=x_i).$$

Наименьшее значение данной случайной величины равно нулю, поэтому вероятность $P(X < 0) = 0$, т.к. это событие невозможное. Если $x\in(0;1]$, то только $x = 0$ будет удовлетворять неравенству $X < x$ и, следовательно, $F(x) = P(x = 0) = 0{,}4096$ при $x\in(0;1]$. Если $x\in(1;2]$, то неравенству $X < x$ будут удовлетворять два значения случайной величины $X = 0$ и $X = 1$ и $P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192$. Если $x\in(2;3]$, то уже три значения X будут удовлетворять неравенству $X < x$, это $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ и $P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728$. Если $x\in(3;4]$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}9984$. Наконец, при $x > 4$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 + 0{,}0016 = 1$.

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ 0{,}4096 & \text{при } 0<x\le 1; \\ 0{,}8192 & \text{при } 1<x\le 2; \\ 0{,}9728 & \text{при } 2<x\le 3; \\ 0{,}9984 & \text{при } 3<x\le 4; \\ 1 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Построим график этой функции.



4. а) Вероятность того, что хотя бы один человек из отобранных четырех будет добираться на работу личным автотранспортом (событие A) равна сумме вероятностей $P(A) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904$.

в). Вероятность того, что не больше двух человек предпочитают добираться на работу личным автотранспортом (событие B) равна сумме вероятностей $P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728$.

Задание 5.

Случайная величина X в интервале (a, b) задана плотностью распределения $f(x) = kx + \beta$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти:

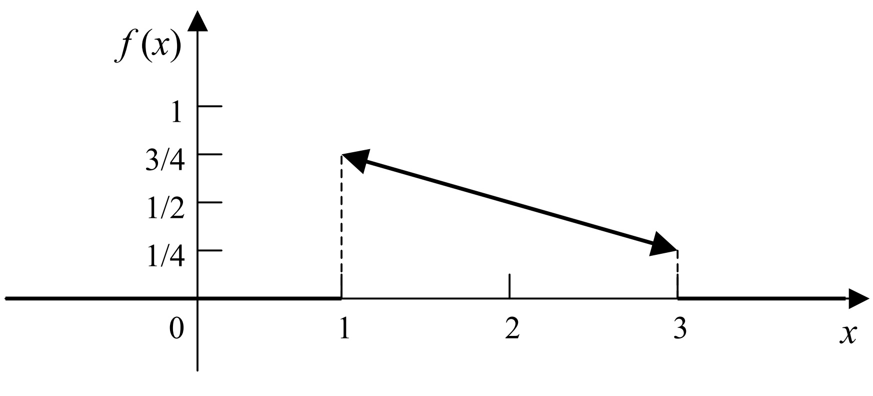
1. Функцию распределения F(x) и построить ее график.
2. Математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
3. Моду $Mo(X)$ и медиану $Me(X)$.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	«α»
a	1	2	3	0	4	1	2	3	4	5	1
b	3	4	4	2	6	2	3	5	5	6	3
k	–5/4	1/2	1	–1/2	1/2	1	4/5	–1/8	–2/9	–2/11	–1/4
β	3	–1	–3	1	–2	–1	–1	1	2	2	1

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА «α»

Построим график плотности распределения, которая по условию равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ -\dfrac{1}{4}x + 1 & \text{при} \quad 1 < x < 3; \\ 0 & \text{при} \quad x \ge 3. \end{cases}$$



1. Находим функцию распределения случайной величины X:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $x \le 1$ $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = 0$ при $x \in (1; 3]$

$$F(x) = \int_1^x \left(-\frac{1}{4}x + 1\right)dx = \left(-\frac{x^2}{8} + x\right)\Bigg|_1^x = -\frac{x^2}{8} + x + \frac{1}{8} - 1 = -\frac{x^2}{8} + x - \frac{7}{8};$$

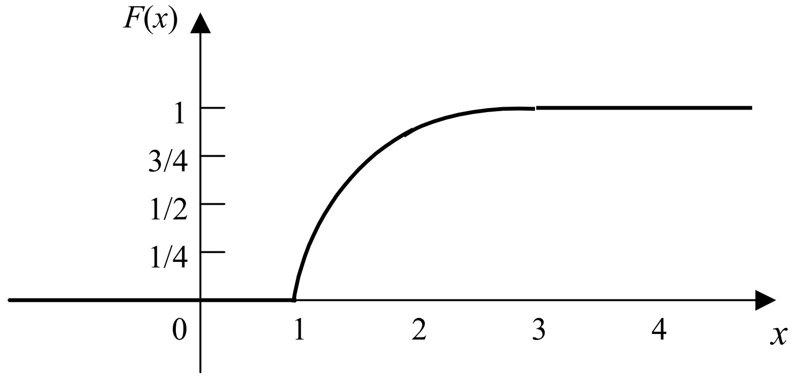
при $x > 3$

$$F(x) = \int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x + 1\right)dx = \left(-\frac{x^2}{8} + x\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{9}{8} + 3 + \frac{1}{8} - 1 = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ -\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{7}{8} & \text{при} \quad 1 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Строим график $F(x)$.



2. Математическое ожидание данной случайной величины найдем по формуле:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

$$M(X) = \int_1^3 x \cdot \left(-\frac{1}{4}x + 1\right)dx = -\frac{1}{4}\int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x\,dx = \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= -\frac{27}{12} + \frac{9}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = \frac{-27 + 54 + 1 - 6}{12} = \frac{11}{6}.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\cdot f(x)dx.$$

$$D(X)=\int_1^3\left(x-\frac{11}{6}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx=\int_1^3\left(x^2-\frac{11}{3}x+\frac{121}{36}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx=$$

$$=\int_1^3\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{11}{12}x^2-\frac{121}{144}x+x^2-\frac{11}{3}x+\frac{121}{36}\right)dx=-\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx+\frac{23}{12}\int_1^3 x^2dx-$$

$$-\frac{649}{144}\int_1^3 x\,dx+\frac{121}{36}\int_1^3 dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^3+\frac{23}{12}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3-\frac{649}{144}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3+\frac{121}{36}\cdot x\Bigg|_1^3=$$

$$=-\frac{81}{16}+\frac{1}{16}+\frac{69}{4}-\frac{23}{36}-\frac{649}{32}+\frac{649}{288}+\frac{121}{12}-\frac{121}{36}=-5+\frac{299}{18}-\frac{649}{36}+\frac{121}{18}=$$

$$=\frac{191}{36}-5=\frac{11}{36}\approx 0{,}31.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}\approx 0{,}55.$$

3. Мода непрерывного распределения – это значение аргумента *x*, при котором плотность $f(x)$ достигает наибольшего значения на данном отрезке $[1;3]$. $Mo(X)=1$, как видно из графика функции $f(x)$.

Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством:

$$P(X<Me(X))=P(X>Me(X))=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, медиана является корнем уравнения $F(Me)=\frac{1}{2}$. Так как $F(Me)=-\frac{(Me)^2}{8}+Me-\frac{7}{8}$, то решаем уравнение $-\frac{(Me)^2}{8}+Me-\frac{7}{8}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow$ $\Rightarrow (Me)^2-8(Me)+11=0;\quad Me=4\pm\sqrt{5},\quad 4+\sqrt{5}\notin[1;3].$ Следовательно, $Me=4-\sqrt{5}$.

Ответ. $M(X)=\frac{11}{6}\approx 1{,}83;\quad D(X)=\frac{11}{36}\approx 1{,}31;\quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{6}\approx 1{,}55;\quad Mo(X)=1;$ $Me(X)=4-\sqrt{5}\approx 1{,}76.$

Задание 6.

0. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 т и стандартным отклонением 60 т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты по крайне мере 800 т угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750 т до 850 т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 665 т. С вероятностью 0,9836 определить границы, в которых можно ожидать добычу угля в этой шахте.

1. Вес тропического грейпфрута – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математически ожиданием и дисперсией, равной 0,04. Известно, что 65 % фруктов весят меньше, чем 0,5 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута. Найдите вероятность того, что вес случайно взятого грейпфрута окажется от 400 до 550 г. С вероятностью 0,894 определите границы, в которых будет заключен вес наудачу взятого грейпфрута.

2. В течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 50 у.е. и стандартным отклонением, равным 5 у.е. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день цена за акцию была: а) более 60 у.е.; б) ниже 40 у.е. за акцию; в) между 45 и 60 у.е. за акцию. В каких границах с вероятностью 0,77 будет находиться стоимость акции этой компании в случайно выбранный день рассматриваемого периода.

3. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина. В 18 % случаев число ежемесячных заказов превышает 13 500 и в 14 % случаев число заказов оказывается меньшим 12 600. Найдите ожидаемое среднее число заказов и среднее квадратическое отклонение числа ежемесячных заказов. Определите границы, в которых с вероятностью 0,8 будет заключено число заказов, получаемых фирмой.

4. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше, чем 4,8 т и 25 % имеют вес меньше чем 4,66 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера. Какова вероятность того, что чистый вес контейнера будет заключен в пределах от 4,5 т до 5,2 т?

5. Компания A покупает у компании B детали к контрольным приборам. Размер деталей есть случайная величина, распределенная по нормальному закону. Деталь, размер которой отличается от установленного размера более чем на ± 0,25 мм, считается дефектной. Компания A требует от компании B, чтобы доля брака не превышала 1,5 % деталей. Каким должно быть в этом случае максимальное стандартное отклонение размеров деталей? Если средний размер деталей 2 мм, то какой процент деталей будет иметь размер: а) превышающий 2,3 мм; б) меньший, чем 1,72 мм.

6. Среднее время выполнения заказа служащими торгово-посреднеческой фирмы составляет 6,6 дней, однако для выполнения 20 % заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, определить стандартное отклонение времени обслуживания клиентов. Какой процент заказов выполняется: а) более чем за 10 дней; б) меньше чем за 5 дней?

7. При производстве безалкогольных напитков специальный аппарат разливает определенное число грамм напитка в стандартную емкость. Число разлитых грамм подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием, зависящим от настройки аппарата. Количество напитка, разлитого отдельным аппаратом, имеет стандартное отклонение $\sigma = 11{,}3$ г. Пусть емкости объемом 250 г наполняются лимонадом. Сколько грамм напитка должен в среднем разливать аппарат, чтобы не более 5 % емкостей оказалось переполненными? Каков процент бутылок, в которых количество налитого напитка будет: а) меньше 200 г; б) больше 240 г?

8. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

9. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием a = 950 кг и неизвестным средним квадратическим отклонением. Известно, что 15,87 % туш имеют вес менее 800 кг. Определите среднее квадратическое отклонение веса туш. Какова вероятность того, что вес случайно отобранной туши будет: а) находиться в пределах от 900 до 1000 кг; б) будет больше 700 кг. Определите границы, в которых с вероятностью 0,899 будет находиться вес случайно отобранной туши.

« α ». На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с неизвестными математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением. Известно, что 15 % туш имеют вес менее 800 кг и 37 % туш более 1000 кг. 1). Определите средний ожидаемый вес и среднее квадратическое отклонение веса туш. 2). В каких границах с вероятностью 0,972 будет заключен вес случайно отобранной туши?

Решение варианта « α »

1. Используем формулу расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right), \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

где a – математическое ожидание X, σ - среднее квадратическое отклонение. Так как по условию

$$P(X < 800) = P(-\infty < X < 800) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - a}{\sigma}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) + 1\right) = 0{,}15,$$

то

$$\Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) + 1 = 0{,}30 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) = -0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{800 - a}{\sigma}\right) = 0{,}7.$$

По таблице функции Лапласа найдем, при каком $z = \dfrac{a - 800}{\sigma}$ функция $\Phi(z) = 0{,}7.$ $\quad z \approx 1{,}037.$ Отсюда $\dfrac{a - 800}{\sigma} = 1{,}037.$

С другой стороны

$$P(X > 1000) = P(1000 < X < +\infty) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{+\infty - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1000 - a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{1000 - a}{\sigma}\right)\right) = 0{,}37, \qquad \text{поэтому}$$

$1 - \Phi\left(\dfrac{1000 - a}{\sigma}\right) = 0{,}74 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\dfrac{1000 - a}{\sigma}\right) = 0{,}26.$ Находим, при каком значении z $\Phi(z) = 0{,}26:$ по таблице функции Лапласа находим z = 0,332. Следовательно, $\dfrac{1000 - a}{\sigma} = 0{,}332.$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{a - 800}{\sigma} = 1{,}037; \\ \dfrac{1000 - a}{\sigma} = 0{,}332; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a - 800 = 1{,}037\sigma \\ 1000 - a = 0{,}332\sigma. \end{cases}$$

Сложив эти два уравнения получим $200 = 1{,}369\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \dfrac{200}{1{,}369} \approx 146{,}092$ кг.

Подставив найденное значение σ в уравнение a – 800 = 1,037σ, получим $a = 800 + 1{,}037 \cdot 146{,}092 \approx 800 + 151{,}5 = 951{,}5$ кг.

2. Для определения границ, в которых будет заключен вес случайно отобранной туши, которые нужно гарантировать с вероятностью 0,972, воспользуемся формулой расчета вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания:

$$P(|X - a| < \Delta) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right),$$

$$P(|X - 951{,}5| < \Delta) = \Phi\left(\frac{\Delta}{146{,}1}\right) = 0{,}972.$$

По таблице функции Лапласа находим значение аргумента z, при котором $\Phi(z) = 0{,}972$: получаем z = 2,2. Итак, $\frac{\Delta}{146{,}1} = 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad \Delta \approx 321{,}4$ (кг). Из неравенства

$|X - 951{,}5| < \Delta$ находим границы для X:

$|X - 951{,}5| < 321{,}4 \quad \Rightarrow \quad -321{,}4 < X - 951{,}5 < 321{,}4 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 951{,}5 - 321{,}4 < X < 951{,}5 + 321{,}4 \quad \Rightarrow \quad 630{,}1 < X < 1272{,}9.$

Ответ. $a \approx 951{,}5$ кг; $\sigma \approx 146{,}1$ кг; $630{,}1 < X < 1272{,}9$.

Задание 7.

0. Время ожидания водителем зеленого света на перекрестке представлено случайной выборкой:
0,000; 0,873; 0,827; 0,308; 0,394; 0,001; 0,838; 0,419; 0,414; 0,502; 0,003; 0,170; 0,071; 0,707; 0,471; 0,012; 0,476; 0,659; 0,515; 0,306; 0,044; 0,322; 0,309; 0,729; 0,600; 0,156; 0,648; 0,927; 0,742; 0,846; 0,534; 0,991; 0,778; 0,884; 0,678; 0,802; 0,107; 0,327; 0,632; 0,454; 0,007; 0,726; 0,961; 0,835; 0,623; 0,822; 0,393; 0,826; 0,318; 0,648.

1. Наблюдения за межремонтными интервалами (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты:
0,000; 1,033; 0,877; 0,184; 0,250; 0,000; 0,912; 0,271; 0,276; 0,348; 0,002; 0,093; 0,037; 0,613; 0,318; 0,006; 0,323; 0,537; 0,362; 0,182; 0,023; 0,194; 0,183; 0,654; 0,458; 0,084; 0,522; 1,306; 0,676; 0,936; 0,382; 2,336; 0,752; 1,079; 0,567; 0,810; 0,057; 0,198; 0,500; 0,303; 0,003; 0,648; 1,623; 0,900; 0,487; 0,864; 0,250; 0,875; 0,191; 0,522.

2. Для определения надежности металлорежущих станков на заводе фиксировались наработки на отказ (время непрерывной работы до первого отказа). Полученные данные (в месяцах):

0,031; 0,062; 3,206; 0,095; 0,662; 0,244; 4,078; 0,197; 0,522; 0,052; 0,098; 0,902; 2,698; 0,321; 0,442; 0,195; 0,407; 4,249; 0,045; 0,013; 0,759; 0,736; 0,252; 0,221; 0,079; 0,231; 0,577; 0,602; 0,338; 0,079; 0,415; 0,079; 0,243; 0,172; 0,577; 0,442; 1,312; 0,106; 0,330; 0,618; 0,260; 1,574; 0,340; 0,509; 0,090; 0,106; 0,058; 1,073; 0,484; 0,777.

3. Имеются данные о годовой мощности (тыс. т) предприятия цементной промышленности:
11,240; 13,720; 27,655; 15,210; 22,075; 18,545; 28,505; 17,785; 21,240; 13,090; 15,335; 23,170; 27,045; 19,525; 20,645; 17,750; 20,360; 28,650; 12,560; 8,195; 22,560; 22,450; 18,670; 18,195; 14,565; 18,355; 21,590; 71,745; 19,705; 14,580; 20,425; 14,565; 18,540; 17,305; 21,590; 20,650; 24,495; 15,585; 19,610; 21,835; 18,780; 25,140; 19,720; 21,145; 15,040; 15,590; 13,480; 23,785; 20,970; 22,645.

4. В фирме, производящей микросхемы для компьютеров, была сделана проверка их качества. Для этого испытаны в жестком режиме $n = 50$ образцов и зафиксированы моменты их выхода из строя:
0,056; 0,720; 0,291; 0,084; 0,166; 0,117; 0,317; 0,108; 0,153; 0,068; 0,085; 0,186; 0,274; 0,129; 0,144; 0,108; 0,140; 0,321; 0,064; 0,042; 0,175; 0,173; 0,118; 0,113; 0,079; 0,141; 0,079; 0,117; 0,103; 0,159; 0,144; 0,212; 0,087; 0,130; 0,163; 0,120; 0,226; 0,132; 0,152; 0,082; 0,087; 0,071; 0,198; 0,149; 0,176.

1. По данным выборочного обследования составить интервальный вариационный ряд, разбив исследуемую совокупность на 6 интервалов.

2. Построить гистограмму; полигон распределения частот; кумуляту.

3. Найти среднюю арифметическую вариационного ряда, моду и медиану.

4. Найти показатели вариации (дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации).

5. Получено следующее распределение семей по среднедушевому доходу в месяц (у.е.):
26; 28; 45; 50; 28; 65; 84; 100; 102; 26; 145; 120; 25; 40; 50; 55; 55; 68; 80; 100; 40; 41; 30; 60; 64; 59; 84; 82; 100; 70; 60; 48; 50; 35; 40; 70; 80; 110; 130; 100; 63; 47; 43; 30; 80; 99; 89; 62; 60; 120.

6. Интервал движения поездов метро в минутах:
0,0; 1,7; 1,7; 0,6; 0,8; 0,1; 1,8; 0,8; 0,8; 1,0; 0,1; 0,3; 0,2; 1,4; 1,2; 0,2; 0,9; 1,3; 1,0; 0,6; 2,0; 0,6; 2,6; 1,5; 2,2; 0,3; 2,3; 2,8; 2,5; 2,7; 2,1; 2,2; 2,6; 2,8; 2,4; 2,6; 1,2; 1,7; 2,3; 2,0; 3,0; 2,4; 3,0; 2,7; 2,3; 1,0; 1,7; 2,7; 1,6; 2,3.

7. Значения промежутков времени (в минутах) между вызовами такси в городе Гродно:
0,000; 0,517; 0,438; 0,092; 0,125; 0,000; 0,456; 0,136; 0,134; 0,174; 0,000; 0,047; 0,019; 0,307; 0,159; 0,003; 0,162; 0,269; 0,181; 0,091; 0,011; 0,097; 0,092; 0,327; 0,229; 0,042; 0,261; 0,653; 0,338; 0,468; 0,191; 0,168; 0,376; 0,539; 0,283; 0,405; 0,028; 0,099; 0,250; 0,151; 0,002; 0,324; 0,812; 0,450; 0,244; 0,432; 0,125; 0,438; 0,096; 0,261.

8. Прибыль 50 фирм, принадлежащих одной корпорации (1000 у.е.):
4,744; 9,127; 7,201; 8,650; 11,536; 9,013; 10,255; 10,390; 9,268; 7,354; 6,232; 15,103; 11,902; 10,216; 11,470; 10,954; 6,739; 12,697; 13,084; 6,088; 14,593; 8,671; 14,227; 15,190; 9,202; 11,047; 9,124; 7,351; 9,832; 12,271; 7,126; 10,744; 9,715; 5,536; 8,917; 9,823; 8,383; 9,766; 10,687; 10,582; 11,245; 5,854; 10,387; 2,917; 6,739; 6,748; 10,954; 11,101; 7,024; 11,587.

9. Срок работы электрических лампочек (в годах):
0,001; 0,001; 0,003; 0,012; 0,046; 0,169; 0,763; 1,620; 0,007; 1,728; 2,067; 1,824; 0,187; 0,646; 0,389; 1,046; 4,672; 0,113; 1,295; 0,500; 1,754; 0,543; 0,074; 1,075; 0,370; 2,612; 1,504; 0,396; 3,245; 1,751; 0,369; 0,534; 1,227; 0,724; 1,307; 1,353; 2,157; 1,000; 1,800; 0,382; 0,500; 0,697; 0,636; 0,365; 0,916; 1,871; 1,134; 0,606; 0,975; 1,043.

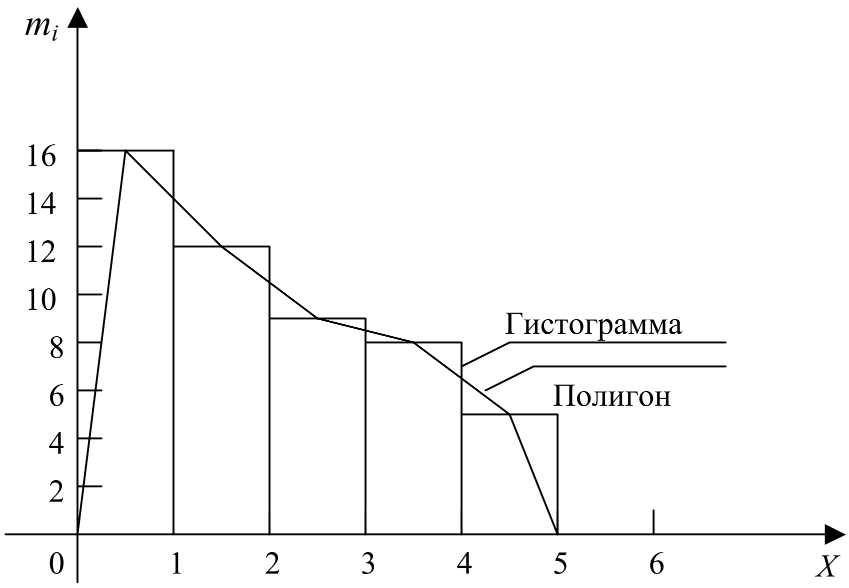
« α ». Численные значения промежутков времени (в минутах) между появлениями клиентов в некотором банке:
0,000; 4,134; 3,507; 0,738; 1,000; 0,020; 3,647; 1,086; 1,069; 1,394; 0,007; 0,374; 0,148; 2,453; 1,272; 0,025; 1,293; 2,150; 1,447; 0,730; 0,091; 0,778; 0,740; 2,614; 1,832; 0,339; 2,091; 5,223; 2,706; 3,742; 1,527; 9,344; 3,007; 4,314; 2,267; 3,239; 0,226; 0,791; 2,001; 1,211; 0,014; 2,590; 6,492; 3,600; 1,949; 3,457; 1,000; 3,502; 0,764; 2,086.

Решение варианта « α »

1. По данным таблицы находим наименьшее и наибольшее значения признака $X_{\min} = 0{,}000$, $X_{\max} = 9{,}344$. Размах вариации $R = X_{\max} - X_{\min} = 9{,}344$. Ширина интервала разбиения: $h = \dfrac{9{,}344}{6} \approx 1{,}557$, но так как количество промежутков времени, превышающих 4 мин., всего четыре, то возьмем в качестве $h = 1$ мин., т.е. в качестве интервалов разбиения будем рассматривать интервалы $[0;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$, $[3;4)$, $[4;5)$. Подсчитав число вариант, попадающих в каждый из интервалов, получаем следующий вариационный ряд:

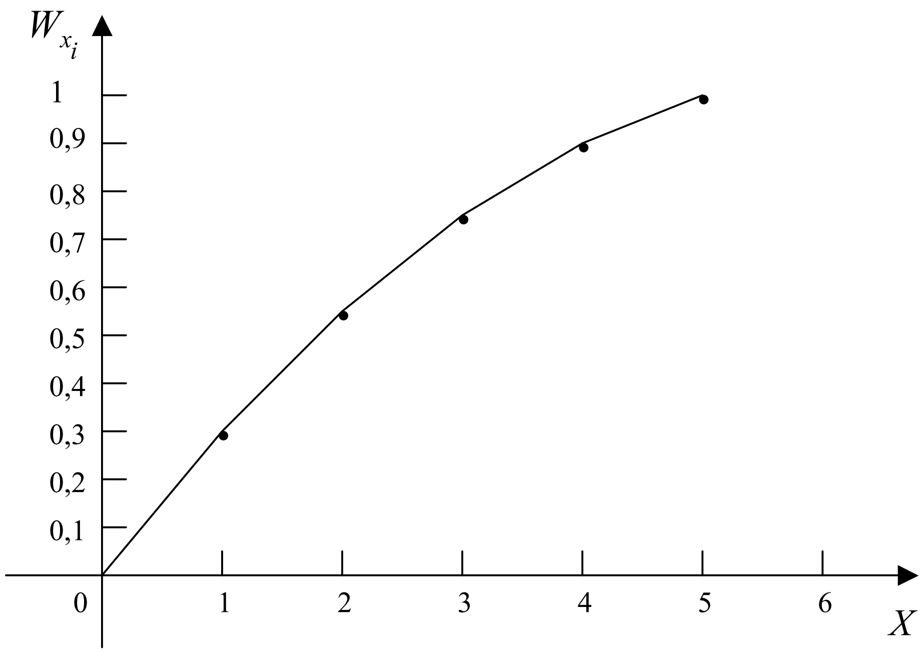
X	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
m_i	16	12	9	8	5

2. Построим гистограмму и полигон распределения частот для полученного вариационного ряда.



Для построения кумуляты находим накопленные частоты и частости:

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	0	16	28	37	45	50
$W_{x_i} = \frac{m_i}{50}$	0	0,32	0,56	0,74	0,90	1,0



3. Находим среднюю арифметическую ряда по формуле: $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$,

где x_i – середина *i*-го интервала; m_i – частота *i*-го интервала; *k* – число интервалов.

$$\overline{X} = \frac{0{,}5 \cdot 16 + 1{,}5 \cdot 12 + 2{,}5 \cdot 9 + 3{,}5 \cdot 8 + 4{,}5 \cdot 5}{50} = \frac{8 + 18 + 22{,}5 + 28 + 22{,}5}{50} = \frac{99}{50} \approx 2.$$

Мода интервального ряда находится по формуле:

$$Mo = x_{Mo} + i\frac{m_2 - m_1}{(m_2 - m_1) + (m_2 - m_3)}.$$

Модальный интервал – интервал, частота которого наибольшая для данного вариационного ряда – это интервал [0; 1).

x_{Mo} – нижняя граница модального интервала $(x_{Mo} = 0)$;

m_1 – частота интервала, предшествующего модальному $(m_1 = 0)$;

m_2 – частота модального интервала $(m_2 = 16)$;

m_3 – частота интервала, следующего за модальным $(m_3 = 12)$;

i – ширина модального интервала (*i* = 1).

Итак, $Mo = 0 + 1 \cdot \dfrac{16 - 0}{16 - 0 + 16 - 12} = 0{,}8.$

Медиана интервального ряда определяется по формуле:

$$Me = x_o + i\frac{\frac{\sum m_i}{2} - S_{(m-1)}}{f_m}.$$

Вначале находим медианный интервал. Для определения этого интервала сумму всех частот делим пополам, т.е. $\dfrac{50}{2} = 25$. Затем суммируем частоты первого, второго и т.д. интервалов, пока не получим сумму большую или равную $\dfrac{\sum m_i}{2}$ (25). Тот интервал, частоту которого прибавляли последней и будет модальным. Для нашего вариационного ряда – интервал [1; 2).

x_o – начало модального интервала $(x_o = 1)$;

i – ширина модального интервала (*i* = 1);

$S_{(m-1)}$ – сумма накопленных частот интервалов, предшествующих модальному $S_{m-1} = 16$;

f_m – частота медианного интервала $(f_m = 12)$.

$$Me = 1 + \frac{25 - 16}{12} = 1 + \frac{9}{12} = 1{,}75.$$

4. Дисперсию вариационного ряда находим по формуле:

$$D(X)=\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2}\cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}-\left(\overline{X}\right)^2=\frac{0{,}5^2\cdot 16+1{,}5^2\cdot 12+2{,}5^2\cdot 9+3{,}5^2\cdot 8+4{,}5^2\cdot 5+}{50}-2^2=$$

$$=\frac{4+27+56{,}25+98+101{,}25}{50}-4=\frac{286{,}5}{50}-4=1{,}73.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}73}\approx 1{,}32.$
Коэффициент вариации:

$$V(X)=\frac{\sigma(X)}{\overline{X}}=\frac{1{,}32}{2}=0{,}66.$$

Ответ. $\overline{X}=2;\quad Mo=0{,}8;\quad Me=1{,}75;\quad D(X)=1{,}73;\quad \sigma(X)=1{,}32;\quad V(X)=0{,}66.$

Задание 8.

С помощью собственно-случайного бесповторного отбора руководство фирмы, в которой работает N человек, провело выборочное обследование n своих служащих. Средний стаж их работы в фирме оказался равным $\overline{X}$ лет, а среднее квадратическое отклонение – S лет. Среди обследованных оказалось m женщин. Считая стаж работы служащих фирмы распределенным по нормальному закону, определите: 1) с вероятностью 0,95 доверительный интервал, в котором окажется средний стаж работы всех служащих фирмы; 2) с вероятностью 0,90 доверительный интервал, накрывающий неизвестную долю женщин во всем коллективе.

Если руководство фирмы решило провести повторное выборочное обследование, то каким должен быть объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью γ = 0,99 можно было бы утверждать: 3) что, принимая полученный стаж работы за истинный, совершается погрешность, не превышающая Δ лет; 4) что максимальное отклонение выборочной доли женщин в выборке от доли женщин во всем коллективе не превышало ε?

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	«a»
N	400	500	600	700	800	900	1000	550	650	750	800
n	50	45	55	60	65	70	100	40	80	75	85
m	15	12	20	18	13	14	30	16	35	25	34
$\widetilde{X}$	8	7,5	9	8,5	8,7	7,8	8,2	6,1	6,8	9,2	8,4
S	2,3	1,8	3,1	2,4	2,6	1,8	2,1	1,4	1,7	3,0	2,9
Δ	0,5	0,6	0,4	0,5	0,7	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	0,6
ε	0,03	0,04	0,05	0,06	0,04	0,03	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08

Решение варианта « α »

1. Для оценки математического ожидания a (генеральной средней) нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\widetilde{X}$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности (при большом объеме выборки, т.е. при $n \geq 30$) и собственно-случайном бесповторном отборе имеет место формула

$$P\left(\widetilde{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} < a < \widetilde{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа,

$$\Delta = t\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}.$$

По таблице функции Лапласа найдем, при каком значении t $\Phi_o(t) = 0{,}95$: $\Phi_o(1{,}96) = 0{,}95$. Следовательно, $t = 1{,}96$,

$$\Delta = 1{,}96\cdot\frac{2{,}9}{\sqrt{85}}\cdot\sqrt{1-\frac{85}{800}} = 1{,}96\cdot\frac{2{,}9}{9{,}22}\cdot\sqrt{0{,}89375} \approx 1{,}96\cdot 0{,}31\cdot 0{,}95 \approx 0{,}58,$$

$$\widetilde{X} - \Delta < a < \widetilde{X} + \Delta \quad\Rightarrow\quad 8{,}4 - 0{,}58 < a < 8{,}4 + 0{,}58 \quad\Leftrightarrow\quad 7{,}82 < a < 8{,}98.$$

2. Находим выборочную долю женщин:

$$W = \frac{m}{n} = \frac{34}{85} = 0{,}4.$$

Предельную ошибку выборки определяем по формуле $\Delta = t\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}\left(1-\frac{n}{m}\right)}$, где t найдем по таблице функции Лапласа, так что $\Phi(t) = 0{,}90 \quad\Rightarrow\quad t = 1{,}64$. Итак,

$$\Delta = 1{,}64\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{85}\left(1-\frac{85}{800}\right)} \approx 1{,}64\cdot\frac{0{,}49}{9{,}22}\cdot 0{,}95 = \frac{0{,}76}{9{,}22} \approx 0{,}08,$$

$$W - \Delta < p < W + \Delta \quad\Rightarrow\quad 0{,}4 - 0{,}08 < p < 0{,}4 + 0{,}08 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}32 < p < 0{,}48.$$

С вероятностью 0,90 можно ожидать, что доля женщин во всем коллективе фирмы находится в интервале от 0,32 до 0,48.

3. Если выборка планируется повторной, то для определения ее объема воспользуемся формулой:

$$n = \frac{t^2\cdot S^2}{\Delta^2}, \quad \Phi(t) = 0{,}99 \quad\Rightarrow\quad t = 2{,}58,$$

$$n = \frac{2{,}58^2\cdot 2{,}9^2}{0{,}6^2} = \frac{6{,}66\cdot 8{,}41}{0{,}36} \approx 156.$$

Если выборка планируется бесповторная, то для определения ее объема воспользуемся формулой:

$$n' = \frac{t^2 \cdot S^2 \cdot N}{\Delta^2 N + t^2 S^2};$$

$$n' = \frac{2{,}58^2 \cdot 2{,}9^2 \cdot 800}{0{,}6^2 \cdot 800 + 2{,}58^2 \cdot 2{,}9^2} = \frac{6{,}66 \cdot 8{,}41 \cdot 800}{0{,}36 \cdot 800 + 6{,}66 \cdot 8{,}41} = \frac{44808{,}48}{344{,}01} \approx 131.$$

4. Объем для повторной выборки определяем по формуле:

$$n = \frac{t^2 W(1-W)}{\varepsilon^2}, \quad n = \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}08^2} \approx 250.$$

Для бесповторного отбора:

$$n' = \frac{t^2 W(1-W)N}{\varepsilon^2 N + t^2 W(1-W)}, \quad n' = \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 800}{0{,}08^2 \cdot 800 + 2{,}58^2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx \frac{1278{,}03}{6{,}72} \approx 191.$$

Ответ. $7{,}82 < a < 8{,}98$; $0{,}32 < p < 0{,}48$; $n = 156$; $n' = 131$; $n = 250$ (для выборочной доли); $n' = 191$ (для выборочной доли).

Задание 9.

0. Для данных задания 7 показать, что случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Принять $\alpha = 0{,}1$. Использовать критерий χ^2 Пирсона.

1. Показать с помощью критерия χ^2 Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, что случайная величина в задании 7 имеет показательное распределение.

2. С помощью критерия χ^2 Пирсона установить на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, что случайная величина в задании 7 имеет логарифмически нормальное распределение.

3. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины в задании 7 с помощью критерия χ^2 Пирсона при $\alpha = 0{,}1$.

4. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины в задании 7 с помощью критерия χ^2 Пирсона при $\alpha = 0{,}01$.

5. Проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины в задании 7 с помощью критерия χ^2 Пирсона при $\alpha = 0{,}1$.

6. Показать, что на уровне значимости α = 0,01 случайная величина в задании 7 не подчиняется нормальному закону. Использовать критерий χ^2 Пирсона.

7. Показать с помощью критерия χ^2 Пирсона на уровне значимости α = 0,05, что случайная величина в задании 7 имеет показательное распределение.

8. Проверить гипотезу о нормальности распределения случайной величины задания 7 с помощью критерия χ^2 Пирсона при α = 0,01.

9. Проверить гипотезу о нормальности распределения случайной величины задания 7 с помощью критерия χ^2 Пирсона при α = 0,01.

« α ». Проверить гипотезу, что случайная величина в задании 7 имеет показательный закон распределения с помощью критерия χ^2 Пирсона при α = 0,01.

Решение варианта « α »

Интервальный вариационный ряд в задании 7 имел вид:

X	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
m_i	16	12	9	8	5

$\overline{X} = 2; \quad \sigma = 1{,}32; \quad \alpha = 0{,}01.$

Предполагая, что X распределен по показательному закону, определим вероятность попадания в каждый из интервалов по формуле:

$$P(\alpha \le X < \beta) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda},$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\overline{X}} = \dfrac{1}{2}$.

$P_1 = P(0 \le X < 1) = e^0 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - 0{,}607 = 0{,}393$;

$P_2 = P(1 \le X < 2) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = 0{,}607 - 0{,}368 = 0{,}239$;

$P_3 = P(2 \le X < 3) = e^{-1} - e^{-1{,}5} = 0{,}368 - 0{,}223 = 0{,}145$;

$P_4 = P(3 \le X < 4) = e^{-1{,}5} - e^{-2} = 0{,}223 - 0{,}135 = 0{,}088$;

$P_5 = P(X > 4) = e^{-2} = 0{,}135$.

Проверка: $\sum P_i = 0{,}393 + 0{,}239 + 0{,}145 + 0{,}088 + 0{,}135 = 1$.

Теоретические частоты распределения найдем по формуле: $m_i' = n \cdot P_i$, где n – объем выборки, получаем: $m_1' = 50 \cdot 0{,}393 = 19{,}65$; $m_2' = 50 \cdot 0{,}239 = 11{,}95$; $m_3' = 50 \cdot 0{,}145 = 7{,}29$; $m_4' = 50 \cdot 0{,}088 = 4{,}4$; $m_5' = 50 \cdot 0{,}135 = 6{,}75$. По критерию χ^2 Пирсона необходимо найти величину $\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - m_i'\right)^2}{m_i'}$ и сравнить ее с $\chi^2_{кр.(\alpha;p)}$, где α - заданный уровень значимости, $p = k - l - 1$ (l – число параметров распределения, определяемых по выборке (l =1)).

$$\chi^2_{набл.} = \frac{(19{,}65-16)^2}{19{,}65} + \frac{(11{,}95-12)^2}{11{,}95} + \frac{(7{,}25-9)^2}{7{,}29} + \frac{(4{,}4-8)^2}{4{,}4} + \frac{(6{,}75-5)^2}{6{,}75} =$$
$$= 0{,}68 + 0{,}00 + 0{,}42 + 2{,}95 + 0{,}45 = 4{,}5.$$

$\chi^2_{кр.} = \chi^2_{(0{,}01;3)} = 11{,}3$. Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$ (4,5 < 11,3), то гипотеза о том, что случайная величина X распределена по показательному закону, принимается.

Ответ. Гипотеза о том, что случайная величина X распределена по показательному закону, принимается.

Задание 10.

0. Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Случайно отобрано 200 изделий проверяемой партии. Из них оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости α = 0,02 принять партию?

1. Два завода изготавливают однотипные детали. Для оценки их качества сделаны выборки из продукции этих заводов и получены следующие результаты:

Выборки	Завод № 1	Завод № 2
Объем выборки	200	300
Число бракованных деталей	20	15

На уровне значимости α = 0,025 определите, имеется ли существенное различие в качестве изготовляемых этими заводами деталей.

2. Компания, выпускающая в продажу новый сорт растворимого кофе, провела проверку вкусов покупателей по случайной выборке на 400 человек и выяснила, что 220 из них предпочли новый сорт всем остальным. Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о том, что, по крайней мере, 52 % потребителей предпочтут новый сорт кофе.

3. Для проверки эффективности нового лекарства были выбраны две случайные группы по 15 человек, страдающих гриппом. При применении старого лекарства средний срок выздоровления составлял 11 дней с выборочной дисперсией $S_1^2 = 3$, при применении нового – срок выздоровления составил 8 дней с $S_2^2 = 4$. Проверьте на уровне 0,99 гипотезу о преимуществе нового лекарства.

4. В двух фирмах, выпускающих детское питание, проводилась оценка качества продукции. В фирме *А*, где проверялось 30 единиц продукции, средняя сумма баллов оказалась равной 47. Считая дисперсию балльной оценки равной 12, определить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, какая фирма выпускает лучшую продукцию.

5. Учет времени сборки узла машины бригадой из 10 слесарей показал, что среднее время (в минутах) сборки узла равно $\overline{X} = 76$, а $S^2 = 15$. Предполагая распределение времени сборки нормальным, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о том, что 75 минут является нормативом (математическим ожиданием) трудоемкости.

6. Для проверки новой технологии были выбраны две группы рабочих численностью $n_1 = 40$ человек и $n_2 = 50$ человек. В первой группе при применении старой технологии средняя выработка составила $\overline{x_1} = 85$ (изделий), во второй, где применялась новая технология, $\overline{x_2} = 95$. Дисперсии по группам $\sigma_1^2 = 100$, $\sigma_2^2 = 75$ были известны заранее. Выяснить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ влияние новой технологии на производительность.

7. Средний годовой оборот 5 компаний в регионе *А* составил 4900 у.е., средний оборот 10 компаний в регионе *В* составил 5000 у.е. Выборочная дисперсия оборота компаний в регионе *А* оказалась равной 1000, а в регионе *В* – 4000. Считая дисперсии среднегодовых оборотов одинаковыми $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о равенстве средних значений в регионах *А* и *В*.

8. В результате проверки 10 продавцов одной из торговых точек города были обнаружены недовесы со средним значением $\overline{X_1} = 150$ г и выборочной дисперсией $S^2 = 2500$ г^2. В другой точке недовесы характеризовались $\overline{X_2} = 125$ г и $S_2^2 = 1600$ г^2 среди выборки из 15 продавцов. Выяснить на уровне доверия $\gamma = 0{,}95$ в какой точке предпочтительнее покупать продукцию.

9. По утверждению руководства фирмы средний размер дебиторского счета равен 185 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборки равна 172 тыс. руб. при среднем квадратическом отклонении 33 тыс. руб. Может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета? Принять уровень значимости равным $\alpha = 0{,}05$.

« α ». Предполагается, что применение нового типа резца сократит время обработки некоторой детали. Хронометраж времени обработки 9 деталей, обработанных старым типом резцов, дал следующие результаты: среднее время обработки детали $\widetilde{X} = 57$ мин., исправленная выборочная дисперсия $S_X^2 = 186{,}2$ (мин.^{2}). Среднее время обработки 15 деталей, обработанных новым типом резцов $\widetilde{Y} = 52$ мин., а исправленная выборочная дисперсия $S_Y^2 = 166{,}4$ (мин.^{2}). На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить, позволило ли использование нового типа резцов сократить время обработки детали?

Решение варианта « α »

Для решения данной задачи необходимо сравнить генеральные средние двух нормально распределенных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны.

Нулевая гипотеза $H_0 : \overline{X} = \overline{Y}$ – генеральные средние равны, т.е. использование нового типа резца не позволяет снизить время на обработку. Альтернативная гипотеза $H_1 : \overline{X} > \overline{Y}$. Так как генеральные дисперсии $\sigma^2{}_x$ и $\sigma^2{}_y$ неизвестны, то предварительно необходимо проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Так как по результатам выборок оказалось, что $S_x^2 > S_y^2$, то в качестве альтернативной гипотезы берем $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$. В качестве критерия для сравнения двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей используется случайная величина F – критерий Фишера-Снедекора.

Наблюдаемое значение критерия $f_{набл.} = \dfrac{S_Б^2}{S_M^2}$ – отношение большей по величине дисперсии к меньшей. В нашем случае $f_{набл.} = \dfrac{186{,}2}{166{,}4} = 1{,}119$.

Критическое значение критерия находим по таблице распределения Фишера по уровню значимости α и числу степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, где k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – меньшей: $k_1 = 9 - 1 = 8$, $k_2 = 15 - 1 = 14$, $\alpha = 0{,}01$.

По таблице находим: $f_{кр.} = 4{,}14$, $f_{набл.} < f_{кр.}$.

На данном уровне значимости H_0 о равенстве дисперсий принимается.

Теперь можно приступить к проверке гипотезы о равенстве генеральных средних: $H_0 : \overline{X} = \overline{Y}$. В качестве критерия для проверки этой гипотезы используется случайная величина t – критерий Стьюдента, его наблюдаемое значение рассчитывается по формуле:

$$t_{набл.} = \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x \cdot n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}};$$

$$t_{набл.} = \frac{57 - 52}{\sqrt{(9-1)\cdot 186{,}2 + (15-1)\cdot 166{,}4}} \cdot \sqrt{\frac{9\cdot 15\cdot (9+15-2)}{9+15}} \approx 0{,}9.$$

Критическое значение $t_{кр.}$ следует находить по таблице распределения Стьюдента по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$; $k = 9 + 15 - 2 = 22$; $t_{кр.} = t_{(\alpha=0{,}01;\, k=22)} = 2{,}82$. $t_{набл.} < t_{кр.}$, следовательно, на этом уровне значимости нельзя отвергнуть нулевую гипотезу.

Ответ. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ нельзя утверждать, что использование нового типа резцов позволило сократить время обработки детали.

Задание 11.

0. Бегуны, ранги которых при построении по росту были 1, 2, …, 10, заняли на состязаниях следующие места: 6; 5; 1; 4; 2; 7; 8; 10; 3; 9. Как велика ранговая корреляция между ростом и быстротой бега? Проверить ее значимость при $\alpha = 0{,}05$.

1. Цветные диски, имеющие порядок оттенков 1, 2, …, 15, были расположены испытуемым в следующем порядке 7; 4; 2; 3; 1; 10; 6; 8; 9; 5; 11; 15; 14; 12; 13. Охарактеризовать способность испытуемого различать оттенки цветов с помощью коэффициента ранговой корреляции Спирмена между действительными и наблюдаемыми рангами.

2. Найти коэффициент ранговой корреляции между урожайностью пшеницы и картофеля на соседних полях по следующим данным:

Годы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Пшеница	**20,1**	**23,6**	**26,3**	**19,9**	**16,7**	**23,2**	**31,4**	**33,5**	**28,2**	**35,3**	**29,3**	**30,5**
Картофель	**7,2**	**7,1**	**7,4**	**6,1**	**6,0**	**7,3**	**9,4**	**9,2**	**8,8**	**10,4**	**8,0**	**9,7**

Проверить значимость коэффициента корреляции при $\alpha = 0{,}01$.

3. Измерения длины головы (x) и длины грудного плавника (y) у 16 окуней дали результаты (в мм):

x	66	61	67	73	51	59	48	47	58	44	41	54	52	47	51	45
y	38	31	36	43	29	33	28	25	36	26	21	30	20	27	28	26

Найти коэффициент ранговой корреляции. Проверить значимость полученного результата при $\alpha = 0{,}05$.

4. Результаты работы семи вновь принятых сотрудников брокерской компании, которые оценивались путем сдачи теста на профессиональную пригодность и по отдаче с каждого инвестированного ими рубля:

Молодые специалисты	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Результаты теста	3	2	6	4	1	7	5
Отдача с рубля	1	3	5	2	4	6	7

Вычислить ранговый коэффициент корреляции Спирмена и оценить его значимость при $\alpha = 0{,}05$.

5. Два товароведа расположили девять мотков пряжи в порядке убывания толщины нити. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	4	1	5	3	2	6	9	8	7

Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами x_i и y_i.

6. Специалисты двух заводов проранжировали 11 факторов, влияющих на ход технологического процесса. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

Определить, согласуются ли мнения специалистов различных заводов, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

7. Два преподавателя оценили знания 12 учащихся по стобальной системе и выставили им следующие оценки (в первой строке указано количество баллов, выставленных первым преподавателем, а во второй – вторым):

98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
99	91	93	74	78	65	64	66	52	53	48	62

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками двух преподавателей.

8. Два контролера A и B расположили образцы изделий, изготовленных девятью мастерами, в порядке ухудшения качества (в скобках помещены порядковые номера изделий одинакового качества):

(A) 1 2 (3, 4, 5) (6, 7, 8, 9)

(B) 2 1 4 3 5 (6, 7) 8 9

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между рангами изделий, присвоенными им двумя контролерами.

9. Два инспектора A и B проверили 12 водителей на быстроту реакции и расположили их в порядке ухудшения реакции (в скобках помещены порядковые номера водителей с одинаковой реакцией):

(A) 1 (2, 3, 4) 5 (6, 7, 8) 9 10 11 12

(B) 3 1 2 6 4 5 7 8 11 10 9 12

Найти выборочный коэффициент ранговый корреляции Спирмена между рангами водителей, присвоенными им двумя инспекторами.

« α ». Три арбитра оценили мастерство 10 спортсменов, в итоге были получены три последовательности рангов (в первой строке приведены ранги арбитра A, во второй – ранги арбитра B, в третьей – ранги арбитра C):

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
z_i	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Определить пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются, используя коэффициент ранговый корреляции Спирмена.

Решение варианта « α »

Выпишем последовательности рангов первого и второго арбитров:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4

Найдем разности рангов $d_1 = x_1 - y_1 = 1 - 3 = -2$, $d_2 = x_2 - y_2 = 2 - 10 = -8$. Аналогично находим $d_3 = 3 - 7 = -4$; $d_4 = 4 - 2 = 2$; $d_5 = 5 - 8 = -3$;

$d_6 = 6 - 5 = 1$; $d_7 = 7 - 6 = 1$; $d_8 = 8 - 9 = -1$; $d_9 = 9 - 1 = 8$; $d_{10} = 10 - 4 = 6$. Вычислим сумму квадратов разностей рангов

$$\sum d_i^2 = 4 + 64 + 16 + 4 + 9 + 1 + 1 + 1 + 64 + 36 = 200.$$

Коэффициент ранговый корреляции Спирмена между *n*-ой и *k*-ой последовательностями рангов находим по формуле

$$\rho_{n,k} = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n^3 - n};$$

$$\rho_{1,2} = 1 - \frac{6 \cdot 200}{1000 - 10} = 1 - \frac{1200}{990} = 1 - 1{,}21 = -0{,}21.$$

Выпишем последовательности рангов первого и третьего арбитров:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

$$\sum d_i^2 = (1-6)^2 + (2-2)^2 + (3-1)^2 + (4-3)^2 + (5-9)^2 + (6-4)^2 + (7-5)^2 + (8-7)^2 +$$
$$+ (9-10)^2 + (10-8)^2 = 25 + 0 + 4 + 1 + 16 + 4 + 4 + 1 + 1 + 4 = 60;$$

$$\rho_{1,3} = 1 - \frac{6 \cdot 60}{1000 - 10} = 1 - \frac{360}{990} = 1 - \frac{4}{11} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64.$$

Выпишем последовательности рангов второго и третьего арбитров:

y_i	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
z_i	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

$$\sum d_i^2 = 9 + 64 + 36 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 81 + 16 = 214.$$

$$\rho_{2,3} = 1 - \frac{6 \cdot 214}{990} = -0{,}30.$$

Наибольший по модулю коэффициент корреляции $\rho_{1,3} = 0{,}64$, следовательно, наиболее согласованы арбитры 1 и 3.

Ответ. Наиболее согласованы арбитры 1 и 3.

Задание 12.

По заданной корреляционной таблице определить:

1. Числовые характеристики выборки $\overline{X}, \overline{Y}, \sigma_x, \sigma_y$.
2. Условные средние $\overline{Y}_x, \overline{X}_y$.
3. Коэффициент корреляции и детерминации.
4. Корреляционные отношения $\eta_{y/x}$ и $\eta_{x/y}$.

5. Построить корреляционное поле.
6. Параметры эмпирической линейной функции регрессии Y на X и X на Y.
7. Точечную оценку условной средней $\overline{Y}_x$ по X^*.

Принять $\alpha = 0{,}1$.

0.

Y / X	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	n_x
16 – 18	1	2				3
18 – 20	1	2	4			7
20 – 22		4	3	9		16
22 – 24		2	5	6		13
24 – 26			1	7	1	9
26 – 28				1	1	2
n_y	2	10	13	23	2	50

$X^* = 24$

1.

Y / X	14 – 18	18 – 22	22 – 26	26 – 30	30 – 34	34 – 38	n_x	
17 – 19	2	1					3	
19 – 21	1	3	3				7	
21 – 23		3	4	8			15	
23 – 25			3	6	7		16	
25 – 27				1	5	1	7	
27 – 29					1	1	2	
n_y	3	7	10	15	13	2	50	$X^* = 25$

2.

Y / X	10 – 14	14 – 18	18 – 22	22 – 26	26 – 30	30 – 34	n_x
15 – 25	3	4					7
25 – 35		2	6				8
35 – 45			3	50	4		57
45 – 55			2	8	6		16
55 – 65				3	7	2	12
n_y	3	6	11	61	17	2	100

$X^* = 17$

3.

Y / X	10 – 16	16 – 22	22 – 28	28 – 34	34 – 40	n_x
14 – 20	3					3

20 – 26	7	2	3			12
26 – 32	2	8	50			60
32 – 38		6	4	2		12
38 – 44				6	3	9
44 – 50					4	4
n_y	12	16	57	8	7	100

$X^* = 35$

4.

Y / X	6 – 16	16 – 26	26 – 36	36 – 46	46 – 56	n_x
0 – 12	4					4
12 – 24	7	2	5			14
24 – 36	8	8	40	6		62
36 – 48		7	5	2		14
48 – 60				2	2	4
60 – 72				1	1	2
n_y	19	17	50	11	3	100

$X^* = 55$

5.

Y / X	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	n_x
10 – 14	1	2				3
14 – 18		4	10			14
18 – 22		2	20	8		30
22 – 26				2	1	3
n_y	1	8	30	10	1	50

$X^* = 15$

6.

Y / X	14 – 24	24 – 34	34 – 44	44 – 54	54 – 64	64 – 74	n_x
12 – 14	1	2					3
14 – 16		1	2	3			6
16 – 18			4	24	4		32
18 – 20		1	1	3	2	1	8
20 – 22						1	1
n_y	1	4	7	30	6	2	50

$X^* = 22$

7.

Y / X	16 – 28	28 – 40	40 – 52	52 – 64	64 – 76	76 – 88	n_x
10 – 13	2						2
13 – 16	2	2	2				6
16 – 19	3	4	25	2			34
19 – 22		1	2	1	3		7
22 – 25						1	1
n_y	7	7	29	3	3	1	50

$X^* = 24$

8.

Y / X	24 – 30	30 – 36	36 – 42	42 – 48	48 – 54	54 – 60	n_x
10 – 15	2	2	2				6
15 – 20		2	2	8			12
20 – 25				15	10		25
25 – 30					4	2	6
30 – 35						1	1
n_y	2	4	4	23	14	3	50

$X^* = 21$

9.

Y / X	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48	n_x
30 – 40					1	1	2
40 – 50				1	3		4
50 – 60			2	8	20		30
60 – 70		6	15	3			24
70 – 80	5	7	3	6			21
80 – 90	3	5	5				13
90 – 100	4	2					6
n_y	12	20	25	18	24	1	100

$X^* = 63$

«α».

Y / X	20 – 26	26 – 32	32 – 38	38 – 44	44 – 50	50 – 56	n_x
11 – 15	2	2	3				7
15 – 19	1	2	4				7
19 – 23		2	14	7			23
23 – 27				5	2	1	8
27 – 31				2	2	1	5
n_y	3	6	21	14	4	2	50

$X^* = 28$

Решение варианта « α »

Заменим каждый интервал его серединой и составим расчетную таблицу (см. на следующей странице):

1. Находим характеристики выборки:

$$\overline{X}=\frac{\sum x\cdot n_x}{\sum n_x}=\frac{1038}{50}=20{,}76;\quad \overline{X^2}=\frac{\sum x^2\cdot n_x}{\sum n_x}=\frac{22\,554}{50}=451{,}08;$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum y\cdot n_y}{\sum n_y}=\frac{1846}{50}=36{,}92;\quad \overline{Y^2}=\frac{\sum y^2\cdot n_y}{\sum n_y}=\frac{70\,346}{50}=1406{,}92;$$

$$D(X)=\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2=451{,}08-(20{,}76)^2=451{,}08-430{,}9776=20{,}1024;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{20{,}1024}\approx 4{,}48;$$

$$D(Y)=\overline{Y^2}-\left(\overline{Y}\right)^2=1406{,}92-(36{,}92)^2=43{,}8336;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 6{,}62.$$

2. Находим условные средние $\overline{Y}_x$:

$$\overline{Y}_{x=13}=\frac{23\cdot 2+29\cdot 2+35\cdot 3}{7}=\frac{209}{7}\approx 29{,}86;$$

$$\overline{Y}_{x=17}=\frac{23\cdot 1+29\cdot 2+35\cdot 4}{7}=\frac{221}{7}\approx 31{,}57;$$

$$\overline{Y}_{x=21}=\frac{29\cdot 2+35\cdot 14+41\cdot 7}{23}=\frac{835}{23}\approx 36{,}30;$$

$$\overline{Y}_{x=25}=\frac{41\cdot 5+47\cdot 2+53\cdot 1}{8}=\frac{352}{8}=44{,}00;$$

$$\overline{Y}_{x=29}=\frac{41\cdot 2+47\cdot 2+53\cdot 1}{5}=\frac{229}{5}=45{,}80.$$

Условные средние $\overline{X}_y$:

Y / X	23	29	35	41	47	53	n_x	$x \cdot n_x$	$x^2 \cdot n_x$	$\sum Yn_{ij}$	$X \cdot \sum Yn_{ij}$
13	2	2	3	–	–	–	7	91	1183	$23 \cdot 2 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 209$	2717
17	1	2	4	–	–	–	7	119	2023	$23 \cdot 1 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 4 = 221$	3757
21	–	2	14	7	–	–	23	483	10 143	$29 \cdot 2 + 35 \cdot 14 + 41 \cdot 7 = 835$	17 535
25	–	–	–	5	2	1	8	200	5000	$41 \cdot 5 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1 = 352$	8800
29	–	–	–	2	2	1	5	145	4205	$41 \cdot 2 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1 = 229$	6641
n_y	3	6	21	14	4	2	50	1038	22 554		39 450
$Y \cdot n_y$	69	174	735	574	188	106	1846				
$Y^2 \cdot n_y$	1587	5046	25 725	23 534	8836	5618	70 346				

$$\overline{X}_{y=23} = \frac{13 \cdot 2 + 17 \cdot 1}{3} = \frac{43}{3} \approx 14{,}33;$$

$$\overline{X}_{y=29} = \frac{13 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 21 \cdot 2}{6} = \frac{102}{6} = 17{,}00;$$

$$\overline{X}_{y=35} = \frac{13 \cdot 3 + 17 \cdot 4 + 21 \cdot 14}{21} = \frac{39 + 68 + 294}{21} = \frac{401}{21} \approx 19{,}10;$$

$$\overline{X}_{y=41} = \frac{21 \cdot 7 + 25 \cdot 5 + 29 \cdot 2}{14} = \frac{147 + 125 + 58}{14} = \frac{330}{14} \approx 23{,}57;$$

$$\overline{X}_{y=47} = \frac{25 \cdot 2 + 29 \cdot 2}{4} = \frac{108}{4} = 27{,}00;$$

$$\overline{X}_{y=53} = \frac{25 \cdot 1 + 29 \cdot 1}{2} = \frac{54}{2} = 27{,}00.$$

3. Находим коэффициенты корреляции и детерминации.
Коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\overline{XY} = \frac{\sum X \sum Y \cdot n_{ij}}{\sum \sum n_{ij}} = \frac{39\,450}{50} = 789;$$

$$r = \frac{789 - 20{,}76 \cdot 36{,}92}{4{,}48 \cdot 6{,}62} = \frac{789 - 766{,}4592}{29{,}6576} \approx 0{,}76.$$

Коэффициент детерминации: $r^2 = 0{,}76^2 \approx 0{,}58$.

4. Корреляционные отношения:

$$\eta_{Y/X} = \frac{\sigma_{\overline{Y}_x}}{\sigma_Y};$$

$$\sigma_{\overline{Y}_x} = \sqrt{\frac{\sum \left(\overline{Y}_x - \overline{Y}\right)^2 \cdot n_x}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(29{,}86 - 36{,}92)^2 7 + (31{,}57 - 36{,}92)^2 7 + (36{,}30 - 36{,}92)^2 23 + (44 - 36{,}92)^2 8 + (45{,}80 - 36{,}92)^2 5}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{348{,}91 + 200{,}36 + 8{,}84 + 401{,}01 + 394{,}27}{50}} = 5{,}20.$$

$$\eta_{Y/X} = \frac{5{,}20}{6{,}62} \approx 0{,}79.$$

$$\eta_{X/Y} = \frac{\sigma_{\overline{X}_y}}{\sigma_X}.$$

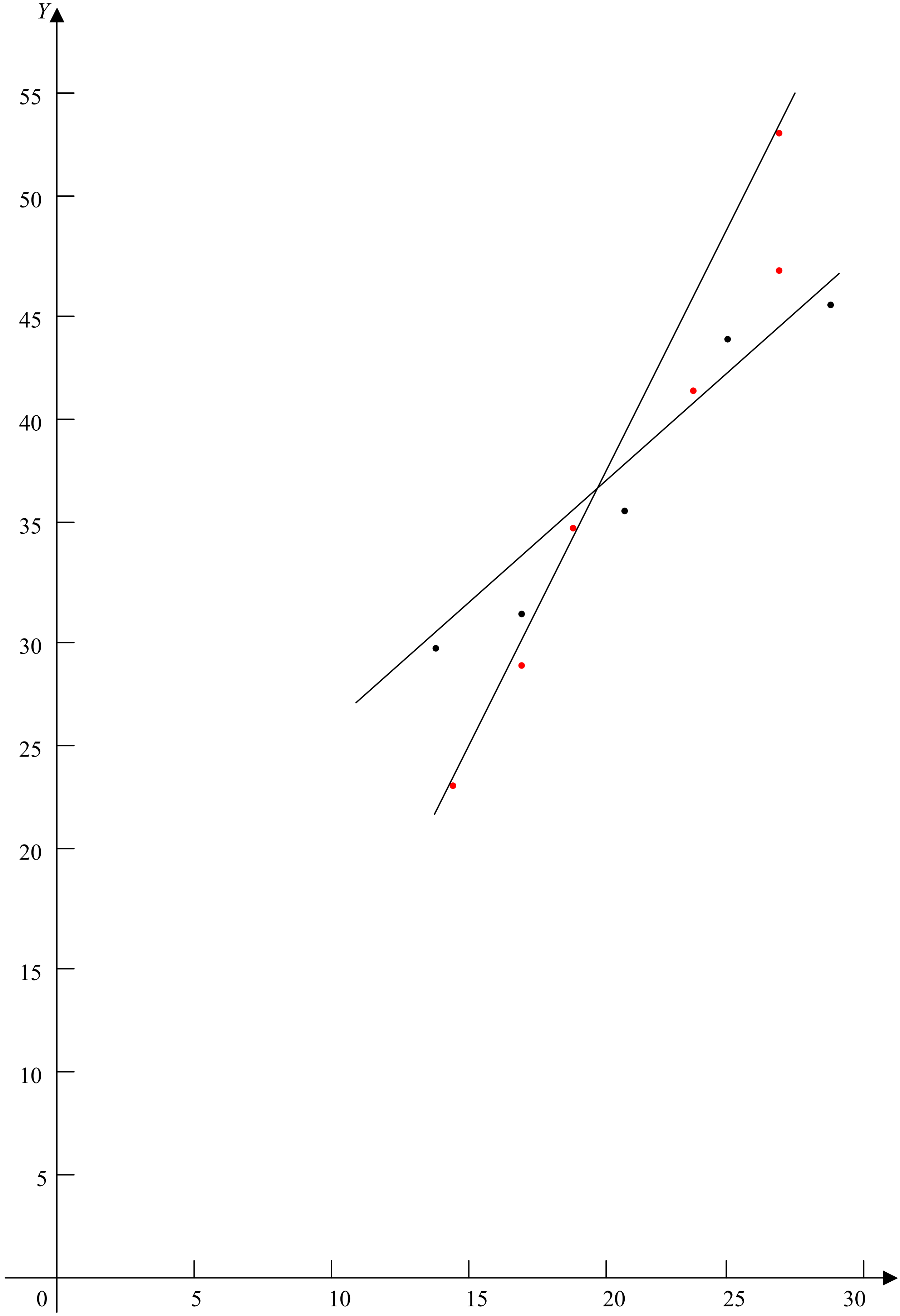
$$\sigma_{\overline{X}_y} = \sqrt{\frac{\sum\left(\overline{X}_y - \overline{X}\right)^2 \cdot n_y}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(14{,}33 - 20{,}76)^2 3 + (17 - 20{,}76)^2 6 + (19{,}10 - 20{,}76)^2 21 + (23{,}57 - 20{,}76)^2 14 + (27 - 20{,}76)^2 4 + (27 - 20{,}76)^2 2}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{124{,}03 + 84{,}83 + 57{,}87 + 110{,}55 + 155{,}75 + 77{,}88}{50}} = \sqrt{\frac{610{,}91}{50}} \approx 3{,}50.$$

$$\eta_{X/Y} = \frac{3{,}50}{4{,}48} \approx 0{,}78.$$

5. Построим корреляционное поле.


Y
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30

6. Находим эмпирические линейные функции регрессии. Уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$$\overline{Y}_x - \overline{Y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right);$$

$$\overline{Y}_x - 36{,}92 = 0{,}76 \cdot \frac{6{,}62}{4{,}48}\left(x - 20{,}76\right);$$

$$\overline{Y}_x - 36{,}92 = 1{,}12\left(x - 20{,}76\right);$$

$$\overline{Y}_x = 1{,}12 \cdot x + 13{,}67\,.$$

Уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\overline{X}_y - \overline{X} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}\right);$$

$$\overline{X_y} - 20{,}76 = 0{,}76 \cdot \frac{4{,}48}{6{,}62}\left(y - 36{,}92\right);$$

$$\overline{X}_y - 20{,}76 = 0{,}51y - 18{,}99\,;$$

$$\overline{X}_y = 0{,}51y + 1{,}77\,.$$

7. Найдем остаточную сумму квадратов для обоих уравнений регрессии:

$$S_1^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum\left(\overline{Y}_x - \left(ax_i + b\right)\right)^2 n_x = \frac{1}{48}\Big(\left(29{,}86 - 1{,}12 \cdot 13 - 13{,}67\right)^2 \cdot 7 +$$
$$+ \left(31{,}57 - 1{,}12 \cdot 17 - 13{,}67\right)^2 \cdot 7 - \left(36{,}30 - 1{,}12 \cdot 21 - 13{,}67\right)^2 \cdot 23 +$$
$$+ \left(44 - 1{,}12 \cdot 25 - 13{,}67\right)^2 \cdot 8 + \left(45{,}80 - 1{,}12 \cdot 29 - 13{,}67\right)^2 \cdot 5\Big) =$$
$$= \frac{1}{48}\left(18{,}60 + 9{,}10 + 18{,}22 + 43{,}43 + 0{,}61\right) \approx 1{,}87; \quad S_1 \approx 1{,}37.$$

$$S_2^2=\frac{1}{n-2}\cdot\sum\left(\overline{X}_y-(cy+d)\right)^2 n_y=\frac{1}{48}\Big(\left(14{,}33-0{,}51\cdot 23-1{,}77\right)^2\cdot 3+$$
$$+\left(17{,}0-0{,}51\cdot 29-1{,}77\right)^2\cdot 6-\left(19{,}1-0{,}51\cdot 35-1{,}77\right)^2\cdot 21+$$
$$+\left(23{,}57-0{,}51\cdot 41-1{,}77\right)^2\cdot 14+\left(27-0{,}51\cdot 47-1{,}77\right)^2\cdot 4+$$
$$+\left(27-0{,}51\cdot 53-1{,}77\right)^2\cdot 2\Big)=\frac{1}{48}\left(2{,}07+1{,}16+5{,}68+11{,}09+6{,}35+6{,}48\right)\approx 0{,}68;$$
$$S_2\approx 0{,}82.$$
$$Q_x=\sum x^2 n_x-\frac{\left(\sum x\cdot n_x\right)^2}{n}=22\,554-\frac{1038^2}{50}=1005{,}12\,;$$

$$Q_y=\sum y^2 n_y-\frac{\left(\sum y\cdot n_y\right)^2}{n}=70346-\frac{1846^2}{50}=2191{,}68\,.$$

Границы для доверительных интервалов коэффициентов регрессии можно найти по формулам:

$$\tilde{\rho}_{y/x}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot S_1\cdot\sqrt{\frac{1}{Q_x}}\,;$$
$$\tilde{\rho}_{x/y}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot S_2\cdot\sqrt{\frac{1}{Q_y}}\,;$$

где $\tilde{\rho}_{y/x}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$; $\tilde{\rho}_{x/y}=r\cdot\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$; $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ – квантиль распределения Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы.

Итак,

$$\rho_{y/x}\in\left(1{,}12-t_{0{,}95}(48)\cdot 1{,}37\sqrt{\frac{1}{1005{,}12}};\quad 1{,}12+t_{0{,}95}(48)\cdot 1{,}37\sqrt{\frac{1}{1005{,}12}}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\rho_{y/x}\in\left(1{,}12-2{,}01\cdot 1{,}37\cdot 0{,}03;\quad 1{,}12+2{,}01\cdot 1{,}37\cdot 0{,}03\right)\Rightarrow\rho_{y/x}\in\left(1{,}04;\quad 1{,}20\right).$$

$$\rho_{x/y}\in\left(0{,}51-2{,}01\cdot 0{,}82\sqrt{\frac{1}{2191{,}68}};\quad 0{,}51+2{,}01\cdot 0{,}82\sqrt{\frac{1}{2191{,}68}}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(0{,}51-0{,}035;\quad 0{,}51+0{,}035\right)\Rightarrow\rho_{x/y}\in\left(0{,}47;\quad 0{,}55\right).$$

8. Точечную оценку $\overline{Y_x}$ найдем, подставив в уравнение регрессии $\overline{y}_x=1{,}12x+13{,}67$ значение $X^*=28$: $\overline{Y}_x=1{,}12\cdot 28+13{,}68=45{,}04\,.$

Ответ.
$\overline{X} = 20{,}76; \overline{Y} = 36{,}92; \sigma_x = 4{,}48; \sigma_y = 6{,}62; \overline{Y_x} = 29{,}86; \overline{X_y} = 14{,}33; r = 0{,}76;$
$r^2 = 0{,}58; \eta_{y/x} = 0{,}79; \eta_{x/y} = 0{,}78; \overline{Y}_x = 1{,}12 \cdot x + 13{,}67; \overline{X}_y = 0{,}51y + 1{,}7;$
$\overline{Y_x} = 45{,}04$ при $X^* = 28$.

Приложение 1

1. Значения* функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3980	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

* Все значения умножены на 10 000.

Приложение 2

2. Значения* функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40387	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	85547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	87798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

* Все значения умножены на 100 000.