

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Л.П.Минченкова, Г.Г. Соклакова

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Методические рекомендации и варианты заданий
Для студентов-заочников ФП

Минск 2005

ТРЕБОВАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студент должен выполнить контрольную работу, строго придерживаясь указанных ниже правил. Работа, выполненная без их соблюдения, к защите не допускается и возвращается студенту на доработку.

Номер варианта выполненной контрольной работы должен совпадать с последней цифрой номера зачетной книжки студента. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту заданий, не зачитывается.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы должны быть разборчиво написаны фамилии и инициалы студентов, номер зачетной книжки (шифр), номер группы, номер контрольной работы. Заголовок работы нужно поместить на обложке тетради, здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес студента.

3. Условия всех задач нужно записывать полностью. В том случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными из соответствующего номера варианта.

4. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.

5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

6. В конце работы нужно указать использованную литературу.

7. После получения отрецензированной работы студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и вернуть ее на повторное рецензирование. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

№ варианта	Номера задач				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
10	10	20	30	40	50

2. Вопросы программы по курсу основы высшей математики

1. Математические доказательства. Методы доказательств.
2. Множества, отношения, отображения: числа, конечные и бесконечные множества.
3. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания.
4. Формулы для вычисления числа перестановок, размещений и сочетаний. Свойства сочетаний.
5. Случайные события и их классификация.
6. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.
7. Статистическое определение вероятности.
8. Теорема сложения вероятностей.
9. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
10. Формула полной вероятности.
11. Формулы Байеса.
12. Случайные величины непрерывного типа.
13. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
14. Нормальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону.
15. Выражение функции распределения нормальной случайной величины через функцию Лапласа.
16. Три типа задач, решаемых на нормальный закон распределения. Правило трех сигм.
17. Основные числовые характеристики статистического распределения.
18. Выборочный метод.
19. Интервальное оценивание. Формула доверительной вероятности для большой и малой повторных выборок.
20. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости, критическая область. Критерий согласия и его мощность.
21. Проверка гипотезы о значении среднего значения для нормально распределенной величины при известной и неизвестной генеральной дисперсии.
22. Прямые регрессии. Коэффициенты линейной регрессии.

4. Рекомендуемая литература

1. Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Учебный курс. Математика для юристов. М., изд-во ЮРАЙТ, 2000.
2. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика. Для экономистов. Том 1. Учебник для вузов. Мн.: ООО «Элайда», 2003.
3. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Общий курс. Мн., Выш. шк., 1976.
4. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Выш.шк., 1969.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. М., изд-во «Наука», 1978.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Во время процедуры опознания двух подозреваемых посадили на скамью вместе с восемью другими лицами. Какова вероятность того, что на скамье между подозреваемыми окажутся ровно 3 человека?

2. Преступник знает, что шифр сейфа составлен из цифр 1, 3, 7, 9, но не знает, в каком порядке их набрать. Какова вероятность того, что преступник откроет сейф с первой попытки? Какова вероятность того, что первые две цифры он набрал верно?

3. Для включения в избирательный бюллетень нужно выбрать 8 из 10 кандидатов. Какова вероятность того, что в бюллетень попадет интересующий нас кандидат, если все кандидаты имеют одинаковые шансы?

4. На шести одинаковых карточках написаны буквы К, И, Т, Н, У, П. Из них случайным образом выбирают карточки одну за другой и приставляют одну к другой. Какова вероятность того, что получается слово «путник»?

5. Студенту нужно сдать в сессию три экзамена: по гражданскому праву, по теории вероятностей и хозяйственному праву. Вероятность сдать эти экзамены соответственно равны 0,6; 0,4; 0,7. Найти вероятность, что студент сдаст сессию.

6. Ведутся поиски трех преступников. Каждый из них независимо от других может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

7. Вероятность обнаружения преступника A равна 0,4, преступника

$B = 0,6$. Найти вероятность того, что только один преступник будет обнаружен?

8. В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе 6 – за кражу. В порядке прокурорского надзора проверено 10 % дел. Какова вероятность того, что в их числе оказалось два дела по обвинению краже?

9. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,06. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,08. Предполагая, что оба события независимы, определить вероятность того, что потребитель увидит: а) обе рекламы; б) хотя бы одну рекламу?

10. В большой рекламной фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы – женщины, из них 6,4 % работников – женщины, получающие высокую заработную плату. Можно ли утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Задачи 11 – 15. Количество акций, представленных четырьмя различными предприятиями на наличный рынок, относятся как $m_1 : m_2 : m_3 : m_4$. Вероятность того, что акции будут котироваться по 25 тыс. руб. за штуку для этих предприятий соответственно равны p_1, p_2, p_3 и p_4 . Известно, что цена случайно выбранной акции составила 25 тыс. руб. Найти вероятность того, что эта акция представлена i -м предприятием.

№ задачи	Параметры								
	m_1	m_2	m_3	m_4	p_1	p_2	p_3	p_4	$i = \overline{1,4}$
11	3	5	4	8	0,6	0,7	0,8	0,5	$i = 1$
12	5	4	1	10	0,5	0,6	0,7	0,8	$i = 2$
13	3	7	5	5	0,4	0,3	0,6	0,7	$i = 4$
14	4	6	7	3	0,5	0,6	0,7	0,8	$i = 3$
15	5	7	6	2	0,7	0,8	0,85	0,9	$i = 1$

Задачи 16 – 20. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс А (мало рискует), класс В (рискует средне), класс С (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее $P_1\%$ принадлежит к классу А, $P_2\%$ – к классу В и $P_3\%$ – к классу С. Вероятность того, что в течение 12 месяцев водитель класса А попадает хотя бы в одну автомобильную катастрофу равна q_1 , для водителя класса В эта вероятность равна q_2 , а для водителя класса С – q_3 . Водитель автолюбителя X страхует свою машину у этой компании и в течение 12

месяцев попадает в автомобильную катастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу А? к классу В? к классу С?

№ задачи	Параметры					
	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2	q_3
16	30	50	20	0,001	0,003	0,009
17	31	52	17	0,002	0,004	0,01
18	32	52	16	0,003	0,005	0,011
19	35	51	14	0,001	0,004	0,008
20	27	48	25	0,06	0,09	0,014

21. Дневная добыча угля в некоторой шахте есть случайная величина X , распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 785 т и стандартным отклонением 60 т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 8000 т. угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750 до 850 т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 665 т.

22. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 48 у.е., и средним квадратическим отклонением, равным 6. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена на акцию была: а) более 60 у.е.; б) ниже 60 за акцию; в) выше 40 за акцию; г) от 40 до 50 у.е. за акцию.

23. Известно, что прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением $a = 9 \%$ и стандартным отклонением $\sigma = 2,6 \%$. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки: а) превышает 11%; б) окажется менее 14%; в) будет в пределах от 12 до 15 %.

24. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma = 560$ и неизвестным математическим ожиданием. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12 439. Найдите ожидаемое среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

25. Еженедельный выпуск продукции на заводе приблизительно распределен по нормальному закону со средним значением, равным 134 786 ед. продукции в неделю и стандартным отклонением 13 000 ед. Найдите вероятность того, что еженедельный выпуск продукции: а) превысит 15 000

ед.; б) окажется ниже 100 000 ед. в данную неделю; в) предположим, что возникли трудовые споры, и еженедельный выпуск продукции стал ниже 80 000 ед. Менеджеры обвиняют профсоюз в беспрецедентном падении выпуска продукции, а профсоюз утверждает, что выпуск продукции находится в пределах принятого уровня ($\pm 3\sigma$). Можно ли доверять профсоюзу?

26. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше, чем 4,9 т и 25 % – меньше, чем 4,2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнеров.

27. Компания *A* покупает у компании *B* детали к контрольным приборам. Каждая деталь имеет точно установленный размер. Деталь, размер которой отличается от установленного размера более чем на 0,25 мм, считается дефектной. Компания *A* требует от компании *B*, чтобы доля брака не превышала 1 % деталей. Если компания *B* выполняет требования компании *A*, то каким должно быть допустимое максимальное стандартное отклонение размеров деталей? Учесть, что размер деталей есть случайная величина, распределенная по нормальному закону.

28. Эксперимент показал, что стандартное отклонение срока службы автопокрышек фактически остается постоянным от партии к партии и составляет 2 500 км. Если компания хочет, чтобы 80 % выпускаемых автопокрышек имели срок службы не менее 25 000 км, то какой наименьший средний срок службы автопокрышек должен быть заложен в расчетах технического отдела? Считать срок службы автопокрышек нормально распределенным.

29. Менеджер торгово-посреднической фирмы получает жалобы от некоторых клиентов на то, что служащие фирмы затрачивают слишком много времени на выполнение их заказов. Собрав и проанализировав соответствующую информацию, он выяснил, что среднее время выполнения заказа составляет 6,6 дн., однако, для выполнения 20 % заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, определите фактическое стандартное отклонение времени обслуживания клиентов.

30. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков % коробок, масса которых превышает 940 г? Учесть, что масса коробок есть случайная величина, распределенная по нормальному закону.

31. С целью изучения размеров дневной выручки в сфере мелкого частного бизнеса была произведена 10%-я случайная бесповторная выборка из 1000 торговых киосков города. В результате были получены данные о средней дневной выручке, которая составила 500 у.е. В каких пределах с доверительной вероятностью 0,95 может находиться средняя дневная выручка всех торговых точек изучаемой совокупности, если среднее квадратическое отклонение составило 150 у.е.?

32. Для оценки числа безработных среди рабочих одного из районов города в порядке случайной повторной выборки собраны 400 человек рабочих специальностей. 25 из них оказались безработными. Используя 95%-й доверительный интервал, оцените истинные размеры безработицы среди рабочих этого района.

33. Выборочные обследования показали, что доля покупателей, предпочитающих новую модификацию товара A , составляет 60 % от общего числа покупателей данного товара. Каким должен быть объем выборки, чтобы можно было получить оценку генеральной доли с точностью не менее 0,05 при доверительной вероятности 0,90?

34. Выборочное обследование деятельности коммерческих банков региона показало, что в среднем каждый банк имеет 10 филиалов в регионе (со стандартным отклонением, равным 5). Найдите объем выборки, позволивший сделать такую оценку, если предельная ошибка по выборочной средней находится в пределах 20 % от ее фактического значения, а доверительная вероятность составляет 0,95.

35. Из партии, содержащей 8000 телевизоров, отобрано 800. Среди них оказалось 90 % удовлетворяющих стандарту. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена доля телевизоров, удовлетворяющих стандарту, во всей партии для повторной и бесповторной выборок.

36. Партия изделий считается годной к выпуску, если брак в ней не превышает 3 %. Из партии в 2000 изделий было отобрано и проверено 400. При этом бракованных изделий оказались 6. Какова вероятность того, что вся партия удовлетворяет техническим условиям и может быть принята?

37. Из 400 коммерческих фирм налоговой инспекцией было проверено 100, сокрытие налогов среди которых приведено в таблице

Сумма, тыс. р.	Количество фирм
40 – 42	7
42 – 44	24
44 – 46	38
46 – 48	19
48 – 50	12
	$n = 100$

Найти доверительную вероятность того, что среднее сокрытие налогов всех 400 фирм отличается от выборочного среднего не более чем на 0,4 тыс. р. Рассмотреть случаи повторной и бесповторной выборок.

38. Аудиторская фирма желает проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайным образом отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.

39. Выборочные обследования малых предприятий города показали, что 95 % малых предприятий в выборке относятся к негосударственной форме собственности. Приняв доверительную вероятность равной 0,954, определите, в каких границах находится доля негосударственных малых предприятий в генеральной совокупности, если в выборку попало 100 предприятий?

40. Выборочно обследовали качество кирпича. Из 1600 проб в 32 случаях кирпич оказался бракованным. Требуется определить, в каких пределах заключается доля брака во всей продукции, если результат необходимо гарантировать с вероятностью $\gamma = 0,954$.

В задачах 41 – 50 по заданной корреляционной таблице определить:

- 1) числовые характеристики \bar{X} , \bar{Y} , σ_x , σ_y ;
- 2) коэффициент корреляции;
- 3) уравнения прямых регрессий X на Y и Y на X .

41.

$Y \backslash X$	12	16	20	24	28	32	n_x
20	3	4					7
30		2	6				8
40			3	50	4		57
50			2	8	6		16
60				3	7	2	12
n_y	3	6	11	61	17	2	100

42.

$Y \backslash X$	18	23	28	33	38	43	48	n_x
25		1						1
30	1	2	5					8
35		3	2	12				17
40			1	8	7			16
45					3	3		6
50						1	1	2
n_y	1	6	8	20	10	4	1	50

43.

$Y \backslash X$	5	10	15	20	25	30	35	n_x
27						6	1	7
32						4	2	6
37			8	10	5			23
42	3	4	3					10
47	2	1		1				4
52					3	1		4
57			1	1		2	2	6
n_y	5	5	12	12	8	13	5	60

44.

$Y \backslash X$	10	15	20	25	30	35	n_x
35	5	1					6
45		6	2				8
55			5	40	5		50
65			2	8	7		17
75				4	7	8	19
n_y	5	7	9	52	19	8	100

45.

$Y \backslash X$	12	14	16	18	20	22	n_x
23	2	4					6
25		6	2				8
27			3	50	2		55
29			1	10	6		17
31				4	7	3	14
n_y	2	10	6	64	15	3	100

В задачах 46 – 50 даны распределения личный доход X (у.е.) и личные сбережения Y (у.е.).

46.

$X \backslash Y$	30	40	50	60	70	80	n_y
15					11	7	18
20				3	1	1	5
25			3	32	6		41
30		10	14	3			27
35	1	2	6				9
n_x	1	12	23	38	18	8	100

47.

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
21	3	4					7
24		5	3				8
27			2	48	4		54
30			2	11	4		17
33				5	7	2	14
n_x	3	9	7	64	15	2	100

48.

$X \backslash Y$	41	44	47	50	53	56	59	n_y
18	4		6	7	8	3		28
23	5	4	2	10				21
28	5	6				2	3	16
33		6	5	4			2	17
38	5	1	2	4	3		3	18
n_x	19	17	15	25	11	5	8	100

49.

$X \backslash Y$	60	65	70	75	80	85	100	n_y
18	3	2						5
20		5	3					8
22			4	35	7			46
24			3	9	6	2		20
26				4	7	8	2	21
n_x	3	7	10	48	20	10	2	100

50.

$X \backslash Y$	65	70	75	80	85	90	95	n_y
12					10	6	2	18
22						4	1	5
32			2	7	4	2		15
42			1	25				26
52		4	6		1			11
62	1	5	8	2				16
72	1	2	6					9
n_x	2	11	23	34	15	12	3	100

Решение варианта "а".

Задача 1 "а". Из 20 кредитов, выдаваемых некоторым коммерческим банком, 6 льготных. Налоговый инспектор наугад проверяет 4 кредита. Какова вероятность того, что один из них льготный?

Решение. Обозначим события: A – событие, состоящее в том, что из 4 кредитов, выбранных случайным образом, один льготный. По определению вероятности события

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^1 \cdot C_{14}^3}{C_{20}^4} = \frac{728}{1615} = 0,4508.$$

Ответ: $P(A) = 0,4508$.

Задача 2 "а". Количество акций, представленных тремя различными предприятиями на наличный рынок, относится как 2 : 5 : 3. Вероятности того, что акции будут котироваться по 250 у.е. за каждую соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. Известно, что цена случайно выбранной акции оказалась равной 250 у.е. Найти вероятность того, что эта акция представлена третьим предприятием.

Решение. Обозначим через B – событие, состоящее в том, что цена случайно выбранной акции оказалась равной 250 у.е. Из условия задачи следует, что здесь возможны 3 гипотезы - A_1, A_2, A_3 , где

A_1 – акция представлена 1-ым предприятием, $P(A_1) = \frac{2}{10}$, $P(B/A_1) = 0,6$

A_2 – акция представлена 2-ым предприятием, $P(A_2) = \frac{5}{10}$, $P(B/A_2) = 0,7$.

A_3 – акция представлена 3-им предприятием, $P(A_3) = \frac{3}{10}$, $P(B/A_3) = 0,8$.

По формуле полной вероятности находим вероятность события B :

$$P(B) = \frac{2}{10} \cdot 0,6 + \frac{5}{10} \cdot 0,7 + \frac{3}{10} \cdot 0,8 = 0,12 + 0,35 + 0,24 = 0,71.$$

Затем по формуле Байеса находим искомую вероятность

$$P(A_3/B) = \frac{0,24}{0,71} = \frac{24}{71} = 0,3380.$$

Ответ: $P(A_3/B) = 0,3380$.

Задача 3 "а". На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туши – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с неизвестным математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma = 150$ кг. Известно, что 37,07 % туш имеют вес более 1000 кг. Определите ожидаемый вес случайно отобранной туши.

Решение. По условию задачи $\sigma = 150$, $P(X > 1000) = 0,3707$. Ожидаемый вес случайно отобранной туши – это среднеожидаемый вес (математическое ожидание), т.е. $a = ?$ Используем формулу расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X

$$P(1000 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{\infty - a}{150}\right) - \Phi\left(\frac{1000 - a}{150}\right) = 0,3707$$

или
$$\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{1000 - a}{150}\right) = 0,3707;$$

$$0,5 - \Phi\left(\frac{1000 - a}{150}\right) = 0,3707;$$

$$\Phi\left(\frac{1000 - a}{150}\right) = 0,5 - 0,3707 = 0,1293.$$

По таблице функции Лапласа находим $t = \frac{1000 - a}{150}$ функция $\Phi(t) = 0,1293$,

$$t = 0,33, \text{ отсюда } \frac{1000 - a}{150} = 0,33, \quad 1000 - a = 150 \cdot 0,33 = 50, \quad a = 1000 - 50 = 950.$$

Ответ: среднеожидаемый вес случайно отобранной туши составляет 950 кг.

Задача 4 "а". С помощью собственно-случайного повторного отбора руководство фирмы провело выборочное обследование 900 своих служащих. Средний стаж их работы в фирме равен 8,70 года, а среднее квадратическое (стандартное) отклонение – 2,70 года. Среди обследованных оказалось 270 женщин. Считая стаж работы служащих фирмы распределенным по нормальному закону, определите: а) с вероятностью 0,95 доверительный

интервал, в котором окажется средний стаж работы всех служащих фирмы;
 б) с вероятностью 0,90 доверительный интервал, накрывающий неизвестную долю женщин во всем коллективе фирмы.

Решение. а) Найдем границы доверительного интервала среднего стажа работы всего коллектива фирмы, т.е. границы доверительного интервала для генеральной средней.

По условию \bar{X} ; $\sigma = 2,70$; $n = 900$; $\gamma = 0,95$.

Используем формулу доверительной вероятности

$$P\left(\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}_0 < \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Находим t из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$, $\Phi(t) = 0,475$. По таблице функции Лапласа $t = 1,96$.

Найдем предельную ошибку выборки

$$\Delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \Delta = 1,96 \cdot \frac{2,7}{\sqrt{900}} = 0,1764,$$

$$\bar{X} - \Delta < \bar{x}_0 < \bar{X} + \Delta, \quad 8,5236 < \bar{x}_0 < 8,8764.$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно ожидать, что средний стаж работы всего коллектива фирмы находится в интервале от 8,5236 до 8,8764 года.

б) Теперь оценим истинное значение доли женщин во всем коллективе фирмы.

По условию $m = 270$; $n = 900$; $\gamma = 0,90$. Выборочная доля $W = 270/900 = 0,30$. Найдем предельную ошибку выборки

$$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}$$

Значение t находим по таблице функции Лапласа при условии $2\Phi(t) = 0,90$, $t = 1,64$.

$$\Delta = 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,30(1-0,30)}{900}} = 0,0251.$$

Находим доверительный интервал для генеральной доли

$$W - \Delta < P < W + \Delta$$

или

$$0,30 - 0,0251 < P < 0,30 + 0,0251;$$

$$0,2749 < P < 0,3251.$$

Итак, с вероятностью 0,90 можно ожидать, что доля женщин во всем коллективе фирмы находится в интервале от 0,2749 до 0,3251.

Ответ: можно ожидать, что с вероятностью 0,95 средний стаж работы всех служащих фирмы находится в интервале от 8,5236 до 8,8764 года. С вероятностью 0,90 можно гарантировать, что доля женщин во всем коллективе фирмы находится в интервале от 0,2749 до 0,3251.

Задача 5 "а". По данным таблицы необходимо найти:

- 1) числовые характеристики \bar{X} , \bar{Y} , σ_x , σ_y ;
- 2) коэффициент корреляции;
- 3) уравнения прямых регрессий X на Y и Y на X .

$Y \backslash X$	1	2	4	6	7	n_i
1	1	2	3			6
2		2	2	2		6
3			2	4	2	8
4				1	2	3
m_j	1	4	7	7	4	23

Решение. 1) По известным формулам находим числовые характеристики:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i n_i = \frac{1}{23} (1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3) = 2,35;$$

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{n} (y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4 + y_5 m_5) = \\ &= \frac{1}{23} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 4) = 4,65. \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2; \quad \sigma_y^2 = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2.$$

Находим $\overline{X^2}$ и $\overline{Y^2}$:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i^2 n_i = \frac{1}{23} (1 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 8 + 16 \cdot 3) = 6,52;$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^5 y_j^2 m_j = \frac{1}{23} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 7 + 36 \cdot 8 + 49 \cdot 4) = 25,087;$$

$$\sigma_x^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = 6,52 - (2,35)^2 = 1; \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 1;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = 25,087 - (4,65)^2 = 25,087 - 21,623 = 3,464; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y = \sqrt{3,464} = 1,86.$$

2). Теперь будем находить

$$r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Определим для полной задачи \overline{XY} :

$$\begin{aligned}\overline{XY} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot \sum_{j=1}^5 y_j m_{ij} = \frac{1}{23} (1 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3) + 2 \cdot (2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2) + \\ &+ 3 \cdot (4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 2) + 4 \cdot (6 \cdot 1 + 7 \cdot 2)) = \frac{1}{23} (1 \cdot 17 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 46 + 4 \cdot 20) = \\ &= \frac{282}{23} = 12,261;\end{aligned}$$

$$r = \frac{12,261 - 2,35 \cdot 4,65}{1 \cdot 1,86} = \frac{1,33}{1,86} = 0,72.$$

Определяем коэффициенты регрессии y на x и x на y :

$$\begin{aligned}\rho_{y/x} &= \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x^2} & \rho_{x/y} &= \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_y^2} \\ \rho_{y/x} &= \frac{12,261 - 2,35 \cdot 4,65}{1} \approx 1,33; \\ \rho_{x/y} &= \frac{12,261 - 2,35 \cdot 4,86}{3,15} = \frac{1,33}{1,86} \approx 0,717.\end{aligned}$$

Сделаем проверку

$$r = \sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}} = \sqrt{1,33 \cdot 0,717} \approx 0,72.$$

3). Уравнение регрессии Y на X находим в виде $\bar{Y}_x = ax + b$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + bx = \overline{XY}; \\ ax + b = \bar{Y}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6,52a + 2,35b = 12,26; \\ 2,35a + b = 4,65. \end{cases}$$

Или

$$a = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{X^2 - (\bar{X})^2}; \quad b = \frac{\overline{XY} \cdot \bar{X} - \bar{Y} \cdot X^2}{X^2 - (\bar{X})^2};$$

$$a = 1,33; \quad b = -2,495; \quad \bar{Y}_x = 1,33x - 2,495.$$

Аналогично для уравнения регрессии X на Y $\bar{X}_y = 0,717y + 0,42$.