Линейная алгебра

Лекция 1

Основные определения

Матрицей размера $n\times m$, где n-число строк, m-число столбцов, называется таблица элементов, расположенных в определенном порядке. В курсе высшей математики изучают числовые матрицы, элементами которых являются числа. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца. Сами матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A,B,C.

$$A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Матрицей-строкой (матрицей-столбцом) называется матрица, у которой число строк (столбцов) равно единице. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Пример 1.

$A=(2\ -1\ 3\ 5)$ – матрица-строка

$B=\begin{pmatrix} 1,4 \\ -8 \end{pmatrix}$ –матрица-столбец

$O_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ –нулевая матрица размера 3×2.

Если число столбцов матрицы равно числу строк (n=m), то матрица называется ***квадратной***.

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется ***диагональной*** матрицей.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется единичной и обозначается E_n

Если $a_{ij}= a_{ji}$, то матрица называется ***симметрической.***

Пример 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица

Матрицы A и B одного размера называются равными, если равны их соответствующие элементы $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ..., m$.

Основные операции над матрицами:

1. *Сложение и вычитание матриц*
2. *Умножение матрицы на число*
3. *Произведение матриц*
4. *Транспонирование матриц*
5. *Нахождение обратной матрицы*

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Суммой (разностью) матриц A и B одного и того же размера $n \times m$ является матрица, того же размера, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц A и B:
$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Записывают $C = A \pm B$.

Основные свойства:

1. $A + B = B + A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. если $C = A + B$, то $B=C-A$ и $A=C-B$
4. $A + O = A$, $A - A = O$, где O – нулевая матрица

Произведением матрицы A любого размера на произвольное число α называется матрица C того же размера, что и матрица A, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на это число α:

$$C_{n\times m} = \alpha A_{n\times m} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

Основные свойства:

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
2. $\alpha (A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$
3. $(\alpha \pm \beta) A = \alpha A \pm \beta A$
4. $1A = A$, $O A = O$

Пример 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

Решение. $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Произведением матрицы A размера $m \times s$ на матрицу B размера $s \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n. \quad (1.1)$$

Записывают $A \cdot B = C$;

Правило: *Чтобы получить элемент* c_{ij} *надо элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.*

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для ***согласованных*** матриц, ***число столбцов первой из которых равно числу строк второй.***

Основные свойства:

1)Умножение матриц в общем случае *не коммутативно*, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких-либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются ***перестановочными.*** Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.
$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойства:
$A \cdot O = O;\ \ O \cdot A = O$, где O – нулевая матрица.

2) Операция умножения матриц *ассоциативна*, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство: $(AB)C=A(BC)$.

3) Операция умножения матриц *дистрибутивна* по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:
$A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + BC.$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$

Пример 4. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3) = (2 + 16 + 3) = (21).$$

Пример 5. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

Решение. $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & 4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 16\end{pmatrix}$.

Пример 6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, найти A^3.

Решение. $A^2=AA=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}$;

$A^3=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Действительно, $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}$$

Матрицу A^T называют ***транспонированной*** для матрицы A, а переход от A к A^T ***транспонированием***, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}; \qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix};$$

другими словами, если в матрице A поменять местами столбцы и строки, сохранив порядок их следования, то получим транспонированную матрицу A^T.

Основные свойства операции транспонирования

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. Если определено произведение AB, то определено произведение B^TA^T и выполняется равенство: $(AB)^T=B^TA^T$
3. Если определена сумма $A+B$, то определена и сумма A^T+B^T и выполняется равенство: $(A+B)^T=A^T+B^T$
4. $\left(\alpha A^T\right)=\alpha A^T$

Пример 7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ и число $\alpha=2$. Найти $A^TB+\alpha C$.

Решение. $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $\quad A^TB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 10\end{pmatrix}$;

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем определить операцию нахождения обратной матрицы необходимо ввести понятие определителя (детерминанта) матрицы.

Определитель* – это числовая характеристика квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, обозначается символом $detA$, ΔA и др. Записывают определитель в виде такой же таблицы, как и матрицу, но ограниченной двумя вертикальными линиями:

$$detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Отметим, что $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Для вычисления определителя квадратной матрицы размера 2×2 существует, так называемое, правило «диагоналей»:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.2)$$

Для вычисления определителя квадратной матрицы размера 3×3 существует правило Саррюса или, так называемое, правило «диагоналей»:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}\right) \qquad (1.3)$$

В общем случае определитель может быть вычислен по одной из следующих рекуррентных формул:

- $detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i} M_{ik}$, (1.4)

  где i может принимать одно из следующих числовых значений: 1,2,…,n.
- $detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i} M_{ik}$, (1.5)

  где k может принимать одно из следующих числовых значений: 1,2,…,n.

---

* Термин «определитель» в современном его значении ввел О.Коши (1815), идея «определителя» восходит к Г.Лейбницу, который пришел к определителю (1693) при решении систем линейных уравнений. В 1750 метод определителей был вновь разработан Г. Крамером. В 1772 А.Вандермонд опубликовал первое обширное исследование, посвященное определителям. Первые полные изложения теории определителей даны в 1812 Ж.Бине и О.Коши.

Для указанной матрицы *A* число M_{ik} называется ***дополнительным минором*** элемента матрицы a_{ik}.

Дополнительным минором произвольного элемента a_{ik} квадратной матрицы *A* называется определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием *i*-ой строки и *k*-го столбца. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент квадратной матрицы имеет свой дополнительный минор.

Если в матрице *A* выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется ***минором*** матрицы *A*. Если выделено *s* строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка *s*. Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} квадратной матрицы *A* называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов, на пересечении которых расположен элемент a_{ik}.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Формулу (1.4) можно представить в виде:

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (1.4^*)$$

которая представляет разложение определителя по элементам произвольного *j*-го столбца.

Формулу (1.5) можно представить в виде:

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad (1.5^*)$$

которая представляет разложение определителя по элементам произвольной *i*-ой строки.

Разложение определителя по строке (столбцу) положено в основу индуктивного построения теории определителей. Эти формулы называются рекуррентными, поскольку для нахождения определителя *n*-го порядка необходимо знать определитель (*n-1*)-го порядка, для нахождения определителя (*n-1)*-го порядка необходимо знать определитель (*n-2*)-го порядка и т.д. Определитель матрицы первого порядка совпадает с самим элементом этой матрицы.

Более общее разложение определителя по нескольким строкам (столбцам) дается теоремой Лапласа.

Теорема 1 (Лапласа). *Если выбрано s строк матрицы с номерами* $i_1, \ldots, i_s$, *то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители. Определитель единичной матрицы равен 1.

Основные свойства определителей:

Свойство1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами, т.е.:

$$det\, A = det\, A^T;$$

Следствие: все свойства, справедливые для строк, справедливы и для столбцов.

Свойство 2. $det\,(A \pm B) = det\, A \pm det\, B.$

Свойство 3. Определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей, а именно:

$$det\,(AB) = detA \cdot detB$$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак на противоположный, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении строки (или столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Следствие: общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Свойство 6. Если в матрице A элементы каких-либо двух строк (столбцов) пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Свойство 10. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 11. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Используя свойства определителей, можно значительно упростить их вычисление. Например, преобразовать определитель к треугольному виду или хотя бы к виду, когда большая часть элементов какой-либо строки равна нулю, а затем разложить его по элементам этой строки.

Пример 8. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$

$(-2\cdot1-1\cdot3)-2(0\cdot1-3\cdot3)+(0\cdot1+3\cdot2)=$-5 + 18 + 6 = 19.

Пример 9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 7 & 10\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 10 & 11\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1 & 7 & 10\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 10 & 11\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}-1 & 7 & 10\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 10 & 11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 7 & 10\\ 0 & 23 & 31\\ 0 & 17 & 21\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}23 & 31\\ 17 & 21\end{vmatrix}=-(23\times21-31\times17)=44.$

Значение определителя равно 44.

Пример 10. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Найти *det(AB)*.

Решение.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$;

$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2- й способ: $AB=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3\\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 19 & 18\end{pmatrix}$,

$\det(AB) = 7\cdot18 - 8\cdot19 = 126 - 152 = -26$.

Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$XA = AX = E$,

где E–единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется ***обратной*** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Теорема 2. *Для того, чтобы матрица* $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ *имела обратную необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля, т.е.* $\det A\neq 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е. $AA^{-1}=E$, по свойству 3 определителей $\det(AA^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=\det E=1$, следовательно, $\det A\neq 0,\ \det A^{-1}\neq 0$.

Достаточность. Пусть $\det A\neq 0$. Обозначим символом S_A квадратную матрицу, элементы которой равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов матрицы A:

$$S_A=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{vmatrix},$$ здесь элементы A_{ik}–алгебраические дополнения элементов a_{ik} матрицы A. Покажем, что

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}S_A^T \qquad (1.6)$$

$$AA^{-1}=A\frac{1}{\det A}S_A^T=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=E.$$

При доказательстве использованы формула (1.4*) и свойство 10 определителей:

$c_{11}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\det A$

$c_{12}=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n}=0$

…

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}0 &, \textit{если}\quad i\neq j\\ \det A, & \textit{если}\quad i=j\end{cases}$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1}A=E$, т.е. матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}S_A^T$ – обратная к матрице A.

Теорема доказана.

Замечание 1. В математике теоремы, которые формулируются и доказываются в прямом $\Rightarrow$ (достаточность) и обратном $\Leftarrow$ (необходимость) направлении, называются ***критериями.***

С учетом сделанного замечания теорему 2 можно назвать критерием существования обратной матрицы.

Замечание 2. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} используется формула (1.6).

Замечание 3. Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной матрицей***. Обратные матрицы существуют только для невырожденных матриц.

Пример 11. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение. $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$

$A_{11}=4$; $A_{12}=-3$; $A_{21}=-2$; $A_{22}=1$

Таким образом, $S_A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ и $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\cdot 1+1\cdot 3 & -2\cdot 2+1\cdot 4 \\ 3/2\cdot 1-1/2\cdot 3 & 3/2\cdot 2-1/2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Свойства обратных матриц:

1. $(A^{-1})^{-1} = A;$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Лекция 2

Базисный минор матрицы. Ранг матрицы

Назовем *элементарной операцией (преобразованием)* над матрицей A одну из следующих операций:

1) транспонирование;

2) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы A другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;

3)умножение какой-либо строки (столбца) матрицы A на число;

4) перестановка строк (столбцов) матрицы A;

Как было сказано в лекции 1, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется ***базисным***, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе ($0 \le r \le \min\{m,n\}$).

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются ***базисными.*** В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Наряду с определителем еще одной числовой характеристикой матрицы A является ее ранг, который обозначается RgA.

Порядок базисного минора матрицы называется ***рангом*** матрицы.

Очень важным свойством *элементарных преобразований* матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Матрицы, полученные в результате элементарных преобразований, называются ***эквивалентными.***

Надо отметить, что ***равные*** матрицы и ***эквивалентные*** матрицы – понятия совершенно различные.

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то с их помощью можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример 1. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \ne 0 \Rightarrow RgA = 2.$$

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \ne 0 \Rightarrow RgA = 2.$$

Пример 3. Определить ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&3\\3&3&3&3&4\\2&1&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&-1&-2&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-2&-2&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&-2&-2&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-2)\neq0.\Rightarrow RgA=3.$$

Система ненулевых матриц-столбцов $\begin{pmatrix}a_1^1\\a_2^1\\\dots\\a_n^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^2\\a_2^2\\\dots\\a_n^2\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}a_1^k\\a_2^k\\\dots\\a_n^k\end{pmatrix}$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\begin{pmatrix}a_1^1\\a_2^1\\\dots\\a_n^1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}a_1^2\\a_2^2\\\dots\\a_n^2\end{pmatrix}+\dots+\lambda_k\begin{pmatrix}a_1^k\\a_2^k\\\dots\\a_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Если же равенство (2.1) для данной системы матриц-столбцов возможно лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$, то такая система называется линейно независимой.

Замечание. Сумма, записанная в правой части равенства (2.1), называется ***линейной комбинацией*** матриц-столбцов $\begin{pmatrix}a_1^1\\a_2^1\\\dots\\a_n^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^2\\a_2^2\\\dots\\a_n^2\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}a_1^k\\a_2^k\\\dots\\a_n^k\end{pmatrix}$.

Теорема 1 (о базисном миноре). *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор. Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.*

Утверждение. Если A–квадратная матрица и $detA$=0, то по крайней мере один из столбцов–линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк.

Доказательство. Действительно, если $detA$=0, то $RgA < n \Rightarrow$ по теореме 1 существует ($n - RgA$) зависимых строк (столбцов).

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где постоянные a_{ij} и b_i называются коэффициентами и свободными членами соответственно. Набор чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ называется ***решением*** системы (2.2), который при подстановке в систему вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращает каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***. Если система не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***.

Система называется ***определенной,*** если она имеет только одно решение и ***неопределенной***, если более одного.

Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется ***однородной***. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Ответ на вопрос о совместности исследуемой системы дает теорема Кронекера - Капелли*.

Теорема 2. *Система (2.2) совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:* RgA = RgA*, *система (2.2) не имеет решений, если ранг матрицы* A *меньше, чем ранг матрицы* A^* (RgA < RgA*). *Совместная система линейных уравнений (2.2) имеет единственное решение, если ранг матрицы*

* Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик

*системы равен числу неизвестных (*RgA = RgA* *=n), и бесконечно много решений, если* RgA = RgA* *<n.*

Пример 4. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

Решение. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11-6=5 \neq 0 \Rightarrow RgA=2.$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow RgA^*=3.$$

Так как $RgA \neq RgA^*$, то система несовместна, т.е. она не имеет решений.

Пример 5. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases}$$

Решение. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+12=14 \neq 0; \quad RgA=2;$

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 4\\ 7 & 10 & 12\\ 5 & 6 & 8\\ 3 & -16 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 14 & 7\\ 0 & 38 & 19\\ 0 & 26 & 13\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0 \text{ и } RgA^*=2.$$

Система совместна. Поскольку по теореме Кронекера–Капелли RgA = RgA*=2=n, где n – число неизвестных, то система имеет единственное решение.

Применение матриц к решению СЛАУ

1.Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных и $\det A\neq 0$. Метод удобен для решения систем невысокого порядка. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases} \qquad (2.3)$$

Составим матрицы:

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$, которую назовем матрицей системы;

$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix}$ –матрица-столбец свободных членов;

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных.

С учетом введенных обозначений систему уравнений (2.3) можно записать в матричном виде:

$$AX = B \qquad (2.4)$$

Умножая обе части равенства (2.4) слева на матрицу A^{-1}, получим:
$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, и окончательно решение системы вычисляется по формуле:

$$X = A^{-1}\cdot B \qquad (2.5)$$

Для применения данного метода необходимо найти обратную матрицу, что возможно только для ***невырожденных*** матриц, определитель которых отличен от нуля.

Пример 6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $\quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}$; $\quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}$; $\quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30}$;

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}$; $\quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}$; $\quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30}$;

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}$; $\quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}$; $\quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30}$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Несмотря на ограниченные возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

2.Метод Крамера[*].

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений и $detA \neq 0$. Последнее ограничение необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить

[*] Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик

элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема (правило Крамера). *Система (2.3) из n уравнений с n неизвестными в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad (2.6)$$

где $\Delta = detA$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.7)$$

Доказательство. В формуле (2.5) обратную матрицу A^{-1} представляя по формуле (1.4), получаем:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n \\ ..... \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

Откуда $x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n\right)$.

В последнем равенстве в скобках написано разложение по элементам i-го столбца определителя Δ_i, который получается из определителя Δ после замены в нем i-го столбца на столбец свободных членов, что доказывает формулу (2.6).

Пример 7. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0, i = 1,2,...,n$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

3.Метод Гаусса*.

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений и $detA \neq 0$. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнения.

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида (2.2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то можно переставить на первое место ненулевое слагаемое или начать с другого уравнения). Умножим первое уравнение системы (2.2) на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем его из второго уравнения этой системы. Затем умножим обе части первого уравнения на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычтем его из третьего уравнения и т.д.–т.е. процесс заключается в последовательном вычитании первого уравнения, умножаемого на числа $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ из

* Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик

i-го уравнения ($i = 1, 2, ..., n$). Таким образом, в результате элементарных преобразований получаем эквивалентную систему, в которой, начиная со второго уравнения, отсутствуют слагаемые, содержащие неизвестное x_1. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad + a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + ... + a_{2n}^1 x_n = b_2^1 \\ .... \\ 0 \quad + a_{m2}^1 x_2 + a_{m3}^1 x_3 + ... + a_{mn}^1 x_n = b_m^1 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Здесь верхний индекс означает новые коэффициенты, полученные после первого шага. Для уменьшения громоздкости записи удобнее оперировать с расширенной матрицей системы. Итак, после первого шага, содержащего (*m-1*) элементарных преобразований системы, переходим от расширенной матрицы исходной системы к расширенной матрице вида:

$$A^{*(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ ... & ... & ... & ... ... & ... \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} ... & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Второй шаг заключается в том, что при $a_{22}^{(1)} \neq 0$ 2-я строка матрицы (2.8) используется для аналогичных элементарных преобразований строк с 3-й по *m*-ю: эта строка последовательно умножается на число $\dfrac{a_{i2}^1}{a_{22}^1}$ и вычитается из *i*-й строки (*i*=3,4,…,*m*). В результате этих (*m-2*) элементарных преобразований получаем новую расширенную матрицу, соответствующую новой эквивалентной системе уравнений. Эта матрица имеет вид:

$$A^{*(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} ... & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... ... & ... \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} ... & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

где верхний индекс означает новые коэффициенты. В случае если элемент $a_{22}^{(1)} = 0$, то второе уравнение можно поменять местами с другим уравнением, у которого элемент $a_{i2} \neq 0$.

Продолжим этот процесс аналогичным образом (т.е. на третьем шаге преобразуются строки с 4-й по *m*-ю, на четвертом шаге – строки с 5-й по *m*-ю и т.д.) до тех пор, пока не дойдем до последней *m*-й строки. После (*r-1*)-го шага процесса последовательного исключения неизвестных или так называемого прямого хода метода Гаусса получаем следующую расширенную матрицу:

$$A^{*(r-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & a_{2r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots & 0 & \dots & \dots & b_m^{(r-1)} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Последние (*m*-*r*) строк этой матрицы соответствуют уравнениям эквивалентной системы уравнений

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_i^{(r-1)},\ i = r+1, r+2, \dots, m \tag{2.11}$$

Система (2.2) заранее не исследовалась на совместность с помощью теоремы Кронекера–Капелли, поэтому, ***если эта система несовместна, то хотя бы одно из чисел*** $b_{r+1}^{(r-1)},\ b_{r+2}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ ***не равно нулю.*** Таким образом, метод Гаусса позволяет на определенном шаге установить возможную несовместность исходной системы линейных уравнений.

Если все числа $b_{r+1}^{(r-1)},\ b_{r+2}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ равны 0, то уравнения (2.11) обращаются в верные числовые тождества. Отметим, что в этом случае уравнения (2.11) могут появиться, если соответствующие уравнения исходной системы (2.2) представляют собой линейные комбинации других уравнений этой системы. При $b_{r+1}^{(r-1)} = b_{r+2}^{(r-1)} = \dots = b_m^{(r-1)} = 0$ система совместна и возможны два варианта:

1. При $r = n$ система уравнений, соответствующих матрице (2.10), имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n-1n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{2.12}$$

Поднимаясь снизу вверх (обратный ход метода Гаусса), из системы (2.12) последовательно находим:

- Из последнего n-го уравнения неизвестное $x_n = b_n^{(r-1)} \big/ a_{nn}^{(r-1)}$
- Из $(n-1)$-го уравнения неизвестное x_{n-1} путем подстановки в это уравнение уже найденного неизвестного x_n
- Из i-го уравнения неизвестное x_i при подстановке в него найденных на предыдущих шагах величин $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$

- И так далее до первого уравнения, из которого при подстановке в него уже найденных величин $x_n, x_{n-1},...,x_2$ определяем x_1.

В этом случае система имеет единственное решение.

2. При $r<n$ система уравнений, соответствующих матрице (2.10), имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2r+1}^{(1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{rr+1}^{(r-1)}x_{r+1} + ... + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)} \end{cases} \qquad (2.13)$$

Объявляя неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2},...,x_n$ *свободными*, формируем правые части уравнений (2.13), оставляя в левых частях слагаемые, содержащие *базисные* переменные $x_1, x_2,...,x_r$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ \quad a_{22}^1x_2 + ... + a_{2r}^1x_r = b_2^1 - a_{2r+1}^1x_{r+1} - ... - a_{2n}^1x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad a_{rr}^{(r-1)}x_r = b_r^{(r-1)} - a_{rr+1}^{(r-1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}^{(r-1)}x_n \end{cases} \qquad (2.14)$$

Решение этой системы находится обратным ходом метода. Теперь базисные неизвестные зависят от свободных неизвестных, которые могут принимать любые значения, а потому система (2.14) имеет бесчисленное множество решений.

Пример 8. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример 9. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \text{Т}$$

аким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-10z=40 \\ 6z=18 \end{cases}$$, откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

Применение элементов линейной алгебры в экономике

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества еще со времен своего возникновения пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вбирает в себя большое количество математических методов.

Рассмотрим одну из основных моделей макроэкономики, которая была описана в 1936 г. американским экономистом В.В. Леонтьевым.

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обозначим через

- x_i – общий объем продукции i-ой отрасли (валовый выпуск);
- x_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, потребляемый j-ой отраслью при производстве продукции x_j;
- y_i – объем продукции i-ой отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, т.е. продукт конечного потребления;
- $a_{ij}={x_{ij}}/{x_j}$ – коэффициенты прямых затрат, объем потребления j-ой отраслью продукции i-ой отрасли при производстве объема x_j.

Леонтьев отметил, что в течение длительного времени величины ${x_{ij}}/{x_j}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа, зависящие от сложившейся технологии производства. Это означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска:

$x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$,

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название линейной.

Так как валовый объем продукции любой i-ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

или

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i \ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Эти уравнения называются соотношениями баланса. Будем рассматривать стоимостной межотраслевой баланс, когда все величины имеют стоимостное выражение. Запишем систему балансовых соотношений одним матричным выражением:

$$AX+Y=X, \qquad (2.15)$$

где A – структурная (технологическая) матрица, матрица коэффициентов прямых затрат, X – вектор валового выпуска; Y – вектор конечного продукта.

Само уравнение носит название модели Леонтьева или уравнения линейного межотраслевого баланса.

Это уравнение можно использовать в двух целях. В первом случае по известному вектору валового выпуска X требуется рассчитать вектор конечного потребления Y. Переписываем последние уравнение в виде: $(E-A)\cdot X = Y$. Во втором случае, если матрица $(E–A)$ невырожденная, т.е. $\det(E-A) \neq 0$, то по известному вектору конечного потребления Y можно определить вектор валового выпуска X, по формуле:

$$X = (E-A)^{-1} \cdot Y. \qquad (2.16)$$

Матрица $S = (E-A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат, элементы которой S_{ij} – величины валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечной продукции j-ой отрасли. В соответствии с экономическим смыслом задачи все элементы матрицы A, S и векторов X и Y должны быть неотрицательны. Т.е. матрица A должна быть продуктивной (сумма элементов по любому ряду не превосходит 1, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$).

Использование систем линейных уравнений при решении экономических задач

Пример 10. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

Решение. Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа А, при втором - $2y$, при третьем - z.

Для полного выполнения задания по заготовкам типа А сумма $3x+2y+z$ должна равняться 360, т.е.

$$3x+2y+z=360.$$

Аналогично получаем уравнения

$$x+6y+2z=300$$
$$4x+y+5z=675,$$

которым должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам Б и В. Полученная система линейных уравнений и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В. Решим систему методом исключения неизвестных. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей:

$$x+6y+2z=300,$$
$$2y+9z=570,$$
$$-67z=-4020.$$

Из последнего уравнения находим z=60; подставляя найденное значение z во второе уравнение, получим y=15 и, наконец, из первого имеем x=90. Итак, вектор C (90, 15, 60) есть решение системы.

Пример 11. Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Разгрузку можно производить как непосредственно в железнодорожные вагоны для последующей доставки потребителям, так и на портовые склады. В вагоны можно разгрузить 8000 т, а остаток груза придется направить на склады. Необходимо учесть, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30, 5,25 и 2,20 ден. ед.

Записать в математической форме условия полной разгрузки судов, если затраты на нее должны составить 58850 ден. ед.

Решение. По условию задачи, доставленные в порт чугун, железную руду и апатиты можно разгрузить двумя способами: либо в железнодорожные вагоны, либо в портовые склады. Обозначим через x_{ij} количество груза (в тоннах) i-го вида (i=1,2,3), которое предполагается разгрузить j-м способом (j=1,2). Таким образом, задача содержит шесть неизвестных. Условие полной разгрузки чугуна можно записать в виде

$$x_{11}+x_{12}=6000, \qquad \text{(A)}$$

где x_{11}, x_{12} - части чугуна, разгружаемого соответственно в вагоны и на склады. Аналогичное условие должно выполняться и для железной руды:

$$x_{21}+x_{22}=4000. \qquad \text{(B)}$$

Что же касается апатитов, то их можно разгружать только на склады, а поэтому неизвестное x_{31}=0, и условие полной разгрузки апатитов принимает вид

$$x_{32}=3000. \qquad \text{(C)}$$

Условие полной загрузки всех поданных в порт вагонов запишется так:

$$x_{11}+x_{21}=8000. \qquad \text{(D)}$$

Затраты на разгрузку, по условию, определены в 58850 ден.ед., что можно выразить записью:

$$4,3x_{11}+7,8\,x_{12}+5,25\,x_{21}+6,4x_{22}+3,25x_{32}=58850. \qquad \text{(E)}$$

Итак, с учетом сложившейся в порту ситуации условия полной разгрузки судов выражаются в математической форме системой линейных уравнений (5.7) - (5.11). С учетом (5.9) уравнение (5.11) перепишется в виде:

$$4,3x_{11}+7,8x_{12}+5,25x_{21}+6,4x_{22}=49100,$$

и теперь мы имеем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $x_{11},$ $x_{12},$ $x_{21},$ $x_{22},$ расширенная матрица которой имеет вид:

$$\overline{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 & 49100 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем ее к треугольному виду:

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 4{,}3 & 7{,}8 & 5{,}25 & 6{,}4 & 49100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 3{,}5 & 5{,}25 & 6{,}4 & 23300 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 8{,}75 & 6{,}4 & 30300 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & -2{,}35 & -4700 \end{pmatrix}.$$

Наша система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12} &= 6000, \\ -x_{12}+x_{21} &= 2000, \\ x_{21}+x_{22} &= 4000, \\ -2{,}35\,x_{22} &= -4700, \end{aligned}$$

откуда $x_{22}=2000$, $x_{21}=2000$, $x_{12}=0$, $x_{11}=6000$.

Пример 12. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 94, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 574, \\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 328. \end{aligned}$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574 \\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2080 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, число базисных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 94 - x_4, \\ -x_2 + 5x_3 &= 386 - 2x_4, \\ 26x_3 &= 2080 - 9x_4. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим $x_3=80-9/26\ x_4$, подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2=14+7/26x_4$ и, наконец, из первого уравнения получим: $x_1=-12/13\ x_4$. С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т.е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными, тогда из соотношения $x_1=-12/13\ x_4$ получим: $x_1=x_4=0$. Тогда вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.

Пример 13. Пусть дана леонтьевская балансовая модель “затраты - выпуск” в виде (2.15). Найти вектор конечной продукции Y при заданном X, где

$$A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix};\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix};$$

Решение. Вектор конечной продукции Y найдем из соотношения

$Y=(E-A)\ X$, где E - единичная матрица третьего порядка.

$$E\text{-}A=\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix},$$

значит,

$$Y=\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9\cdot 100 + 0 - 0,6\cdot 150 \\ 0 + 0,3\cdot 200 - 0,2\cdot 150 \\ -0,7\cdot 100 - 0,1\cdot 200 + 0,9\cdot 150 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Пример 14. Пусть дана леонтьевская балансовая модель “затраты-выпуск”. Найти вектор валовой продукции X при заданном Y, где

$$A=\begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 1,125 & 0,125 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для определения вектора валовой продукции X имеем формулу $X=(E-A)^{-1}Y$. Найдем обратную матрицу для матрицы

$$E\text{-}A=\begin{pmatrix} 0,875 & -0,125 \\ -1,125 & 0,875 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B = E\text{-}A$, тогда $\mathrm{B}^{-1}=\dfrac{1}{\det \mathrm{B}}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5,4}\begin{pmatrix} 0,875 & 0,125 \\ 1,125 & 0,875 \end{pmatrix}.$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{5,4}\begin{pmatrix} 0,875 & 0,125 \\ 1,125 & 0,875 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5,4}\begin{pmatrix} 0,875\cdot 300 + 0,125\cdot 400 \\ 1,125\cdot 300 + 0,125\cdot 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5,4}\begin{pmatrix} 312,5 \\ 687,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 57,9 \\ 127,3 \end{pmatrix}.$$

Лекция 3

Понятие векторного пространства
Линейные операции над векторами

В лекции 1 для произвольных прямоугольных матриц размера $n\times m$ были определены операции сложения и умножения на число, в результате которых получались также прямоугольные матрицы того же размера $n\times m$. Аналогичная ситуация, когда имеется множество каких-то элементов, которые можно *складывать между собой* и *умножать на числа*, получая в результате элементы того же самого множества, встречаются в математике очень часто.

Векторным (линейным) пространством называется множество L, состоящее из элементов любой природы, называемые ***векторами***, в котором определены операции сложения и умножения элементов на действительные числа, удовлетворяющие следующим условиям

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - коммутативность сложения;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ -ассоциативность сложения;

3) имеется нулевой вектор $\vec{0}$ (или нуль вектор), удовлетворяющий условию $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$

6) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность умножения

7) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность относительно числового множителя

8) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ -дистрибутивность относительно векторного множителя.

Примеры векторных пространств:

$\mathbb{R}^2$ – множество геометрических векторов $\vec{a}=(a_1, a_2)$ на плоскости;

$\mathbb{R}^3$ – множество геометрических векторов $\vec{a}=(a_1, a_2, a_4)$ в пространстве;

Таким образом, векторное (линейное) пространство – математическое понятие, обобщающее понятие совокупности всех свободных векторов обычного двухмерного и трехмерного пространства.

Множество матриц $A_{n\times m}(\mathbb{R})$ относительно операций сложения и умножения на число образуют линейное пространство.

Линейными операциями над векторами называется их сложение и умножение на число.

Условия 1)-8) можно назвать *основными свойствами линейных операций над векторами.*

Линейная зависимость (независимость) векторов

При решении различных задач, как правило, приходится иметь дело не с одним вектором, а с некоторой совокупностью векторов одной размерности. Такую совокупность называют системой векторов:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \tag{3.1}$$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется новый вектор, равный сумме произведений данных векторов на некоторые числа:

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n \tag{3.2}$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$. Другими словами: для того, чтобы векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ были ***линейно зависимыми*** необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них являлся линейной комбинацией остальных (линейно выражался через остальные).

Если же равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то векторы называются ***линейно независимыми***.

Если система векторов (3.1) является линейно зависимой, то в сумме $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ можно выбрать слагаемое, в котором коэффициент $\alpha_i \neq 0$, и выразить его через остальные слагаемые в виде (3.2).

Свойство 1. Система векторов (3.1), состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.

Свойство 2. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 3. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 4. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится по крайней мере один вектор, который линейно выражается через остальные.

Разложение вектора по базису

Если в линейном пространстве L есть n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы, то пространство L называется ***n-мерным***, говорят также, что размерность линейного пространства L равна n, записывают $\dim(L) = n$. Любая совокупность линейно независимых векторов называется ***базисом*** линейного пространства L.

Пусть система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$–базис пространства линейного пространства L. Будем считать порядок векторов в базисе заданным так, что, например, $\vec{e}_2, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$–другой базис. Пусть теперь $\vec{b}$– произвольный вектор пространства L. Тогда $\vec{b}$ выражается через базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

$$\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + ... + \beta_n\vec{e}_n \tag{3.3}$$

Представление вектора $\vec{b}$ в виде (3.3) называют разложением его по базисным векторам, а коэффициенты $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ – ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Следствие 2: В линейном пространстве L размерности n, любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при $m > n$.

Теорема 1. *Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно.*

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – базис пространства L размерности n, и для вектора $\vec{b}$ наряду с (3.3) существует еще разложение

$$\vec{b} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + ... + \gamma_n \vec{e}_n \tag{3.4}$$

Вычитая из равенства (3.3) равенство (3.4) почленно, получим

$$\vec{0} = (\beta_1 - \gamma_1)\vec{e}_1 + (\beta_2 - \gamma_2)\vec{e}_2 + ... + (\beta_n - \gamma_n)\vec{e}_n$$

Из последнего равенства ввиду линейной независимости векторов базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ следует $\beta_i - \gamma_i = 0, i = 1, 2, ..., n$, т.е. $\beta_i = \gamma_i, i = 1, 2, ..., n$.

Теорема доказана.

Любой упорядоченный набор из n действительных чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называется ***n-мерным вектором*** $\vec{a}$. Координаты n-мерного вектора $\vec{a}$ можно расположить либо в строку $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$–вектор-строка

либо в столбец $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$– вектор-столбец.

Совокупность всех n-мерных векторов образуют n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если их соответствующие координаты равны, т.е.

$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, ..., a_n = b_n$.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется ***нулевым вектором*** $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$.

С учетом введенного понятия координат линейные операции над векторами могут быть определены посредствам их координат.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат этих векторов

$$\vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ..., a_n + b_n) \tag{3.5}$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на любое действительное число α называется вектор $\vec{d} = \alpha\,\vec{a}$, координаты которого получаются умножением соответствующих координат вектора $\vec{a}$ на это число α:

$$\vec{d} = (\alpha a_1, \alpha\, a_2, \alpha a_3, ..., \alpha a_n) \tag{3.6}$$

Скалярное произведение векторов

Мы определили линейное пространство, в котором можно складывать векторы и умножать их на числа, ввели понятие размерности, базиса, а теперь в этом пространстве мы введем ***метрику***, т.е. ***способ измерять длины и углы.*** Метрику в линейном пространстве удобнее всего ввести, используя понятие скалярного произведения.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \qquad (3.7)$$

Определим ***длину*** или ***модуль*** вектора $\vec{a}$ как корень квадратный из скалярного произведения вектора $\vec{a}$ самого на себя:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} \qquad (3.8)$$

Подставляя (3.2) в (3.3), получаем:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \qquad (3.9)$$

Угол между двумя векторами находят по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad (3.10)$$

Из определения скалярного произведения следуют его основные свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$, где α –действительное число;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причем $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Пример 1. **Производственные показатели**

Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в таблице:

Вид изделий	Кол-во изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден.ед/изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S,затраты рабочего времени T, стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Решение.

По приведенным данным составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$\vec{q} = (20, 50, 30, 40)$ –вектор ассортимента

$\vec{s} = (5, 2, 7, 4)$ –вектор расхода сырья

$\vec{t} = (10, 5, 15, 8)$ –вектор затрат рабочего времени

$\vec{p} = (30, 15, 45, 20)$ –ценовой вектор

Тогда искомые производственные показатели будут представлять собой соответствующие скалярные произведения:

$S = \vec{q} \cdot \vec{s} = 20 \cdot 5 + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 4 = 100 + 100 + 210 + 160 = 570$ (кг)

$T = \vec{q} \cdot \vec{t} = 20 \cdot 10 + 50 \cdot 5 + 30 \cdot 15 + 40 \cdot 8 = 200 + 250 + 450 + 320 = 1220$ (ч)

$P = \vec{q} \cdot \vec{p} = 20 \cdot 30 + 50 \cdot 15 + 30 \cdot 45 + 40 \cdot 20 = 600 + 750 + 1350 + 800 = 3500$ (ден.ед.)

Лекция 4

Вектора на плоскости и в пространстве

В математике и ее приложениях различают два типа величин: скалярные и векторные. ***Скалярная величина*** полностью определяется одним числом, которое выражает отношение данной величины к соответствующей единице измерения, например, масса тела, температура, объем, работа.

Векторными величинами, или векторами, называют те, которые характеризуются не только их числовым значением, но и направлением в пространстве $\mathbb{R}^3$ или на плоскости $\mathbb{R}^2$, например, сила, скорость, ускорение.

Для изучения общих свойств, присущих всем векторным величинам, в математике вводят понятие абстрактного математического вектора, в котором сохранено лишь то общее, что имеют все физические векторы: величина и направление.

Естественным изображением математического вектора (упорядоченная пара точек) служит направленный отрезок: длина отрезка равна числовому значению (***модулю***) вектора, а направление отрезка, указываемое стрелкой, совпадает с направлением этого вектора. Обозначается вектор $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$; модуль вектора обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Будем рассматривать свободные векторы, которые определяются длиной и направлением и точка приложения которых может быть выбрана произвольно.

Вектор, начало и конец которого совпадают (в силу этого он не имеет определенного направления), называется ***нуль-вектором*** или ***нулевым вектором***. Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором***.

Векторы называются ***ортогональными***, если они лежат на перпендикулярных прямых. Обозначаются ортогональные векторы $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых. Обозначаются коллинеарные вектора $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные векторы могут быть сонаправленными $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ или противоположно направленными $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если они имеют одинаковые модули и направление: $\vec{a} = \vec{b}$.

Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются противоположными, если они имеют одинаковые модули и противоположное направление: $\vec{a} = -\vec{b}$.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости) называются ***компланарными***.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейные операции над векторами

Как было сказано в лекции 3, ***линейными операциями*** над векторами называется их сложение и умножение на число.

Суммой двух геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$. Записывают $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ можно построить по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. Сумма нескольких векторов может быть найдена по правилу многоугольника.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$, удовлетворяющий условиям

1. $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$

2. вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$;
вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Из определения коллинеарности векторов и операции умножения вектора на число вытекает

Утверждение 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ или $\vec{a}=\beta\vec{b}$.

Теорема 1. *Для того чтобы любые два вектора были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.*

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из определения линейной зависимости и утверждения 1:
$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\alpha\vec{a}\Leftrightarrow\vec{a}$ и $\vec{b}$ –линейно зависимы.

Теорема 2. *Для того чтобы любые три вектора были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были компланарными.*

Теорема 3. *Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимые векторы, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с ними, можно единственным образом представить в виде:* $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Такое представление называется разложением вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; x и y – коэффициенты разложения.

Из теоремы 3 следует, что *все* векторы, лежащие в некоторой плоскости, можно рассматривать как линейные комбинации каких-либо двух неколлинеарных (линейно независимых) векторов на этой плоскости. Аналогичный результат справедлив и для пространственных векторов.

Теорема 4. *Если три вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы (некомпланарны), то любой вектор $\vec{d}$ пространства $\mathbb{R}^3$ можно разложить по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ и такое представление единственно.*

Из теоремы 4 следует, что *все* векторы пространства $\mathbb{R}^3$ можно рассматривать как линейные комбинации каких-либо трех некомпланарных (линейно независимых) векторов.

Векторный базис

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы три вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и пусть $\vec{d}$ – произвольный вектор пространства. Будем говорить, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют в пространстве ***векторный базис***, если любой вектор $\vec{d}$ в пространстве представим в виде $\vec{d} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ и это представление единственно.

Коэффициенты x, y, z разложения называются ***координатами*** (компонентами) вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Записывают $\vec{d} = \{x, y, z\}$.

Из теоремы 4 следует, что три любых некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке, образуют в пространстве векторный базис.

Если векторы, образующие базис, единичны и попарно ортогональны, то базис называется ***ортонормированным***. Ортонормированный базис будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$.

Замечание. Если рассматривать векторы, лежащие в какой-либо плоскости, то по теореме 3 векторный базис на плоскости образуют любые два неколлинеарные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, лежащие в этой плоскости.

Базисом на прямой является любой ненулевой вектор.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$(-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) и $\vec{d}$(3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если существует нетривиальное (ненулевое) решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$, которая является следствием векторного равенства:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$. Таким образом, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + 0 \cdot y + z = 2 \\ 3x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d} = \{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Как следует из примера 1, процедура нахождения координат вектора в произвольном базисе достаточно трудоемка и связана с решением СЛАУ.

Система координат

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора, точки

Аффинная система координат в пространстве задается точкой О (началом координат) и упорядоченной тройкой приложенных к ней некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (базисных векторов).

Декартова прямоугольная система координат (как частный случай аффинной системы координат) называется ***ортонормированной*** и ***правой***, если в качестве базиса рассматривать орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ при условии, что эти векторы образуют правую тройку.

Тройка некомпланарных упорядоченных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется ***правой***, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ против хода часовой стрелки, в противном случае (когда поворот наблюдается по ходу часовой стрелки) тройка векторов называется ***левой***.

При круговой перестановке векторов ориентация тройки не изменяется, например, все тройки ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), ($\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$), ($\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$)–правые. При перестановке двух векторов ориентация тройки изменится на противоположную, например, ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$)–правая тройка, ($\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$)–левая. Ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образует правую тройку.

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, называются ***осями координат***: Ох – ось ***абсцисс*; Оу** – ось ***ординат*; Oz** – ось ***аппликат.*** Плоскости, проходящие через пару осей координат, называются ***координатными плоскостями***: плоскость Оху, плоскость Охz, плоскость Оуz. Прямоугольная декартова система координат в пространстве обозначается Oxyz. Кроме направления базисные вектора $\vec{i} = \{1,0,0\}, \vec{j} = \{0,1,0\}, \vec{k} = \{0,0,1\}$ задают соответственно и единицу масштаба по каждой оси Ох, Оу, Oz.

Зафиксируем в пространстве точку $O(0,0,0)$ и рассмотрим произвольную точку М. Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус-вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую упорядоченную тройку чисел – компоненты ее радиус-вектора.

Прямоугольными декартовыми координатами точки М в системе координат Oxyz называются коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (4.1)$$

Записывают $M(x, y, z)$.

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала. Радиус-вектор точки М имеет те же координаты, что и точка M: $\vec{OM} = \{x, y, z\}$.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \qquad (4.2)$$

Действительно, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Длина произвольного вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, то длина вектора $\vec{AB}$, как следует из формулы (3.9), вычисляется по формуле

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4.3)$$

Если точка *M(x, y, z)* ***делит отрезок AB в соотношении*** λ/μ, считая от *A*, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}. \qquad (4.4)$$

В частном случае координаты ***середины отрезка*** находятся как:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (4.5)$$

Линейные операции над векторами в координатах, как следует из (3.5), (3.6) имеют вид:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_a; \alpha y_a; \alpha z_a)$$

В лекции 3 были определены скалярное произведение и угол между векторами формулами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \qquad (4.6)$$

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они ортогональны.

Пример 2. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10\left|\vec{a}\right|^2 - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример 3. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение. $\vec{a}$=(1, 2, 3), $\vec{b}$=(6, 4, -2), $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8.$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Пример 4. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

Решение. $15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} = 15\left|\vec{a}\right|^2 - 28\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3} + 12\left|\vec{b}\right|^2 =$

$=15\cdot 16-28\cdot 4\cdot 6\cdot \dfrac{1}{2}+12\cdot 36=240-336+432=672-336=336.$

Пример 5. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Решение. $\vec{a}$=(3, 4, 5), $\vec{b}$=(4, 5, -3), $\vec{a}\cdot\vec{b}$=12 + 20-15 =17,

$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50};\qquad |\vec{b}|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}$.

$\cos\varphi=\dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\dfrac{17}{50};\qquad \varphi=\arccos\dfrac{17}{50}.$

Пример 6. При каком m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение. $\vec{a}$= (m, 1, 0); $\vec{b}$= (3, -3, -4)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3m-3=0;\quad \Rightarrow m=1$.

Пример 7. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, если $|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2,\quad |\vec{c}|=3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c})=10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$
$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10\,\vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10+$
$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$

Векторное произведение векторов

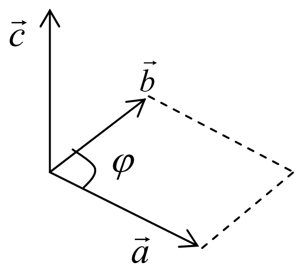
Векторным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
$\sin\varphi\ge 0;\quad 0\le\varphi\le\pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$



Свойства векторного произведения векторов:

1) векторное произведение не коммутативно: $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$;

3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$$

6) *Геометрический смысл векторного произведения:* длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ (модуль векторного произведения) равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 8. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

Решение. $\vec{a}=(2, 5, 1)$; $\vec{b}=(1, 2, -3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

Пример 9. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

Решение. $\overrightarrow{AC}=(0-2;1-2;0-2)=(-2;-1;-2)$; $\overrightarrow{AB}=(4-2;0-2;3-2)=(2;-2;1)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$

$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}. \qquad S_\Delta=\frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2).$$

Пример 10. Доказать, что векторы $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ компланарны.

Решение.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & 8\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix},$$ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример 11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$; $3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$; $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=30^0$.

Решение.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$$

$$S=8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0=4\,(\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Свойства смешанного произведения

1)при циклической (круговой) перестановке множителей смешанное произведение не изменяется $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

2)при перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на противоположный $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$; $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$

3) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

4)Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

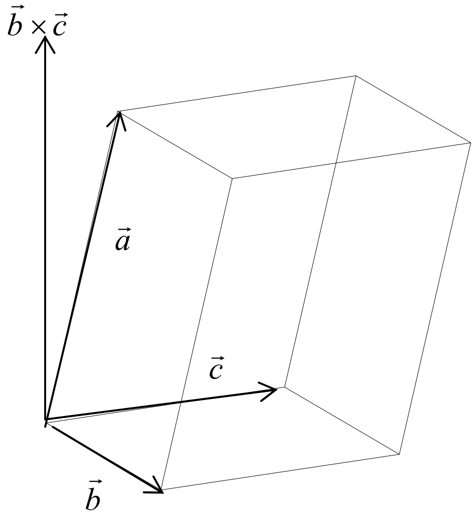
5)Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

6)*Геометрический смысл смешанного произведения:* смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$

Пример 12. Доказать, что точки $A(5;\,7;\,2)$, $B(3;\,1;\,-1)$, $C(9;\,4;\,-4)$, D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$; $\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки *A, B, C* и *D* лежат в одной плоскости.

Пример 13. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань *BCD*, если вершины имеют координаты $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$,
$D(3;\ 7;\ 2)$.

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$; $\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. $V=\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$ (ед).

Аналитическая геометрия

Лекция 5

Предмет аналитической геометрии

Аналитическая геометрия–раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат*. В данном разделе будет использована декартова прямоугольная система координат, определенная в лекции 4. В дальнейшем нами будет изучена также полярная система координат.

В аналитической геометрии на плоскости решается общая задача, состоящая в исследовании формы, расположения и свойств данной линии. Пусть мы имеем некоторую линию на плоскости. Координаты x и y точки, лежащие на этой линии, не могут быть произвольными; они должны быть подчинены известным ограничениям, обусловленным геометрическими свойствами данной линии. Тот факт, что числа x и y являются координатами точки, лежащей на данной линии, аналитически записывается в виде некоторого уравнения. Это уравнение называется уравнением линии на плоскости.

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что всякой линии сопоставляется ее уравнение, а затем свойства этой линии изучаются путем аналитического исследования соответствующего уравнения. Введем основное понятие аналитической геометрии.

Уравнением линии на плоскости называется уравнение $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Займемся систематическим изучением линий по их уравнениям и в первую очередь рассмотрим прямую линию на плоскости.

Прямая линия на плоскости

Выведем уравнение прямой *AB,* заданной величинами b и $k=tg\varphi$, где угол φ образован данной прямой с положительным направлением оси Ox.

Для этого возьмем на прямой *AB* произвольную точку $M(x,y)$ и опустим из нее перпендикуляр MP на ось Ox. Очевидно, $OP=x$ и $PM=y$. Далее проведем отрезок *BC*, параллельный оси Ox.

Из рис.1 имеем:

$$y=PM=CM+PC \qquad (5.1)$$

---

* метод координат был предложен в 17 веке французскими математиками П.Ферма (1601–1665) и Р. Декартом (1596–1650)

Из прямоугольного ΔCMB получаем:

$$CM = BCtg\varphi = xtg\varphi = kx \qquad (5.2)$$

Кроме того, очевидно, $PC = OB = b$ (5.3)

Подставляя (5.2) и (5.3) в формулу (5.1), имеем

$$y = kx + b \qquad (5.4)$$

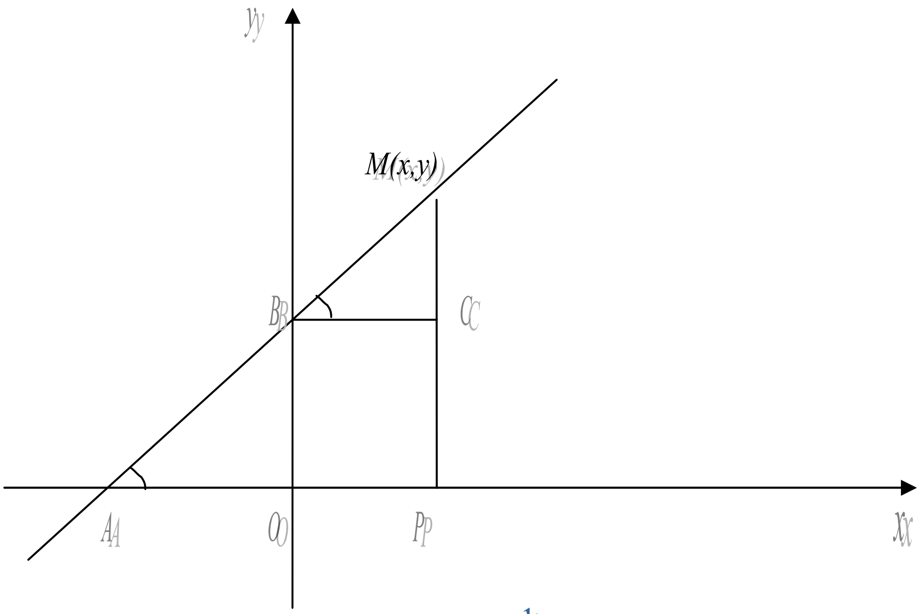


рис.1

Этому уравнению удовлетворяют координаты x, y каждой точки M, лежащей на данной прямой. Обратно, легко убедиться, что если координаты какой-либо точки связаны уравнением (5.4), то эта точка лежит на прямой *AB*. Следовательно, (5.4) и есть уравнение прямой *AB*. Уравнение (5.4) носит название *уравнения прямой с угловым коэффициентом*. Входящие в него величины b и k, определяющие положение прямой на плоскости, называют параметрами этой прямой. Оба эти параметра могут быть любыми действительными числами.

Отметим, что текущие координаты x и y входят в уравнение (5.4) прямой в первой степени, поэтому будем говорить, что прямая есть *линия первого порядка*.

Если прямая проходит через начало координат, то, очевидно, $b = 0$, и поэтому уравнение такой прямой имеет вид:

$$y = kx \qquad (5.5)$$

Уравнение (5.4) применимо только в том случае, если прямая не параллельна оси ординат. В самом деле, при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ уравнение (5.4) теряет смысл.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy, является

$x = a$, где a –отрезок, отсекаемый этой прямой на оси Ox (5.6)

Уравнение прямой, параллельной оси Ox, является

$y=b$, где b–отрезок, отсекаемый этой прямой на оси Oy (5.7)

Уравнение (5.7) получается как частный случай из уравнения (5.4) при $k=tg0=0$.

Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые (не параллельные оси Oy), заданные их уравнениями с угловыми коэффициентами (рис.2)

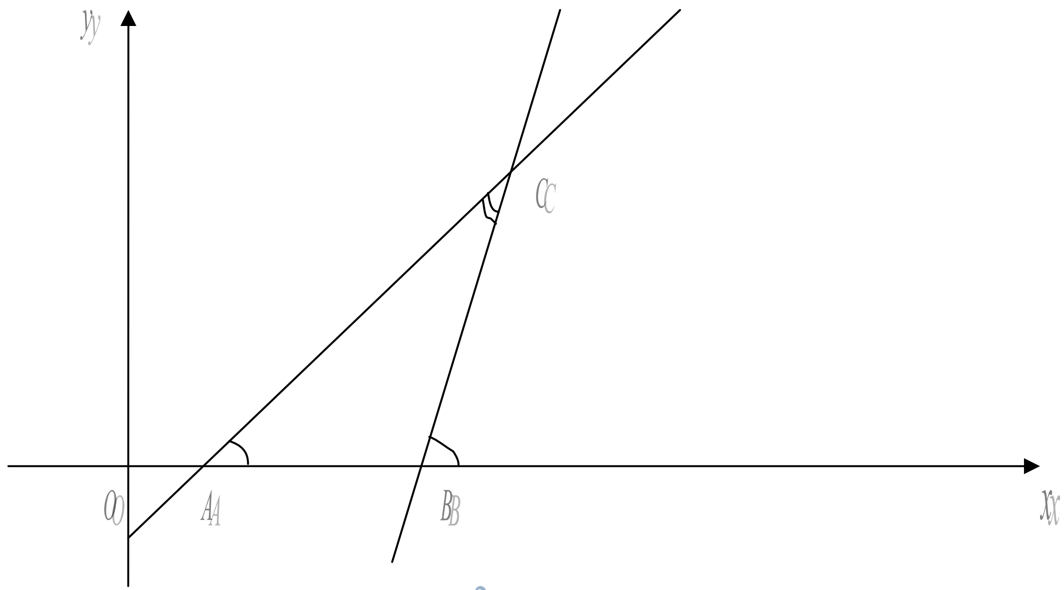


рис.2

$$AC:\ y=k_1x+b_1,\quad k_1=tg\varphi_1 \tag{5.8}$$

$$BC:\ y=k_2x+b_2,\quad k_2=tg\varphi_2 \tag{5.9}$$

Требуется определить угол θ между ними, который при условии, что φ_2 – внешний угол треугольника, равен $\theta=\varphi_2-\varphi_1$. Откуда на основании известной формулы тригонометрии получаем

$$tg\theta=tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1 tg\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \tag{5.10}$$

Для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$k_1=k_2 \tag{5.11}$$

Для перпендикулярности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$k_1=-\frac{1}{k_2} \tag{5.12}$$

Пример 1. Определить острый угол между прямыми y=-3x+7; y=2x+1.

Решение. k_1=-3; k_2=2

$tg\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right|=1\Rightarrow$ φ = π/4.

Пример 2. Показать, что прямые 3x–5y+7=0 и 10x+6y–3=0 перпендикулярны.

Решение. k_1=3/5, k_2=-5/3, k_1k_2=-1, следовательно, прямые перпендикулярны.

Уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая PM наклонена под углом φ к положительному направлению оси Ox и проходит через заданную точку $P(x_1, y_1)$.

Выведем уравнение этой прямой, предполагая сначала, что прямая не параллельна оси Oy. В этом случае, как мы видели, уравнение прямой имеет вид (5.4). Так как точка $P(x_1, y_1)$ лежит на прямой PM, то координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравнению (5.4): $y_1 = kx_1 + b$. Вычитая данное равенство из равенства (5.4), получаем:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5.13}$$

Если прямая, проходящая через заданную точку $P(x_1, y_1)$, параллельна оси Oy, то ее уравнение имеет вид:

$$x = x_1 \tag{5.14}$$

Аналогично, если прямая, проходящая через заданную точку $P(x_1, y_1)$, параллельна оси Ox, то ее уравнение имеет вид:

$$y = y_1 \tag{5.15}$$

Если k –заданное число, то уравнение (5.13) представляет вполне определенную прямую, если же k –переменный параметр, то это уравнение определит пучок прямых, проходящих через точку $P(x_1, y_1)$ (рис.3), при этом k называется *параметром пучка*.

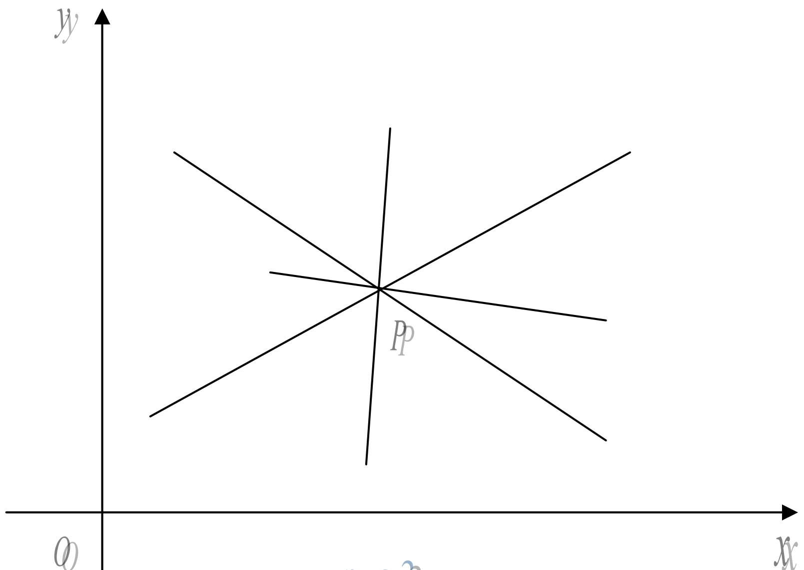


рис.3

Направление прямой PM можно также задать с помощью направляющего вектора $\vec{s} = \{p, q\}$, параллельного данной прямой (рис.4).

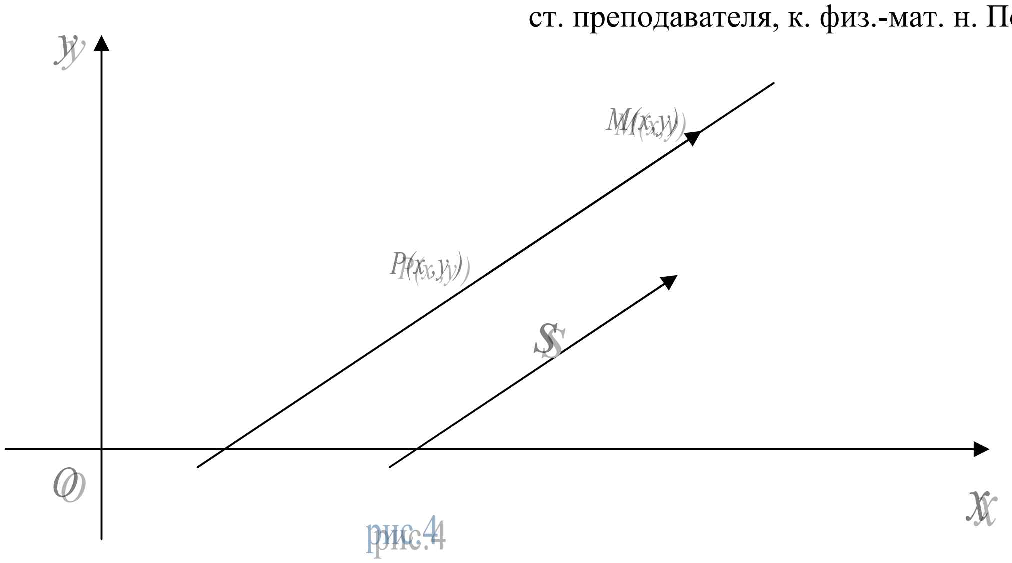


рис.4

Тогда ввиду коллинеарности двух векторов $\vec{P}M = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $\vec{s} = \{p, q\}$ выполняется равенство:

$$\frac{x - x_1}{q} = \frac{y - y_1}{p}, \qquad (5.16)$$

которое называется *каноническим уравнением* прямой.

Если в уравнении (5.16) отношение $\frac{x - x_1}{q}$ или $\frac{y - y_1}{p}$ положить равным некоторому числу t, которое назовем параметром, то получим так называемое *параметрическое уравнение* прямой:

$x = x_1 + qt$

$y = y_1 + pt$, где $-\infty < t < +\infty$. (5.17)

Отметим, что параметрическое и каноническое уравнения прямой можно записать не единственным образом (вместо точки $P(x_1, y_1)$ можно взять какую-либо другую точку, вместо вектора $\vec{s} = \{p, q\}$ можно взять любой вектор, параллельный ему).

Пример 3. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Решение. Находим уравнение стороны AB: $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}$; $4x=6y–6$;

$2x–3y+3=0$; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: $y - y_1 = k(x - x_1)$ или с учетом того, что она опущена из вершины C(12; -1): $y - 12 = k(x + 1)$. Коэффициент k определим из условия $\frac{2}{3}k = -1$ или $k = -\frac{3}{2}$.

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Известно, что через две не совпадающие точки можно провести прямую и притом только одну. Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $P(x_1,y_1)$ и $Q(x_2,y_2)$. Используя каноническое уравнение (5.16) и выбирая в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ вектор $P\vec{Q}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$, получаем уравнение вида:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (5.18)$$

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Решение. Применяя формулу (5.18), получаем:

$$\frac{y-2}{4-2}=\frac{(x-1)}{3-1}$$

$$y-2=x-1$$

$$x-y+1=0$$

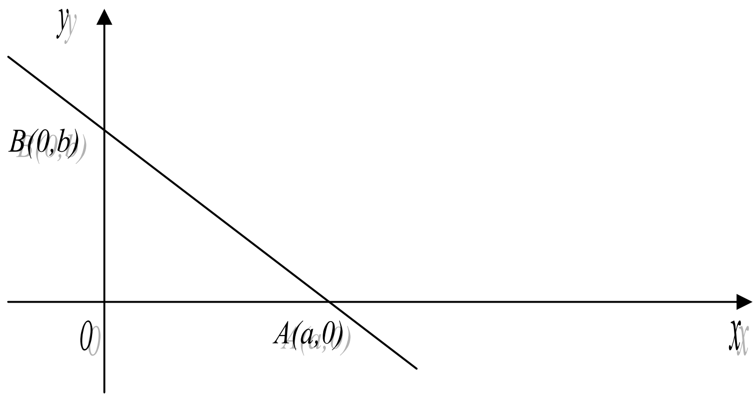
Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Решение. Подставляя в (5.18) $x_1=y_1=0$; $x_2=-2$; $y_2=-3$, имеем:

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}; \qquad 3x-2y=0.$$

Уравнения прямой в отрезках

Выведем теперь уравнение прямой, положение которой на плоскости задано ненулевыми отрезками, отсекаемыми ею на осях координат. Предположим, например, что прямая AB отсекает на оси Ox отрезок $OA=a$, а на оси Oy –отрезок $OB=b$ (рис.5), причем ясно, что тем самым положение прямой вполне определено.



Заметим, что эта прямая проходит через точки $A=(a,0)$ и $B=(0,b)$, поэтому ее уравнение легко получить из уравнения (5.18):

$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, откуда получаем $\frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}$ или окончательно

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1 \qquad (5.19)$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример 6. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. По условию $a=b>0$ и $ab/2=8$. Значит, $a=4$.

Таким образом, искомое уравнение прямой: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или $x+y-4=0$.

Линейным уравнением относительно переменных x и y называется уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (5.20)$$

Где A,B,C –постоянные, причем A и B не равны нулю одновременно.

Утверждение 1. Любая прямая на плоскости *может быть* задана в *фиксированной декартовой прямоугольной системе координат* уравнением первой степени (5.20). Обратно, любое уравнение первой степени относительно декартовых координат является уравнением прямой.

Замечание 1. В теореме 1 существенно то, что под x и y понимаются декартовы координаты. Например, как будет показано ниже, уравнение $\rho-1=0$, линейное относительно полярных координат ρ и φ, выражает окружность, а не прямую.

Замечание 2. Прямая может быть задана в декартовых прямоугольных координатах и нелинейным уравнением, например, $y(x^2+1)=0$ – уравнение оси Ox.

Уравнение (5.20) называется общим уравнением прямой. Отметим некоторые частные случаи этого уравнения, а именно, к чему приводит равенство нулю некоторых его коэффициентов.

1. $C=0$, т.е. уравнение (5.20) имеет вид:

$$Ax+By=0 \qquad (5.21)$$

Прямая проходит через начало координат, т.к. уравнению (5.21) удовлетворяют значения $x=0$ и $y=0$. Обратно, пусть прямая (5.20) проходит через начало координат. Тогда вставляя в уравнение (5.20) значения $x=0$ и $y=0$, получим $C=0$. Итак, для того чтобы прямая (5.20) проходила через начало координат, необходимо и достаточно, чтобы свободный член C уравнения (5.20) был равен нулю.

2. $B=0,\ C\neq 0$, т.е. уравнение (5.20) имеет вид

$$Ax+C=0 \qquad (5.22)$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Oy. Справедливо и обратное: любая такая прямая задается уравнением вида (5.22)

3. $B=0,\ C=0$, т.е. уравнение (5.20) имеет вид

$x=0$ и задается ось Oy

Аналогично истолковываются случаи

4. $A=0, C\neq 0$
5. $A=0, C=0$

Геометрический смысл коэффициентов A и B: в декартовой прямоугольной системе координат вектор $\vec{n}$ с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$.

Пример 7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Решение. Составим при $A=3$ и $B=-1$ уравнение прямой: $3x-y+C=0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A.Получаем: $3-2+C=0$, следовательно $C=-1$.

Искомое уравнение: $3x-y-1=0$.

Пример 8. Дано общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

Решение. $\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$

уравнение этой прямой в отрезках: $\frac{x}{(65/12)}+\frac{y}{(-13)}=1$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$y=\frac{12}{5}x-\frac{65}{5}=\frac{12}{5}x-13.$

Совместное исследование уравнений двух прямых

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Каждое уравнение системы (5.23) определяет некоторую прямую. Вопрос о существовании и количестве вещественных решений системы (5.23) равносилен вопросу о существовании и количестве общих точек у прямых (5.23). Возможны три случая:

1. Прямые (5.23) пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку– система (5.23) имеет единственное решение.
2. Прямые (5.23) совпадают, т.е. оба уравнения системы определяют одну и ту же прямую–система (5.23) имеет бесконечное множество решений.
3. Прямые (5.23) параллельны–система (5.23) не имеет решений.

Утверждение 2. Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы имел место один из трех указанных случаев, являются соответственно следующие условия:

1. не существует такого вещественного числа l, что

$A_1=lA_2,\ \ B_1=lB_2$ или $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$

2. существует такое вещественное число l, что
$A_1 = lA_2,\ B_1 = lB_2,\ C_1 = lC_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
3. не существует такое вещественное число l, что
$A_1 = lA_2,\ B_1 = lB_2,\ C_1 \neq lC_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $P(x_1, y_1)$ до прямой (5.20) находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.24)$$

Расстояние между двумя точками плоскости

Расстояние между любыми двумя точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ плоскости:

$$\rho(P,Q) = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (5.25)$$

Деление отрезка в данном отношении

Если заданы две точки на плоскости $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ и точка $M(x, y)$, ***делящая отрезок PQ в соотношении λ/μ***, считая от P, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}. \qquad (5.26)$$

В частном случае координаты ***середины отрезка*** находятся как:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (5.27)$$

Пример 9. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Решение. Через выбранные точки B и C проведем ось Ox. Тогда $B(x_1, 0)$ и $C(x_2, 0)$. Пусть точка $A(x, y)$ принадлежит искомому геометрическому месту точек. По формуле (5.25) получаем:

$$|AB| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2},$$

Т.к. по условию $|AB| = |AC|$, то

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}. \qquad (A)$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места точек. Упростим его, возведя обе части последнего равенства в квадрат:

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + y^2$$

$$-2xx_1 + x_1^2 = -2xx_2 + x_2^2 \quad \text{или} \quad 2x(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2$$

Сокращая на $x_2 - x_1 \neq 0$, имеем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{B}$$

Это уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox и проходящей через середину отрезка BC. Окончательно имеем, что искомым геометрическим местом является прямая, перпендикулярная к отрезку BC, соединяющему данные точки B и C, и проходящая через его середину.

Замечание. При решении задачи нам пришлось упростить уравнение (A), возведя обе его части в квадрат, в результате получили уравнение (B). Из алгебры известно, что возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к уравнению, которое не равносильно (не эквивалентно) исходному. Это значит, что уравнение, полученное при возведении в квадрат обеих частей исходного уравнения, может иметь решения, не удовлетворяющие исходному уравнению, т.е. иметь так называемые «посторонние» корни. Поэтому всегда в тех случаях, когда обе части уравнения приходится возводить в квадрат, следует ставить вопрос об эквивалентности полученного и исходного уравнений.

В интересующем нас случае вопрос ставится так: не содержит ли линия (B) точек, которых нет на линии (A), т.е. таких, координаты которых не удовлетворяют уравнению (A) и таким образом не удовлетворяют исходному условию $|AB| = |AC|$. Произведя в обратном порядке операции, с помощью которых было получено уравнение (B), мы придем к уравнению

$AB^2 = AC^2$ или $AB^2 - AC^2 = 0$ или $(|AB| - |AC|)(|AB| + |AC|) = 0$.

Отсюда видно, что $AB - AC = 0$ или $AB + AC = 0$. В силу того, что $AB > 0$ и $AC > 0$, справедливо только равенство $AB - AC = 0$, что равносильно уравнению (B).

Поскольку из уравнения (A) получается уравнение (B) и обратно–из уравнения (B) следует уравнение (A), то эти уравнения равносильны (эквивалентны). Таким образом, поставленный нами вопрос решен: линия (B) не содержит таких точек, которых нет на линии (A).

Лекция 6

Кривые второго порядка, заданные каноническим уравнением

Линия L на плоскости Oxy называется линией (кривой) 2-го порядка, если она определяется ***уравнением 2-ой степени относительно*** x и y, т.е. уравнением вида:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (6.1)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю.

Линиями второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола. В данной лекции рассматриваются уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

Эллипс

Эллипсом называется линия, представляющая геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, а сумму расстояний точек эллипса от фокусов через $2a$. Тогда для любой точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, по определению выполняется равенство

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a \qquad (6.2)$$

Расстояния между фокусами эллипса обычно обозначается через $2c$:

$$|F_1F_2| = 2c \qquad (6.3)$$

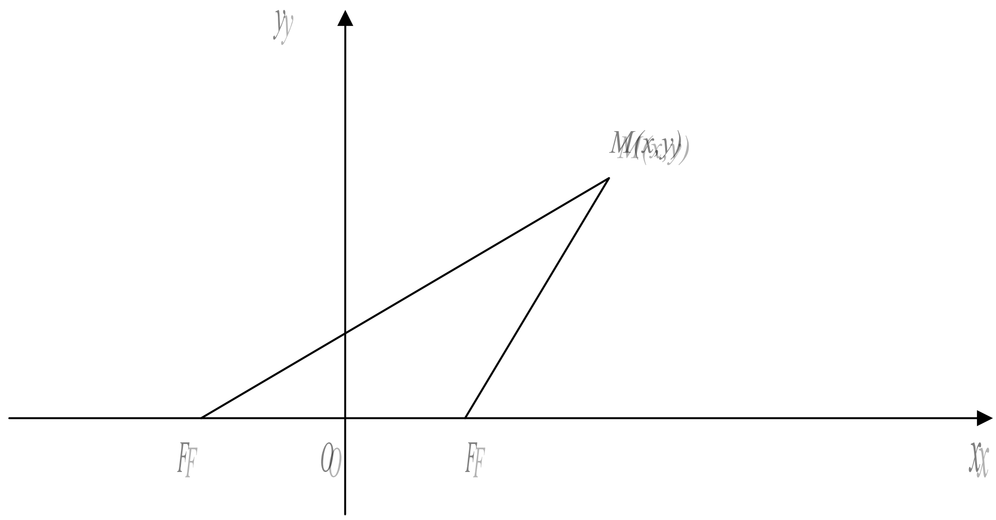


рис.1

Поскольку одна сторона треугольника всегда короче суммы двух других его сторон, то $2c < 2a$ откуда

$$c < a \qquad (6.4)$$

Чтобы вывести уравнение эллипса, надо, прежде всего, выбрать какую-нибудь систему координат. Проведем ось Ox через фокусы F_1 и F_2, а начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2. Этим определится и положение оси Oy(рис.1). Ясно, что в этой системе фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$. Для любой точки $M(x,y)$ по формуле (5.25):

$$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Отсюда и из (6.2) видно, что точка $M(x,y)$ лежит или не лежит на эллипсе, смотря по тому, верно или неверно равенство

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (6.5)$$

Таким образом, равенство (6.5) и есть уравнение рассматриваемого эллипса. Упростим громоздкое уравнение (6.5), возведя обе части в квадрат

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Откуда после упрощения получаем:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

Снова возведя в квадрат, находим

$a^2\left((x+c)^2 + y^2\right) = (a^2 + xc)^2$ или $a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$, т.е.

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (6.6)$$

Заметим теперь, что в силу (6.2) $a^2 - c^2 > 0$ и обозначая эту разность через b^2, имеем:

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ или } \quad a^2 = c^2 + b^2 \qquad (6.7)$$

Тогда (6.6) примет вид:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, деля обе части последнего равенства на a^2b^2, окончательно получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.8)$$

Это и есть простейшее или каноническое уравнение эллипса.

Исследование формы эллипса

Изучим форму эллипса, опираясь только на его каноническое уравнение (6.8).

Эллипс симметричен относительно оси Ox и оси Oy. Точка $O(0,0)$ – его центр симметрии. Доказательство этого факта непосредственно вытекает из так нбазываемого *принципа симметрии*: если в уравнение какой-либо линии координата x (y) входит только в четных степенях, то эта линия симметрична относительно оси Oy (Ox).

В силу сказанного, мы будем знать форму эллипса, если установим вид той его части, которая лежит в 1-ой координатной четверти. Для этого решим уравнение (6.8) относительно y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (6.9)$$

Отсюда вытекают 4 утверждения:

1. если $x = 0$, то $y = b$
2. если x увеличивается, то y уменьшается
3. если $x = a$, то $y = 0$
4. если $x > a$, то y оказывается мнимым, т.е. на эллипсе (6.8) вовсе нет точек, у которых $x > a$.

Коротко говоря, при возрастании x от нуля до a ордината y убывает от b до нуля. Точки $A_1(a,0),\ B_1(0,b),\ A_2(-a,0),\ B_2(0,-b)$, в которых эллипс пересекает оси симметрии, называются его ***вершинами***.

Для эллипса используются следующие обозначения:

A_1A_2–большая ось $|A_1A_2| = 2a$; OA_1– большая полуось $|OA_1| = a$;

B_1B_2–малая ось $|B_1B_2| = 2b$; OB_1– малая полуось $|OB_1| = b$.

Для построения эллипса удобно использовать его ***основной прямоугольник***–прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, стороны которого проходят через вершины эллипса симметрично относительно координатных осей. Эллипс целиком находится внутри основного прямоугольника, касаясь его сторон в своих вершинах.

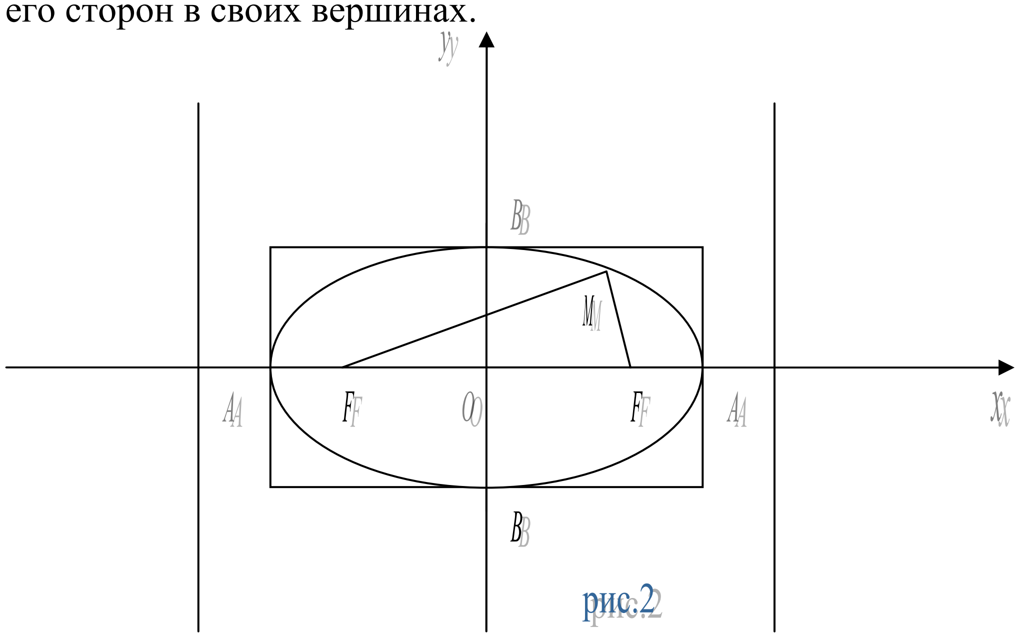


рис.2

Окружность можно считать таким эллипсом, у которого фокусы совпадают. В этом случае $c = 0$, а значит, $b = a$ и уравнение (6.8) принимает вид:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ т.е. превращается в известное уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение междуфокусного расстояния к большой оси, т.е. число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (6.9)$$

Т.к. $c < a$, то для любого эллипса будет $0 \le \varepsilon < 1$. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует окружности. Для того чтобы понять как значение ε влияет на форму эллипса, разделим обе части равенства (6.7) на a^2:

$\frac{b^2}{a^2} + \varepsilon^2 = 1$ или

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \qquad (6.10)$$

Из (6.10) видно, что при очень малом ε числа a и b почти равны, т.е. эллипс очень напоминает окружность. Если же ε близко к 1, то b весьма мало по сравнению с a и, стало быть, эллипс весьма вытянут вдоль оси Ox.

Как известно, планеты и кометы движутся по эллипсам. В одном из фокусов каждого такого эллипса находится Солнце, в другом фокусе ничего нет. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных – велики (близки к 1). Т.о. планеты движутся почти по окружностям, а кометы то приближаются к Солнцу, то весьма удаляются от него. Эксцентриситеты орбит Меркурия, Венеры, Земли и Марса равны соответственно $\varepsilon_М = 0,21 \quad \varepsilon_В = 0,01 \quad \varepsilon_З = 0,02 \quad \varepsilon_М = 0,09$. Эксцентриситеты же орбит комет Галлея и Энке равны соответственно $\varepsilon_Г = 0,97 \quad \varepsilon_Э = 0,87$.

Величина $k = \frac{b}{a}$ называется ***коэффициентом сжатия*** эллипса. Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - \varepsilon^2$.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

С эллипсом связаны две прямые, называемые ***директрисами***. Их уравнения:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}; \quad x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad (6.11)$$

Теорема 1. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния данной точки до фокуса к расстоянию от данной точки до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету* ε.

Доказательство (достаточность). Пусть для произвольной точки плоскости $M(x, y)$ выполнено соотношение:

$\dfrac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon$. Покажем, что в этом случае координаты точки удовлетворяют каноническому уравнению эллипса (6.8).

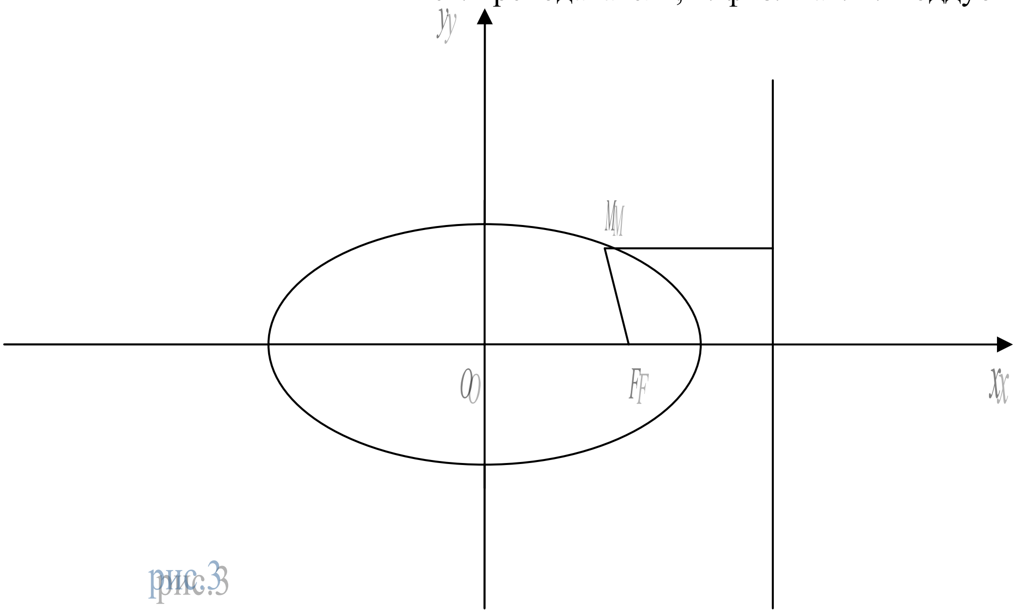


рис.3

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\varepsilon(\frac{a}{\varepsilon}-x)$. С учетом (6.9) возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$(x-c)^2+y^2=(a-\frac{c}{a}x)^2$$

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=(a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2-2xca^2+c^2a^2+y^2a^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+y^2a^2=a^2(a^2-c^2)$$

Вводя обозначение $a^2-c^2=b^2$, получаем

$b^2x^2+y^2a^2=a^2b^2$.

Деля обе части равенства на a^2b^2, получаем каноническое уравнение эллипса (6.8).

Для доказательства необходимого условия теоремы требуется все рассуждения провести «снизу вверх».

Теорема доказана.

Эллипс с центром симметрии в точке $O(x_0,y_0)$ описывается уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (6.12)$$

В частности, если $a=b$, получаем уравнение окружности с центром в точке $O(x_0,y_0)$ и радиусом $a=b$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2 \qquad (6.13)$$

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Решение.

1) Координаты нижней вершины: x = 0; $y^2 = 16$; y = -4.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; c = 3; $F_2(-3; 0)$.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\qquad 4x=-3y-12;\qquad 4x+3y+12=0$$

Пример 2. Показать, что $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Выделим полные квадраты для переменной x и y.

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)-4-9-3=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2-16=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16$$

Уравнение окружности имеет вид (6.13), центр окружности находится в точке $A(-2,3)$, радиус равен 4.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для которых разность расстояний до двух данных точек, называемых ***фокусами*** есть величина постоянная.

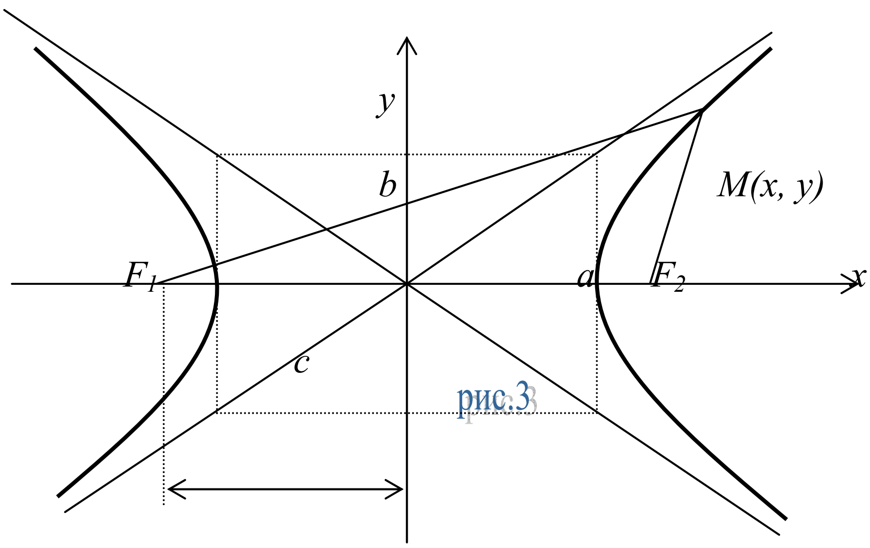


рис.3

По определению

$$|F_1M|-|F_2M|=2a, \qquad (6.14)$$

где сумму расстояний точек гиперболы от фокусов обозначили через $2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. Расстояние между фокусами $|F_1F_2|=2c$.

Из треугольника F_1MF_2:

$|F_1M|-|F_2M|<|F_1F_2|$, откуда следует соотношение:

$$a<c \qquad (6.15)$$

Выберем на гиперболе произвольную точку *M(x, y)*. Тогда:

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\qquad F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2+4xc$$
$$a^2(x-c)^2+a^2y^2 = a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 = a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-a^4-x^2c^2 = 0$$
$$-x^2(c^2-a^2)+a^2(c^2-a^2)+a^2y^2 = 0$$
$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

обозначим $c^2-a^2=b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2-a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6.16)$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно начала координат и относительно осей координат.

Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы.

Ось $2b$ называется мнимой осью гиперболы.

Для построения гиперболы удобно использовать его ***основной прямоугольник***–прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, стороны которого проходят через вершины гиперболы симметрично относительно координатных осей. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника, являются *асимптотами* гиперболы.

Гипербола целиком находится вне основного прямоугольника, касаясь его сторон в своих вершинах.

Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ называется ***эксцентриситетом*** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2-a^2=b^2$:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$$

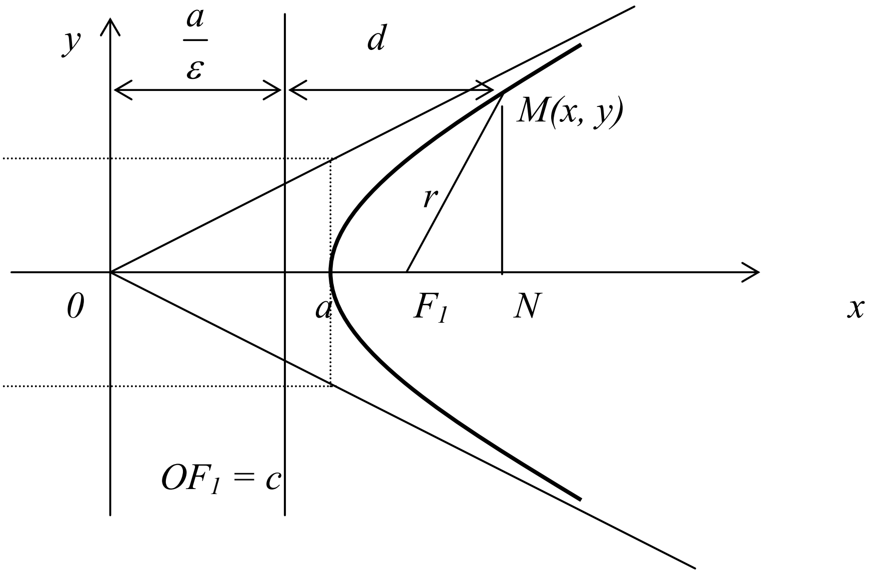
$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$$

Если $a=b$, $\varepsilon=\sqrt{2}$, то гипербола называется ***равнобочной (равносторонней).*** Чем ближе ε к 1, тем теснее прижата гипербола к оси Ox. При $\varepsilon\to 1$ гипербола вырождается в два луча $(-\infty,-a]$ и $[a,+\infty)$; при $\varepsilon\to+\infty$ – в пару прямых, параллельных оси Oy.

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются ***директрисами*** гиперболы. Их уравнения: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 2. *Для того чтобы точка $M(x,y)$ лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $\frac{r}{d}=\varepsilon$, если r – расстояние от точки M до какого-либо фокуса гиперболы , d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы.*

Доказательство (необходимость). Изобразим схематично гиперболу.



Из очевидных геометрических соотношений можно записать:

$\frac{a}{\varepsilon}+d=x$, следовательно $d=x-\frac{a}{\varepsilon}$.

Из прямоугольного треугольника F_1MN получаем:

$(x-c)^2+y^2=r^2$

Из канонического уравнения гиперболы (6.16): $y^2=\frac{x^2b^2}{a^2}-b^2$, с учетом $b^2=c^2-a^2$ имеем:

$$r^2=x^2-2xc+c^2+\frac{x^2b^2}{a^2}-b^2=x^2-2xc+c^2+\frac{c^2x^2}{a^2}-x^2-c^2+a^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2$$

$$r=\frac{c}{a}x-a$$

Тогда т.к. $\frac{c}{a}=\varepsilon$, то $r=\varepsilon x-a$.Окончательно имеем $\frac{r}{d}=\frac{\varepsilon x-a}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. Для доказательства достаточного условия теоремы требуется все рассуждения провести «снизу вверх». Теорема доказана.

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $O(x_0,y_0)$, а прямые $x=x_0$, $y=y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $y=y_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (6.17)$$

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $O(x_0, y_0)$, а прямые $x=x_0$, $y=y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $x=x_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1 \qquad (6.18)$$

Пример 3. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2-3y^2=6$.

Решение. Разделив обе части уравнения гиперболы на 6, получим:

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$, откуда $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$.

Таким образом, $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ – искомые уравнения асимптот гиперболы.

Пример 4. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение. Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы:

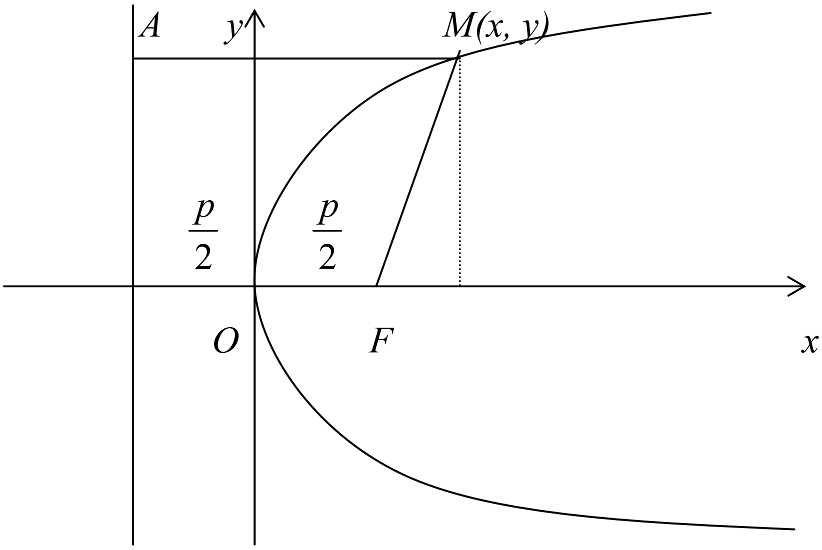
$c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ – искомое уравнение гиперболы.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется ***параметром*** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: $AM=MF;\ AM=x+p/2;$

$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$

$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$

$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$

$$y^2 = 2px \qquad (6.19)$$

Уравнение директрисы в этом случае: $x = -p/2$. Парабола симметрична относительно оси Ox.

$$y^2 = -2px \qquad (6.20)$$

Уравнение директрисы в этом случае: $x = p/2$. Парабола симметрична относительно оси Ox.

Для парабол вида (6.19) и (6.20) их фокусы лежат на оси Ox. Если фокус параболы лежит на оси Oy, то в зависимости от расположения директрис имеем два случая:

$$x^2 = 2py \qquad (6.21)$$

Уравнение директрисы в этом случае: $y = -p/2$.

$$x^2 = -2py \qquad (6.22)$$

Уравнение директрисы в этом случае: $y = p/2$.

Если ось симметрии параболы параллельна оси Oy, а ее вершина находится в точке $A(x_0, y_0)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0) \qquad (6.23)$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox, а ее вершина находится в точке $A(x_0, y_0)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \qquad (6.24)$$

Пример 5. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение. Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$.

$r = x + p/2 = 4$; следовательно: $x=2;\ y^2=16;\ y=\pm 4.$

Искомые точки: $M_1(2; 4),\ M_2(2; -4)$.

Пример 6. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы: $y = -x^2 + 4x - 5$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат.

$y = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 5 - 4) = -(x-2)^2 - 1$

$y + 1 = -(x-2)^2$

Координаты вершины имеют вид $A(2,-1)$, уравнение оси симметрии $x = 2$, ветви направлены вниз, уравнение директрисы $y = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Лекция 7

Аналитическая геометрия в пространстве

Если в трехмерном пространстве задана система координат $Oxyz$, то ***уравнением поверхности*** S называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ между переменными x,y,z, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности S.

Простейшей поверхностью в пространстве является плоскость.

Уравнения плоскости в пространстве

Ненулевой вектор $\vec{n}$, который перпендикулярен каждому вектору, лежащему в плоскости $\wp$, называется нормальным вектором этой плоскости.
Если $\vec{n}=\{A,B,C\}$ – нормальный вектор плоскости, то вектор $\lambda\vec{n}=\{\lambda A,\lambda B,\lambda C\}$, где $\lambda\neq 0$, будет также нормальным вектором плоскости.

Предположим, что плоскость $\wp$ имеет нормальный вектор $\vec{n}=\{A,B,C\}$ и проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Если точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости $\wp$, то векторы $\vec{n}=\{A,B,C\}$ и $M_0\vec{M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ будут перпендикулярны. Как известно, для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были ортогональны, необходимо и достаточно чтобы их скалярное произведение равнялось нулю. Поэтому $\vec{n}\cdot M_0\vec{M}=0$ или в координатной записи:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (7.1)$$

Это уравнение называется ***уравнением плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Раскрывая скобки и обозначая $-(Ax_0+By_0+Cz_0)=D$, получаем уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (7.2)$$

которое называется ***общим уравнением плоскости***.
Из (7.2) видно, что уравнение плоскости линейно относительно переменных $x,\ y,\ z$.

Очевидно, что плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}+\mathrm{D}=0, \qquad (7.3)$$

Где $\vec{n}$ – нормаль плоскости; $\vec{r}=(x,y,z)$ –радиус-вектор произвольной точки плоскости.
Отметим некоторые частные случаи уравнения (7.2):

1. Если $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$ – уравнение плоскости, проходящей через начало координат;
2. Если $D\neq 0$, $A=0$, то $By+Cz+D=0$ – уравнение плоскости, параллельной оси Ox.

3. Если $D \neq 0, C \neq 0, A = B = 0$, то $Cz + D = 0 -$ уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxy.
4. $z = 0 -$ уравнение плоскости Oxy.

Аналогично рассматриваются и другие случаи равенства нулю некоторых коэффициентов уравнения (7.2).

Пусть теперь в уравнении (7.2) все коэффициенты отличны от нуля. Тогда, введя обозначения: $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$, представим уравнение (7.2) в виде ***уравнения плоскости в отрезках***:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (7.4)$$

Для того чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в декартовой системе координат. Для того чтобы произвольная точка M(x, y, z) лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны, т.е. $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$.

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.5)$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е. $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.6)$$

Плоскость, заданную общим уравнением, можно построить по линиям ее пересечения с координатными плоскостями.

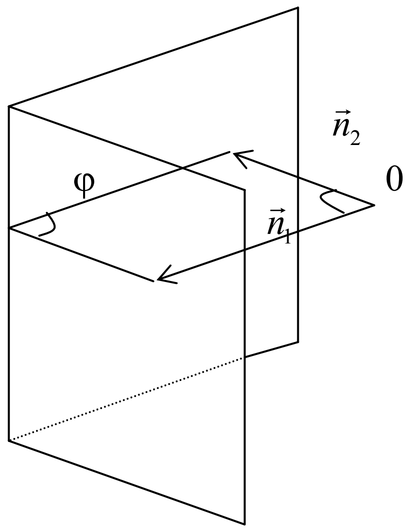
Пример 1. Построить плоскости

1. $x + 2y + 3z - 6 = 0$
2. $x + 3z - 3 = 0$
3. $y - 2 = 0$

Решение.

1. Положим $z=0$ в уравнении $x+2y+3z-6=0$. Тогда получим $x+2y-6=0$ – уравнение прямой в плоскости Oxy. Если $y=0$, то $x+3z-6=0$ – уравнение прямой в плоскости Oxz.
2. В уравнении $x+3z-3=0$ отсутствует переменная y, что означает, что нормальный вектор $\vec{n}=\{1,0,3\}$, перпендикулярен оси Oy ($\vec{n}\cdot\vec{j}=0$). Следовательно, данная плоскость параллельна оси Oy. Уравнение $x+3z-3=0$ можно рассматривать как след данной плоскости в плоскости Oxz.
3. Уравнение $y-2=0$ изображает плоскость, параллельную плоскости Oxz и пересекающую ось Oy в точке $y=2$.

Угол между плоскостями.
Параллельность и перпендикулярность плоскостей



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ равен углу между нормалями к этим плоскостям. Такое определение позволяет в качестве угла между плоскостями рассматривать либо острый, либо тупой угол, дополняющие друг друга до π. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$\wp_1 \qquad \overrightarrow{n_1}\cdot\vec{r}+D_1=0$

$\wp_2 \qquad \overrightarrow{n_2}\cdot\vec{r}+D_2=0$,

где $\overrightarrow{n_1}$ *(A₁, B₁, C₁)*, $\overrightarrow{n_2}$ *(A₂, B₂, C₂)*. Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле (4.6):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Если две плоскости

$\wp_1 \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и

$\wp_2 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

параллельны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны, т.е. из условия коллинеарности двух векторов:

$$\wp_1 \parallel \wp_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (7.7)$$

Равенство (7.7) представляет условие параллельности двух плоскостей $\wp_1$ и $\wp_2$.

Если две плоскости $\wp_1$ и $\wp_2$ перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны, т.е. из критерия ортогональности двух векторов вытекает:

$$\wp_1 \perp \wp_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7.8)$$

Равенство (7.8) представляет условие перпендикулярности двух плоскостей $\wp_1$ и $\wp_2$.

Уравнение линии в пространстве

Линию L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана соответствующим уравнением $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. ***Уравнением линии в пространстве*** назовем совокупность двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (7.9)$$

Замечание. Не следует думать, что для нахождения уравнения линии систему (7.9) следует «решить». Этого, вообще говоря, нельзя сделать, т.к. число уравнений системы (7.9) меньше числа неизвестных. Точный смысл, который придается равенствам (7.9), следующий: *линии L принадлежат те и только те точки $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям системы (7.9).*

Уравнения прямой в пространстве

- Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Пусть в пространстве заданы две плоскости по формуле (7.3):

$\overrightarrow{n_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{n_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты:

$\overrightarrow{n_1}$ *(A₁, B₁, C₁)*, $\overrightarrow{n_2}$ *(A₂, B₂, C₂)*; $\vec{r}$ *(x, y, z)*.

Тогда общее уравнение прямой в векторной форме:

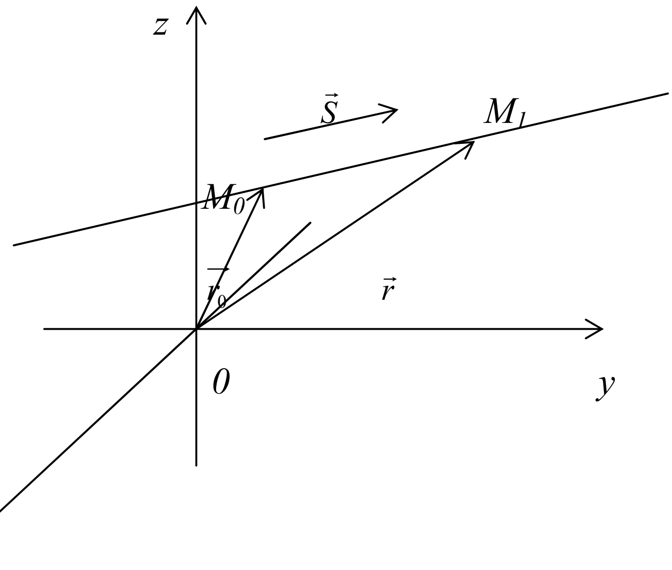
$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

- Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

На произвольной прямой l возьмем две любые точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ и ***направляющий вектор*** $\vec{s} = (m, n, p)$ прямой.



Обозначим радиус-векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$.
Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{s}$ t, где t – некоторый параметр. Итого, можно записать:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}\,t \tag{7.12}$$

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то получили ***параметрическое уравнение прямой*** в векторном виде.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{7.13}$$

Выражая параметр t из каждого уравнения совокупности (7.13) и приравнивая его, получаем ***канонические уравнения прямой*** в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{7.14}$$

Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (7.15)$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{s}$ определяют координаты единичного вектора $\vec{e}_{\vec{s}}$, сонаправленного с вектором $\vec{s}$.

Направляющие косинусы удовлетворяют соотношению:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (7.16)$$

Числа *m, n, p* называются ***угловыми коэффициентами*** прямой.

- Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то аналогично как это было сделано в лекции 5 для соответствующего уравнения на плоскости, получаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (7.17)$$

уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в виде (7.11) к каноническому виду (7.14). При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормалей к заданным плоскостям.

$$\vec{s} = \vec{n_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Пример 2. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Решение. Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату *x = 0*, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$, т.е. A(0, 2, 1).

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;\quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17;\quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1:\quad \vec{r} = \vec{r_1} + \vec{s_1}t$$

$$l_2:\quad \vec{r} = \vec{r_2} + \vec{s_2}t$$

$\vec{r}=(x,y,z)$; $\vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$; $\vec{r_2}=(x_2,y_2,z_2)$; $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$; $\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$.

Угол между прямыми φ есть угол между направляющими векторами этих прямых, который находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (7.18)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

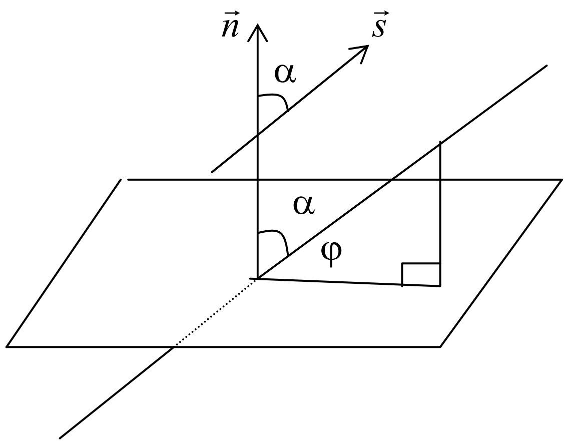
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (7.19)$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad (7.20)$$

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0$, а прямая - $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{s}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\varphi=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{s}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\sin\varphi=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|} \qquad (7.21)$$

или в координатной форме:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (7.22)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве

Для того чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{n} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0. \qquad (7.23)$$

Для того чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{n} \times \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (7.24)$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости (7.2) вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (7.25)$$

Понятие гиперплоскости, выпуклого множества

Обобщением понятия плоскости трехмерного пространства на случай $n-$мерного пространства является понятие ***гиперплоскости***. Каждую гиперплоскость можно задать одним линейным уравнением вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (7.26)$$

Очевидно, что на декартовой плоскости уравнение (7.26) описывает прямую.
Если в $n-$мерном пространстве задана гиперплоскость (7.26), то этой гиперплоскостью все точки пространства разбиваются на два *полупространства*:

1. множество точек, для которых $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b$ (7.27)
2. множество точек, для которых $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ (7.28)

Эти полупространства пересекаются по самой гиперплоскости (7.26).

Множество X точек $n-$мерного пространства называется ***выпуклым***, если для любых $A, B \in X$ справедливо $\lambda A + (1-\lambda)B \in X, \forall \lambda \in [0,1]$, т.е. выпуклое множество наряду с любыми двумя своими точками A и B содержит и все точки отрезка AB.

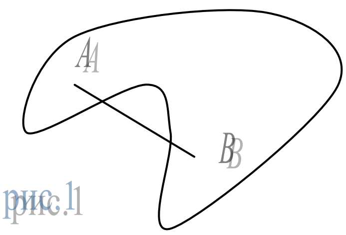


рис.1

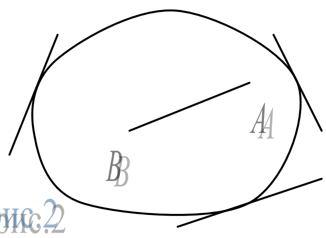


рис.2

Пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Каждое полупространство (7.27), (7.28) является выпуклым множеством. Гиперплоскость (7.26), как пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Через каждую точку границы выпуклого множества на плоскости проходит, по крайней мере, одна ***опорная прямая***, имеющая общую точку с границей, но не рассекающая это множество.

В трехмерном пространстве через каждую точку границы выпуклого множества проходит хотя бы одна ***опорная плоскость***, оставляющая это множество в одном полупространстве.

Множество X точек $n-$мерного пространства называется ***ограниченным***, если оно имеет конечный диаметр $d(\mathrm{X})=\max\limits_{A\in \mathrm{X},B\in \mathrm{X}}\rho(A,B)$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны m полупространств, определяемых неравенствами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\ge b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\ge b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\ge b_m \end{cases} \qquad (7.29)$$

Все знаки неравенств одного смысла могут быть достигнуты умножением, в случае необходимости, обеих частей неравенства на -1. Пересечение этих полупространств, называемое ***выпуклой многогранной областью***, определяет множество решений системы линейных неравенств (7.29). Если это пересечение ограничено, оно называется выпуклым многогранником $n-$мерного пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. Изобразить графически множество решений систем неравенств:

$$\begin{cases} x+y\le 9 \\ 5x+y\ge 5 \\ 2x-y\le 6 \\ 2y-x\le 6 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} x+y\ge 9 \\ 5x+y\le 5 \\ 2x-y\ge 6 \\ 2y-x\ge 6 \end{cases} (2) \qquad \begin{cases} x+y\le 9 \\ 5x+y\ge 5 \\ 2x-y\le 6 \end{cases} (3) \qquad \begin{cases} x+y\le 9 \\ 5x+y\ge 5 \\ 2y-x\le 6 \end{cases} (4)$$

Решение. В общем виде сисиема m линейных неравенств с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\ge b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\ge b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\ge b_m \end{cases} \qquad (7.30)$$

Приведем алгоритм нахождения графического решения системы (7.30).

1. шаг. Для каждого неравенства системы на декартовой плоскости строим соответствующую прямую, заменяя в каждом неравенстве знак «неравенства» на знак «равенства».

2. шаг. Строим на декартовой плоскости прямые, определяемые каждым равенством.
3. шаг. Методом «контрольной точки» определяем полуплоскость, множество точек которой доставляют решение соответствующему неравенству. В качестве «контрольной точки» удобно брать точку $O(0,0)$.

   Если при подстановке ее координат в исследуемое неравенство получаем верное числовое неравенство, то множеством решений для исходного неравенства является та полуплоскость, в которой лежит контрольная точка. Если же при подстановке координат контрольной точки в исследуемое неравенство получаем неверное числовое неравенство, то множеством решений для исходного неравенства является та полуплоскость, в которой не лежит контрольная точка.
4. шаг. Ответом является область пересечения всех полуплоскостей.

Построим на плоскости четыре прямые, заданные уравнениями
$x+y=9,\ 5x+y=5,\ 2x-y=6,\ 2y-x=6$.

Напомним, что для построения прямой достаточно двух точек. Построим прямые по их уравнениям в отрезках

$\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{9}=1,\ x+\dfrac{y}{5}=1,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-6}=1,\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{x}{-6}=1$

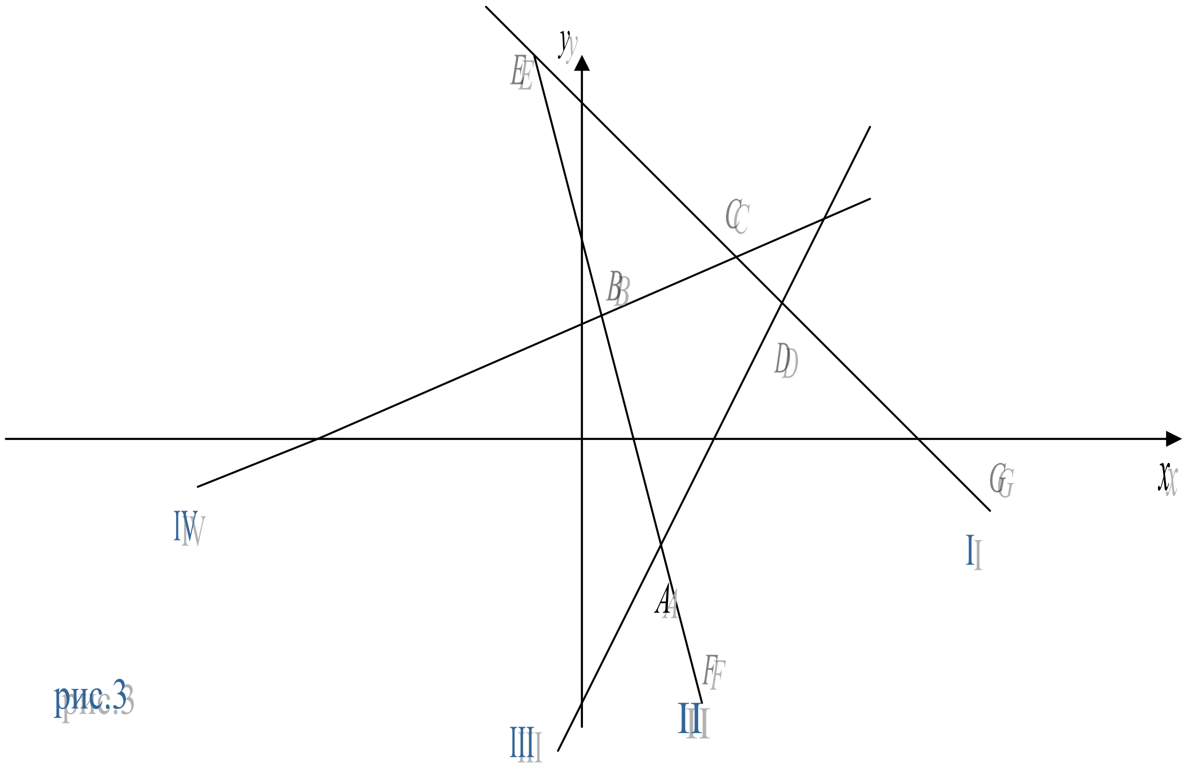


рис.3

Из рис.3 видно, что решением системы неравенств (1) является множество точек, лежащих внутри и на границе выпуклого четырехугольника $ABCD$. Решением системы (2) является пустое множество точек. Система неравенств (3) определяет треугольную область ADE. Система неравенств (3) задает неограниченную область $FBCG$.

Лекция 8

Матрицы линейных преобразований

Пусть в n-мерном линейном пространстве с базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ задано линейное преобразование A. Тогда векторы $A\overline{e_1}, A\overline{e_2}, \dots, A\overline{e_n}$ - также векторы этого пространства и их можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\begin{aligned} A\overline{e_1} &= a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \dots + a_{n1}\overline{e_n} \\ A\overline{e_2} &= a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \dots + a_{n2}\overline{e_n} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\overline{e_n} &= a_{n1}\overline{e_1} + a_{n2}\overline{e_2} + \dots + a_{nn}\overline{e_n} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (8.2)

называется ***матрицей линейного преобразования A***.

Если в пространстве L взять вектор $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \dots + x_n\overline{e_n}$, то $A\overline{x} \in L$.

$$A\overline{x} = x_1'\overline{e_1} + x_2'\overline{e_2} + \dots + x_n'\overline{e_n}, \tag{8.3}$$

где

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Эти равенства можно назвать линейным преобразованием в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$.

В матричном виде:

$$\overline{x} = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \overline{x} = \overline{x}' \tag{8.4}$$

Пример 1. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= y + z \\ z' &= z + x \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z \\ y' &= 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ z' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Если вектор $\bar{x}$ переводится в вектор $\bar{y}$ линейным преобразованием с матрицей A, а вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$ линейным преобразованием с матрицей B, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$ (оно называется ***произведением составляющих преобразований***).

$$C = B \cdot A \qquad (8.5)$$

Пример 2. Задано линейное преобразование A, переводящее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ и линейное преобразование B, переводящее вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

Решение. C=B·A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Т.е. $\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$

Замечание. Если $|A| = 0$, то преобразование вырожденное, т.е., например, плоскость преобразуется не в целую плоскость, а в прямую.

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования

Пусть L – заданное n-мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется ***собственным вектором*** линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}. \qquad (8.6)$$

При этом число λ называется ***собственным значением (характеристическим числом)*** линейного преобразования A, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Если линейное преобразование A в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.7)$$

Это уравнение называется ***характеристическим уравнением,*** а его левая часть – ***характеристическим многочленом*** линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

в некотором базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Если преобразование А имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\overline{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является ***характеристическим уравнением линейного преобразования A***.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\overline{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования A с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования A, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое ***собственное направление*** или ***собственную прямую***.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две ***собственные прямые***.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется ***преобразованием подобия***.

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

Пример 4. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{array}{l} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{array}$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*-параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\vec{e_1} + \vec{e_2})t$.

Рассмотрим другой <u>частный случай</u>. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования *A*, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, то

$$x_1' = \lambda x_1; \quad x_2' = \lambda x_2; \quad x_3' = \lambda x_3,$$

где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования *A*.

Если матрица линейного преобразования *A* имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

Пример 5. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования *A*, матрица линейного преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$; $x_3 = -1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3})\cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})\cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})\cdot t.$

Пример 6. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, матрица линейного преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3+\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2)+2(4-2\lambda-2)-4(2-1+\lambda)=0$$
$$-(3+\lambda)(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-2)+2(2-2\lambda)-4(1+\lambda)=0$$
$$-(3+\lambda)(\lambda^2-3\lambda)+4-4\lambda-4-4\lambda=0$$
$$-3\lambda^2+9\lambda-\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda=0$$
$$-\lambda^3+\lambda=0$$
$$\lambda_1=0;\quad \lambda_2=1;\quad \lambda_3=-1;$$

Для $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x_1+x_2=-2x_3 \\ x_1+x_2=-2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Собственные векторы $\overrightarrow{u_1} = (0\cdot\overrightarrow{e_1} - 2\cdot\overrightarrow{e_2} + 1\cdot\overrightarrow{e_3})\cdot t$, где t – параметр.

Аналогично можно найти $\overrightarrow{u_2}$ и $\overrightarrow{u_3}$ для λ_2 и λ_3.

Пример 7. Пусть дана леонтьевская балансовая модель “затраты-выпуск” (2.15). Определить, будет ли продуктивной матрица технологических коэффициентов А. Найти вектор валовой продукции Х при заданном Y, где

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125 \end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для решения вопроса о продуктивности матрицы А следует найти собственные значения этой матрицы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0{,}125-\lambda & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(0{,}125-\lambda)^2 - 0{,}140625 = 0 \Rightarrow 0{,}125-\lambda = \pm\, 0{,}375.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = -0{,}25$. Оба корня по модулю меньше единицы, значит, матрица технологических коэффициентов А продуктивная. Для определения вектора валовой продукции Х имеем формулу $X = (E - A)^{-1}Y$. Найдем обратную матрицу для матрицы

$$E\text{-}A=\begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B = E\text{-}A$, тогда $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875\cdot 300+0{,}125\cdot 400 \\ 1{,}125\cdot 300+0{,}125\cdot 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 312{,}5 \\ 687{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 57{,}9 \\ 127{,}3 \end{pmatrix}.$$

Введение в математический анализ

Лекция 9
Множества и операции над ними

Рассмотрим понятие множества. Можно говорить о множестве дней в году, точек на плоскости, студентов в данной аудитории и т.д. В этих случаях каждый день в году, каждая точка на плоскости, каждый студент в аудитории является элементом соответствующего множества.

Существенным обстоятельством при рассмотрении конкретного множества является возможность для всякого элемента дать вполне определенный ответ на вопрос – принадлежит ли данный элемент множеству или нет. Так для первого из приведенных выше множеств, 3 июля, 25 ноября, 9 января – элементы рассматриваемого множества, когда как «среда», «пятница», «праздник» не являются элементами рассматриваемого множества. Во втором примере элементами множества являются только точки заданной плоскости. Если точки не принадлежат заданной плоскости или рассматриваемый элемент не есть точка, то эти элементы не являются элементами множества.

Множеством М называется объединение в единое целое определенных различимых объектов a, которые называются ***элементами*** множества: $a \in$ М.

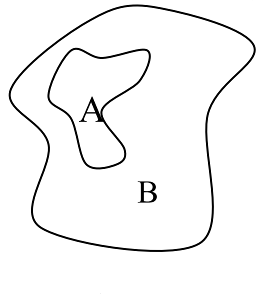
Множество можно описать, указав какое–нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$.

Два множества A и B называются ***равными*** $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Запись $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, a_3, ...$ Если множество A состоит из тех элементов множества B, которые обладают определенным свойством, то пишут $A = \{a \in B \,|\, ...\}$, где после вертикальной черты записано указанное свойство элементов множества A. Например множество точек отрезка $[a, b]$ может быть записано следующим образом: $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x \le b\}$.

Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что множество А ***включается (содержится)*** в множестве В.



А $\subset$ В

Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется ***диаграммой Эйлера – Венна***.

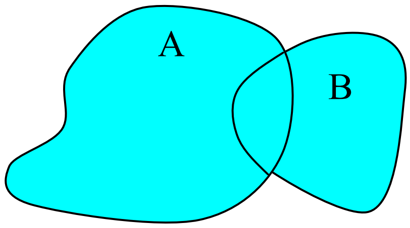
Если A ⊆ B, то множество A называется ***подмножеством*** множества B, а если при этом A ≠ B, то множество A называется ***собственным подмножеством*** множества B и обозначается A ⊂ B.

Два множества A и B равны тогда и только тогда когда справедливы соотношения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Операции над множествами

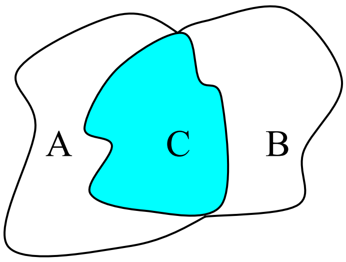
Объединением (суммой) множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначается C=A∪B.



Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B.

Обозначение C=A∩B.



Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$A \cap A = A \cup A = A$; $\quad A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

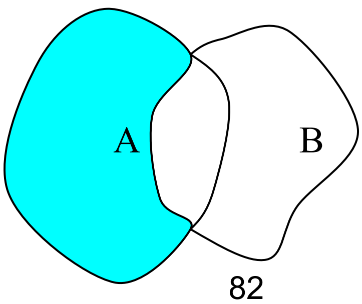
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (A \cap B) = A$; $\quad A \cap (A \cup B) = A$;

$A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$;

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

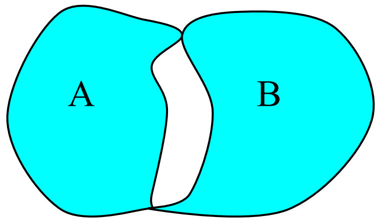
Обозначается C=A\B.



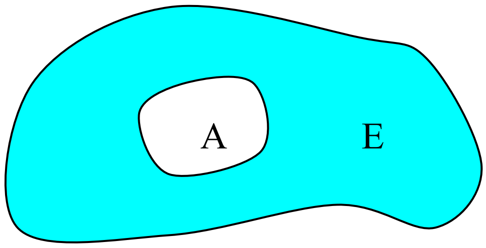
Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается $A \Delta B$.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



C_E называется ***дополнением*** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$A \setminus B \subseteq A$; $A \setminus A = \varnothing$; $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

$A \Delta B = B \Delta A$; $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

$A \cup C_E A = E$; $A \cap C_E A = \varnothing$; $C_E E = \varnothing$; $C_E \varnothing = E$; $C_E C_E A = A$;

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$;

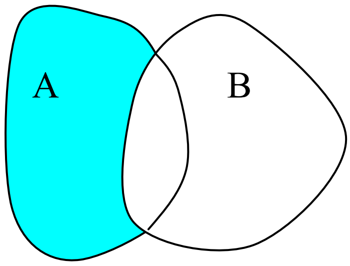
Пример 1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Венна $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

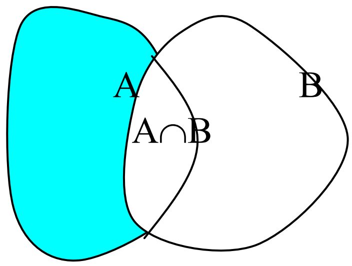
Решение. Из записанных выше соотношений видно, что

$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Венна





Пример 2. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Решение. Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество $A \setminus B$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество $A \setminus C$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C.

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Отображения (функции)

Если для каждого $x \in X$ по определенному правилу поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задана ***функция (отображение)*** f множества X в множество Y: $X \xrightarrow{f} Y$.

Элемент $x \in X$ называется ***аргументом*** функции f, элемент $y \in Y$ – ***значением*** функции f, соответствующим элементу $x \in X$, $y = f(x)$, а сама функция однозначно определяется правилом, по которому $\forall x \in X$ соответствует $y \in Y$. Множество X называется ***областью определения***, а множество всех элементов $y \in Y$, для которых существуют $x \in X$, такие что $y = f(x)$,–***множеством значений*** функции.

В дальнейшем мы будем рассматривать так называемые ***однозначные числовые функции*** f: $\forall x \in X \subset \mathbb{R} \quad \exists\ ! y \in Y \subset \mathbb{R}: \quad y = f(x)$.

Графиком функции называется множество точек на декартовой плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Способы задания функций

Функция может быть задана:

1. *Аналитически* в виде комбинаций алгебраических действий и известных элементарных функций: $x^{\alpha}, a^{x}, \log_a x, tgx, ctgx, \sin x, \cos x$.
2. *Графически*

3. *Таблично*

Если функция задана аналитически, т.е. при помощи формулы, то можно построить для нее таблицу или, как говорят, *табулировать* функцию. Всегда ли возможен обратный переход от табличного к аналитическому способу задания функции? Отметим, что таблица дает не все значения функции, причем промежуточные значения функции могут быть найдены лишь приближенно, так называемое интерполирование функции. Поэтому в общем случае найти точное аналитическое выражение функции по ее табличным данным нельзя.

Аналитический и табличный способы задания функции страдают отсутствием наглядности. Этого недостатка лишен графический способ задания функции. По графику функции можно приближенно построить таблицу соответствия между переменными x и y. Для построения графика функции, заданной аналитически, надо составить таблицу значений x и y данной функции, а затем построить систему точек плоскости. Соединяя эти точки линией, вид которой учитывает, по возможности, характер промежуточных значений функции, получаем примерное графическое изображение данной функции.

Таким образом, самым удобным с точки зрения дальнейшего анализа является аналитический способ задания функции.

Виды функций

Функция называется ***явной***, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной:

$$y = f(x) \tag{9.1}$$

Например, $y = \sqrt{(x+3)^5}$, $y = 9 - ctgx^2$.

Если область определения явной функции разбита на непересекающиеся множества, на каждом из которых функция определена различными выражениями, то такая функция называется ***составной***:

$$y = \begin{cases} f_1(x), & a_0 \le x \le a_1 \\ f_2(x), & a_1 < x \le a_2 \\ \dots \\ f_n(x), & a_{n-1} < x \le a_n \end{cases} \tag{9.2}$$

Функция y от аргумента x называется ***неявной***, если она задана уравнением, неразрешенным относительно зависимой переменной:

$$F(x, y) = 0 \tag{9.3}$$

Пример 3. $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y - \varepsilon \sin y = x$ (уравнение Кеплера).

Чтобы выразить функцию y, заданную уравнением (9.3), в явном виде, достаточно это уравнение разрешить относительно y. Так как для данного значения аргумента x уравнение (9.3) может иметь несколько и даже бесконечно много корней y, то в общем случае неявная функция является ***многозначной***.

Разрешая уравнение $x^2+y^2-1=0$ из примера 1 относительно y получаем две явных однозначных функции: $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$, графики которых представляют собой верхнюю и нижнюю полуокружности.

Уравнение Кеплера элементарными средствами не может быть разрешено относительно y. В таком случае функцию y приходится изучать, пользуясь непосредственно уравнением (9.3), определяющим эту функцию.

Функция называется ***параметрически заданной***, если она описывается множеством точек (x,y), где

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in[a,b],\ t \text{ называется параметром.} \tag{9.4}$$

Пример 4. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$–параметрическое задание окружности с центом в начале координат и единичным радиусом. Действительно, возводя обе части каждого уравнения совокупности в квадрат и складывая полученные результаты, получаем $x^2+y^2=1$.

Пусть $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. ***Композицией функций**** f,g называется функция, обозначаемая $g\circ f:X\to Z$ и определяемая как

$$(g\circ f)(x)\overset{def}{=}g(f(x)) \tag{9.5}$$

Правая часть в (9.5) показывает, что значение композиции в точке x вычисляется в результате последовательного действия сначала f, а затем на полученный результат функции g.

Пример 5. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f(x)=\sin x$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g(x)=x^2$, тогда $(g\circ f)(x)=(\sin x)^2$, а $(f\circ g)(x)=\sin x^2$.

Попутно доказано, что композиция функций не является операцией коммутативной.

Функции: степенная $y=x^\alpha$, показательная $y=a^x(a>0)$, логарифмическая $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$, тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ и обратные тригонометрические $y=arc\sin x$, $y=arc\cos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$, постоянные $y=c$ называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и

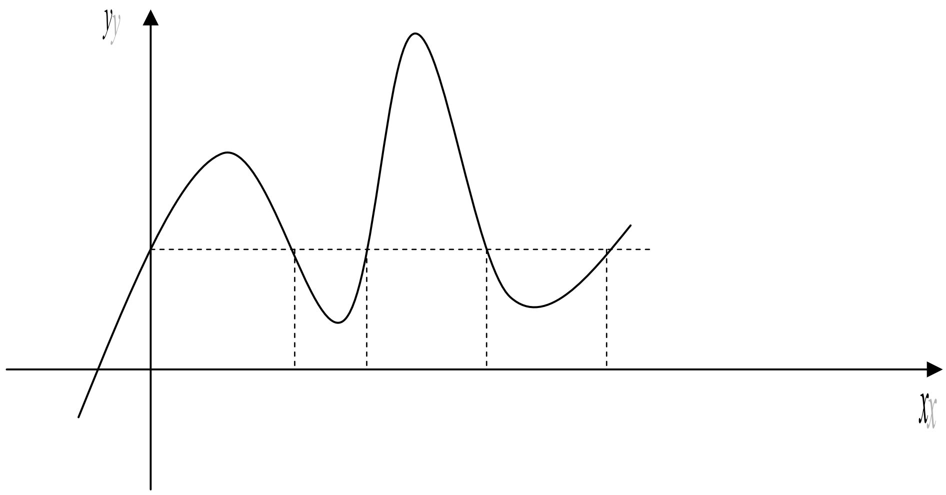
---

* В литературе термин «композиция функций» часто встречается под названием «суперпозиция функций» или «сложная функция»

суперпозиций основных элементарных функций, называется просто *элементарной функцией*.

Обратная функция

Пусть y есть явная функция от аргумента x (9.1). Задавая значения x будем получать значения y. Можно, однако, считая y аргументом, а x – функцией, задавать значения y и вычислять соответствующие значения x. В этом случае уравнение (9.1) будет определять x как неявную функцию от y: $y - f(x) = 0$. Как отмечалось выше, разрешая (9.1) относительно x, возможно получить несколько обратных функций. Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, т.е. данному значению y может соответствовать несколько значений $x_1, x_2, x_3 ...$обратной функции $x = \varphi(y)$.



В некоторых случаях удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее возможные значения.

Для однозначности обратной функции необходимо и достаточно, чтобы данная функция $y = f(x)$ принимала различные значения при различных значениях аргумента, т.е. чтобы $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$(в этом случае отображение $f : X \to Y$ называется инъективным).

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (неубывающей)***, если $\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2\ \exists y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2):\ y_1 < y_2\ (y_1 \leq y_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей (невозрастающей)***, если $\forall x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2\ \exists y_1 = f(x_1) \in Y,\ y_2 = f(x_2) \in Y:\ y_1 > y_2\ (y_1 \geq y_2)$.

Возрастающие или убывающие функции называются ***строго монотонными***.

Для однозначности обратной функции достаточно, чтобы данная функция $y = f(x)$ была строго монотонной.

Лекция 10

Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана ***последовательность***

$$x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots = \{x_n\} \qquad (10.1)$$

Каждый x_n называется элементом этой последовательности, а число n –его номером. По определению последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов.

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n) \qquad (10.2)$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример 1. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; -1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие ***операции***:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $y_n \neq 0,\ n = 1,2,\ldots$

Ограниченные и неограниченные последовательности
Предел последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| \le M \qquad (10.3)$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $[-M; M]$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху***, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \le M \qquad (10.4)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной снизу***, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \ge M \qquad (10.5)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$|x_n| > M \qquad (10.6)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной сверху***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$x_n > M \tag{10.7}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной снизу***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$x_n < M \tag{10.8}$$

Пример 2. $\{x_n\} = \{n\}$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$ например, числом $M = 0{,}5$.

Число a называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется условие:

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{10.9}$$

Это записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ ***сходится*** к a при $n\to\infty$.

Отметим, что неравенство (10.6) равносильно неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{10.10}$$

Для заданного числа a всякий интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью числа a и обозначается O_a^{ε}.

С помощью понятия окрестности определение предела последовательности можно перефразировать следующим образом:

Число a называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если в любой его окрестности содержатся все члены последовательности за исключением их конечного числа. Предел последовательности часто называют *точкой сгущения*.

Если отбросить какое-либо конечное число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Пример 3. Доказать, что предел последовательности $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n > N$ верно $\left|0 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример 4. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2+\frac{1}{n}, \dots$ имеет пределом число 2.

Имеем: $\{x_n\} = \{2 + 1/n\}$ или $\{1/n\} = \{x_n - 2\}$

Очевидно, что существует такое число *n*, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Теорема 1. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела *a* и *b*, не равные друг другу.

$x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \neq b.$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- ***любое*** число, то $|a-b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время: $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$, т.е. $\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $x_n \to a$, *то последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена.*

Доказательство. Т.к. *a* является пределом последовательности $\{x_n\}$, то для любого положительного ε>0 существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров *n>N* выполняется условие: $|x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда $|x_n| = |(x_n - a) + a| < |a| + |x_n - a| < \varepsilon + |a|$. Выбирая в качестве $M = \varepsilon + |a|$, получаем $|x_n| < M$. Теорема доказана.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Пример 5. последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, & \textit{при четном } n \\ 2 - \dfrac{1}{n}, & \textit{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Пример 6. последовательность $\{x_n\} = \left\{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)\right\}$ является ограниченной, т.к. при любом $n \in \mathrm{N}$ $\left|\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)\right| \le 1$. Однако предел этой последовательности не существует, т.к. $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n) = \begin{cases} 1, & \textit{при } n - \textit{четном} \\ -1, & \textit{при } n - \textit{нечетном} \end{cases}$

Монотонные последовательности

Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность называется ***возрастающей***.

Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность называется ***неубывающей***.

Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность ***убывающая***.

Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность ***невозрастающая***

Все эти последовательности называются ***монотонными.*** Возрастающие и убывающие последовательности называются ***строго монотонными***.

Пример 7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

$n+1$ член последовательности $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $x_n-x_{n+1}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример 8. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная сверху.

Пример 9. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\}=\{\dfrac{n}{5^n}\}$.

Найдем $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1}-x_n=\dfrac{n+1}{5\cdot 5^n}-\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n}=$

$=\dfrac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1-4n<0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема 4. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Число е

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

По формуле бинома Ньютона:

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$,

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+...+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$ или, что то же самое

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...$$

$$...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом *n* ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<\underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. по теореме 4 имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ следует, что e ≤ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем $e\ge 2+\frac{1}{2}=2{,}5$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, расширив требования к *x* до любого действительного числа. Доказательство этого факта, который носит название второго замечательного предела будет приведено в следующей лекции.

Рассмотрим **пример Я. И. Перельмана**, дающий интерпретацию числа *e* в задаче о сложных процентах. В сбербанках процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует большая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в банк положено 100 ден. ед. из расчета 100 % годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 ден. ед. превратятся в 200 ден.ед. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 ден. ед., если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 ден. ед. вырастут в $100 \cdot 1{,}5 = 150$, а еще через полгода - в $150 \cdot 1{,}5 = 225$ (ден. ед.). Если присоединение делать каждые 1/3 года, то по истечении года 100 ден. ед. превратятся в $100 \cdot (1+1/3)^3 \approx 237$ (ден. ед.). Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года, до 0,001 года и т.д. Тогда из 100 ден. ед. спустя год получится:

$$100 \cdot (1+1/10)^{10} \approx 259 \text{ (ден. ед.)},$$
$$100 \cdot (1+1/100)^{100} \approx 270 \text{ (ден. ед.)},$$
$$100 \cdot (1+1/1000)^{1000} \approx 271 \text{ (ден. ед.)}.$$

При безграничном сокращении сроков присоединения процентов наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно 271. Более чем в 2,71 раз капитал, положенный под 100% годовых, увеличиться не может, даже если бы наросшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду, потому что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Лекция 11

Предел функции в точке

1. *Предел функции по Гейне*

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Возьмем из X бесконечную последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$ Соответствующие значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность $\{f(x_n)\}$.Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ причем $x_n \neq a$, $n = 1, 2, ...,$ $a \in X$ или $a \notin X$.

Другими словами: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента x, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу A.

Если такое число A существует, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел в точке a.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Функция $f(x)$ может иметь в точке a только одно предельное значение, поскольку числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Пример 1. Пусть $f(x) = x - 1$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Решение. Возьмем какую-либо последовательность $\{x_n\}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ x_n \neq 0,\ n = 1, 2, ...$

$f(x_n) = x_n - 1,\ \ n = 1, 2, ...$ По свойству 2 числовых последовательностей $\{f(x_n)\} = \{x_n - 1\} = \{x_n\} - 1$. Очевидно, что т.к. $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, то $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 - 1$. Другими словами, $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Решение. Возьмем две последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$ и $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0,\ x_n \neq 0,\ x'_n \neq 0,\ n = 1, 2, ...$

$f(x_n) = \sin \pi n = 0,\ \ f(x'_n) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \ n = 1, 2, ...$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$, значит $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

2. ***Предел функции по Коши***

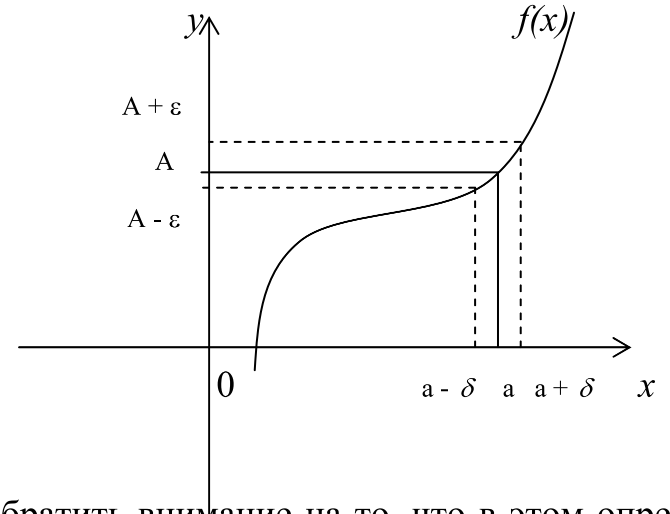
Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \delta$$

верно неравенство $$|f(x) - A| < \varepsilon \ .$$

То же определение может быть записано в другом виде:
Если $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, (значение аргумента x попали в δ-окрестность точки a), то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (соответствующие значения функции попадают в ε-окрестность точки A).



Следует обратить внимание на то, что в этом определении не требуется, чтобы функция была задана и в предельной точке; нужно только, чтобы функция была определена в какой-нибудь окрестности предельной точки, но не обязательно в самой точке.

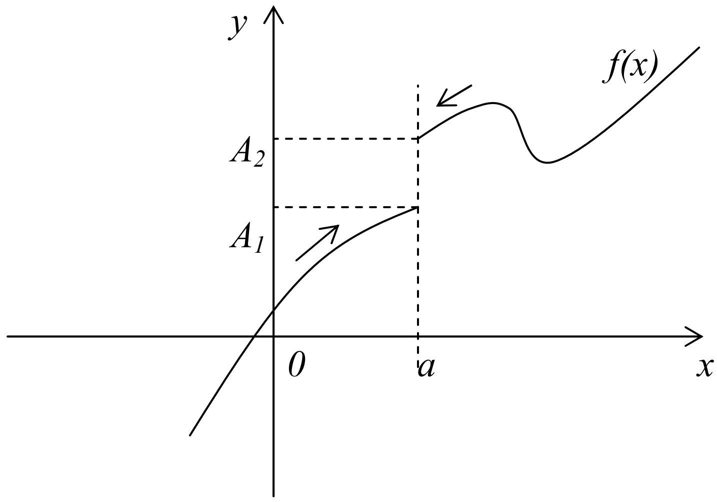
Пример 3. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Однако, как будет показано далее, она стремится к 1 при $x \to 0$.

Отыскание предела функции, определенной в некоторой окрестности точки a*, но не в ней самой, и составляет одну из важнейших задач теории пределов.*

Пример 4. Доказать $\lim\limits_{x \to a} x = a$ для любой точки a.

Действительно, неравенство $|x - a| < \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число, будет справедливо для всех x, принадлежащих ε-окрестности точки a, и значит, в данном случае можно положить $\delta = \varepsilon$.

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = a$ ***слева***, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = a$ ***справа***.



Приведенные выше определения относится к случаю, когда функция *f(x)* не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также ***односторонними пределами*** функции *f(x)* в точке $x = a$. Если A – конечное число, то говорят, что A – ***конечный предел*** функции *f(x)*.

Теорема 1. *Функция f(x) имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е.

из $a - \delta < x < a$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$ и из $a < x < a + \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$.

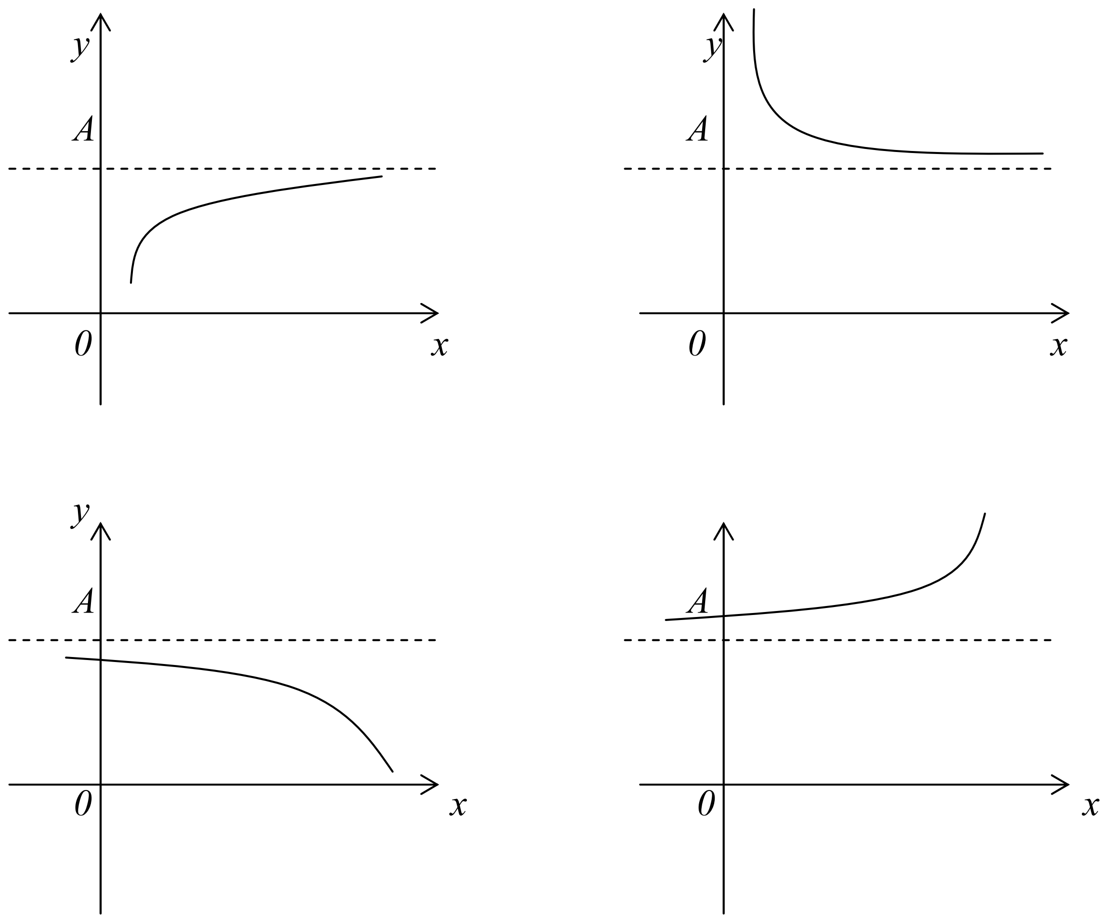
Обратно, если $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, что если $a - \delta_1 < x < a$ и соответственно $a < x < a + \delta_2$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, если δ – наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, а это означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Теорема доказана.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Число A называется ***пределом функции*** *f(x)* при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$.

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности. Записывают: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого *x>M* и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого *x<M*.

Бесконечно малые функции

Функция *f(x)* называется ***бесконечно малой*** при *x→a*, где *a* может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент х. При различных значениях *a* функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример 5. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при *x→0* и не является бесконечно малой при *x→1*, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Теорема 2. *Для того чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x=a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при x → a (*$\alpha(x)\to 0$ *при x → a).*

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми функциями

Предел функции $f(x)$ при $x \to a$, где a–число, ***равен бесконечности***, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$

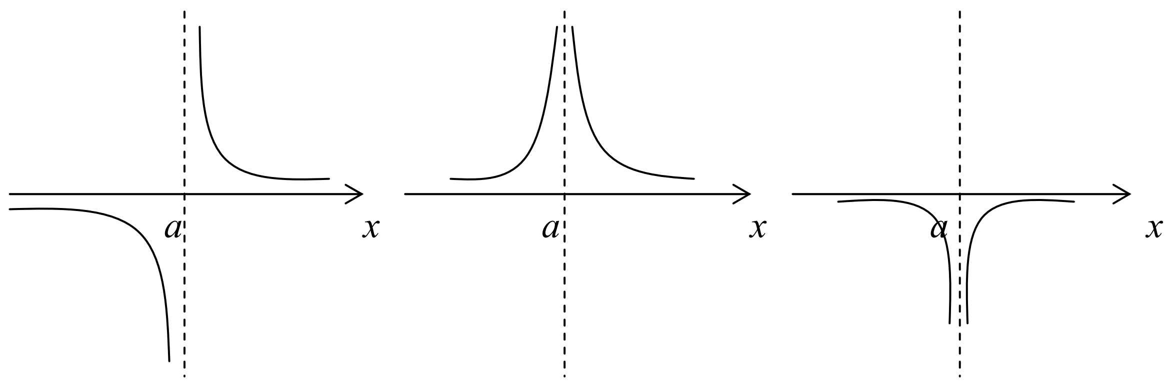
Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$,

а если заменить на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Функция называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций отражена в следующей теоремой.

Теорема 3. *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \to \infty$.

Основные теоремы о пределах

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема 5. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда $f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + \alpha(x) \pm \beta(x)$

$A \pm B = const$, $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Теорема 6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A\cdot B = const$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Теорема доказана.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 8. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ одновременно не равны нулю.

Теорема 9. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 10. (о двух полицейских) *Если* $g(x)\leq f(x)\leq u(x)$ *вблизи точки x=a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. Существование пределов $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$ означает, что найдутся числа δ_1 и δ_2, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x-a| < \delta_1$ и $|x-a| < \delta_2$ выполняются соответственно неравенства $|g(x) - A| < \varepsilon$ и $|u(x) - A| < \varepsilon$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x-a| < \min\left(\delta_1, \delta_2\right) \qquad (11.1)$$

имеем $|g(x)-A|<\varepsilon$, $|u(x)-A|<\varepsilon$, т.е.

$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$, $A-\varepsilon<u(x)<A+\varepsilon$. Т.к. $g(x)\le f(x)\le u(x)$, то с учетом последних неравенств вытекает оценка $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, т.е

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad (11.2)$$

Т.о. показано, что для всех x, удовлетворяющих условию (11.1) выполняется неравенство (11.2), что означает $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Теорема доказана.

Теорема 6 позволяет исследовать данную (возможно, сложную) функцию *f(x),* такую, что $g(x)\le f(x)\le u(x)$, с помощью (быть может, более простых) функций *g(x)* и *u(x).*

Функция *f(x)* называется ***ограниченной*** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M>0$, что $|f(x)|<M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 11. *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда $|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|$ или $|f(x)|<\varepsilon+|A|$, т.е. $|f(x)|<M$, где $M=\varepsilon+|A|$. Теорема доказана.

Определение предела функции само по себе не дает способов его отыскания. Теоремы 4–9 фактически дают правила отыскания предела функции.

Пример 6.

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^3-2x^2+x+1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}\left(3x^3-2x^2+x+1\right)}{\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-5x+3\right)}=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to2}x\right)^3-2\left(\lim\limits_{x\to2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to2}x+1}{\left(\lim\limits_{x\to2}x\right)^2-5\lim\limits_{x\to2}x+3}=$$

$$=\frac{3\cdot2^3-2\cdot2^2+2+1}{2^2-5\cdot2+3}=-6\frac{1}{3}$$

В этом примере мы искали предел *рациональной* функции вида $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, при условии, что аргумент стремится к конечному значению, не обращающему знаменатель дроби в ноль. Оказалось, как легко заметить, что для того, чтобы найти такой предел, достаточно в выражение функции подставить вместо независимой переменной ее предельное значение. Отметим, что этот простой способ отыскания предела относится ко всякой элементарной функции, если только предельная точка принадлежит области определения.

Рассмотрим случай, когда теоремы о пределах неприменимы. Например, при вычислении предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда предел знаменателя равен нулю. При этом, если предел числителя не равен нулю, то отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

является величиной бесконечно малой, а $\frac{f(x)}{g(x)}$ – бесконечно большой и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$. В этом случае принято условное обозначение: $\frac{\alpha}{0}=\infty$.

В более сложных случаях вычисление пределов сводится к раскрытию неопределенностей вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка***, чем функция $\beta(x)$. Записывают $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, $A\neq 0$, $A=const$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка***.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми***. Записывают $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Пример 7. Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{9}=0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой порядка k*** относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^{k}}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых

1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\right)$

2) Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ и $\beta(x)\sim\gamma(x)$, то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}\right)=1\cdot 1=1\right)$

3) Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}}=1\right)$

4) Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Следствие: а) если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$

б) если $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $\alpha(x)\to 0$

$\sin\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$tg\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)$	$\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$
$\ln(1+\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\alpha(x)$
$c^{\alpha(x)}-1$	$\alpha(x)\ln c$
$(1+\alpha(x))^c$	$c\alpha(x)$
$arc\sin\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$arctg\alpha(x)$	$\alpha(x)$

Пример 8. Если $\alpha(x)=x\sin x$, $\beta(x)=x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, т.е. функция $\alpha(x)=x\sin x$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x)=x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=1$, т.е. функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая порядка 2 относительно функции $\beta(x)$.

Пример 9. Если $\alpha(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $\beta(x)=x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, т.е. функция $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$.

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x\to a$, причем $\beta(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$, то $\gamma(x)$ = $\alpha(x)$ + $\beta(x)$ – бесконечно малая, эквивалентная $\alpha(x)$. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1$.

Тогда говорят, что $\alpha(x)$ – ***главная часть*** бесконечно малой функции $\gamma(x)$.

Пример 13. Функция x^2+x – бесконечно малая при $x\to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Лекция 12

В данной лекции приведем правила и алгоритмы раскрытия некоторых видов неопределенностей, которые могут возникнуть при вычислении пределов функций.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty\cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty-\infty$

Некоторые замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$,

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x_{m-1}+\ldots+b_m$ – многочлены $n-$ой и $m-$ой степеней соответственно.

Преобразуем дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m})}=x^{n-m}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$.

Перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0}{b_0}$$

Таким образом: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & при \quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m\\ \infty, & при \quad n>m\end{cases}$

Пример 1. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+2x^2-x+1}{11x^4-7x^2+x+4}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^3+2x^2-x+1}{11x^4-7x^2+x+4}=\frac{\infty}{\infty}=\infty \text{ (т.к. } n=5>m=4)$$

Пример 2. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+26x^2-13}{6x^3-x^2+x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+26x^2-13}{6x^3-x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \text{ (т.к. } n=3>m=3)$$

Пример 3. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^2-x+1}{17x^3-x^2+5x+9}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2-x+1}{17x^3-x^2+5x+9}=\frac{\infty}{\infty}=0 \text{ (т.к. } n=2>m=3\text{)}$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}=\dfrac{0}{0}$.

$P_n(a)=0$ означает, что $x=a$ является корнем многочлена $P_n(x)$. Аналогично $Q_m(a)=0$ означает, что $x=a$ является корнем многочлена $Q_m(x)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, одним из которых будет $(x-a)$. Множитель $(x-a)$, который создает стремление к нулю и числителя и знаменателя дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, часто называют «критическим множителем».

Имеем: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\tilde{P}_{n-1}(x)}{(x-a)\tilde{Q}_{m-1}(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde{P}_{n-1}(x)}{\tilde{Q}_{m-1}(x)}$.

Отметим, что сокращение дроби под знаком предела при $x\to a$ на «критический множитель» $(x-a)$ законно, т.к. $x\neq a$.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Решение. Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2–6x+8=0;$	$x^2–8x+12=0;$
$D=36–32=4;$	$D=64–48=16;$
$x_1=(6+2)/2=4;$	$x_1=(8+4)/2=6;$
$x_2=(6–2)/2=2$;	$x_2=(8–4)/2=2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\dfrac{3^2-5\cdot 3+6}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$, т.к. по теореме Безу о делимости целого многочлена $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на двучлен $(x-a)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\
\quad -5x^2+11x & \\
\quad \underline{-5x^2+5x} & \\
\qquad\quad 6x-6 & \\
\qquad\quad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Далее $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}(x-3)=-2$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\dfrac{0}{0}$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^3-2x^2-4x+8=(x^3-4x)+(-2x^2+8)=x(x^2-4)-2(x^2-4)=(x^2-4)(x-2)$

$3x^4-16x^3+24x^2-16=(x-2)^3(3x+2)$ (в результате трехкратного деления «уголком» соответствующих многочленов на «критический множитель» $(x-2)$)

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы. А именно,

$$
\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(3x+2)}=\begin{cases}
\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}=\dfrac{2+0+2}{(2+0-2)(3\cdot(2+0)+2)}=\dfrac{4}{+0}=+\infty \\
\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}=\dfrac{2-0+2}{(2-0-2)(3\cdot(2-0)+2)}=\dfrac{4}{-0}=-\infty
\end{cases}
$$

3. Неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, заданные иррациональными выражениями можно раскрыть, выделяя и сокращая «критический множитель» в результате избавления от иррациональности умножением числителя и знаменателя на соответствующее выражение. Приведем примеры, иллюстрирующие данное правило.

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}=\dfrac{0}{0}$

Чтобы превратить числитель в целый рациональный многочлен, надо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $(\sqrt{x}+1)$. Чтобы знаменатель превратить в целый множитель, необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение $\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4$, применяя далее в знаменателе формулу $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{5x^2+3}-2)(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}{(\sqrt{x}+1)(5x^2+3-8)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}{5(\sqrt{x}+1)(x^2-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}{5(\sqrt{x}+1)(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{(5x^2+3)^2}+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4)}{5(\sqrt{x}+1)(x+1)}=.$$

$$=\frac{4+4+4}{5\cdot 2\cdot 2}=\frac{3}{5}$$

4. ***Первый замечательный предел.*** Для раскрытия неопределенностей $\dfrac{0}{0}$, содержащие тригонометрические функции необходимо установить справедливость важной формулы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Теорема 1. *Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (12.1)$$

Доказательство.

Так как дуга x стремится к нулю, то можно считать, что $0<|x|<\frac{\pi}{2}$. Пусть $0<x<\frac{\pi}{2}$.

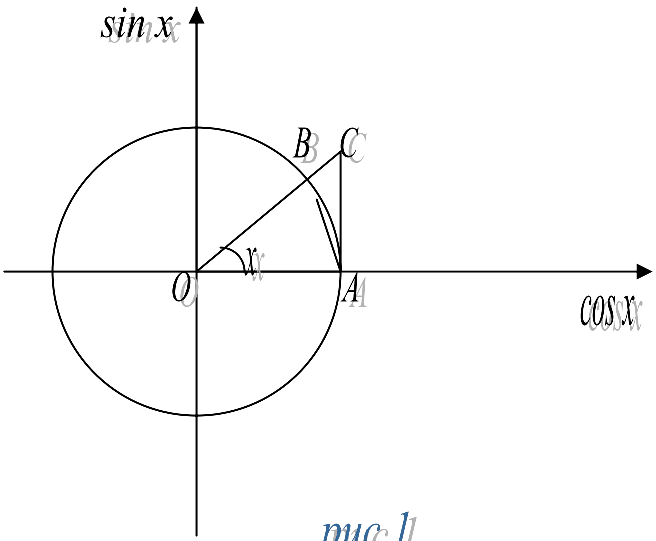


рис.1

Рассмотрим круг радиуса $R=OA=OB$ и пусть центральный угол $\angle AOB=x$ (рис.1). В точке A проведем касательную AC к кругу до пересечения в точке C с продолженным радиусом OB. Имеем очевидное неравенство:

$S_{\triangle OAB}<S_{сектора\ OAB}<S_{\triangle OAC}$

По формулам элементарной геометрии:

$$S_{\triangle OAB}=\frac{R^2}{2}\sin x$$

$$S_{сектора\ OAB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\cdot R=\frac{x}{2}\cdot R^2$$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot tgx=\frac{R^2}{2}tgx$$

Поэтому

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}\cdot x<\frac{R^2}{2}tgx \quad \text{или} \quad \sin x<x<tgx$$

Отсюда, разделив все члены последнего двойного неравенства на положительную величину $\sin x$, будем иметь:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \tag{12.2}$$

При $x\to 0$ из геометрических соображений (рис.1) $\cos x\to 1$ и, значит, $\frac{1}{\cos x}\to 1$. Из (12.2) и леммы «о двух полицейских» вытекает

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Последняя формула остается справедливой и при $x<0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

Следствие 2. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)\cos\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos\alpha(x)}=1\cdot 1=1$

Следствие 3. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin^n\alpha(x)}{\alpha^n(x)}=\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\underbrace{\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}\ldots\cdot\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}}_{n\ раз}=\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n\ раз}=1$

Следствие 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha(x)}{\frac{\alpha^2(x)}{2}}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{\alpha^2(x)}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha(x)}{2}}{\frac{\alpha^2(x)}{4}}=1$

Следствие 5. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{arcsin\,\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Действительно, $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{arcsin\,\alpha(x)}{\alpha(x)}=\frac{0}{0}=\left\{\begin{matrix}arcsin\alpha(x)=t\\ \alpha(x)=sint\\ t\to 0\ при\ \alpha(x)\to 0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{sin\,t}=1$.

Следствие 6. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Следствие 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx}{\sin nx}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx\cdot nx}{nx\cdot\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{nx}{\sin nx}\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$

Замечание. Следствия 1–3, а следствия 5,6 доказывают истинность первых трех и двух последних строчек в таблице эквивалентных функций при $\alpha(x)\to 0$ из лекции 11.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}$. Обозначим $t=5x$. При $x\to 0$ имеем: $t\to 0$. Применяя формулу (12.1), получим $5\frac{\sin t}{t}\to 5$.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{0}{0}$.

Обозначим $y=\pi-x$. Тогда при $x\to\pi,\ y\to 0$.Имеем:

$sin3x=sin3(\pi-y)=sin(3\pi-3y)=sin3y.$

$sin4x=sin4(\pi-y)=sin(4\pi-4y)=-sin4y.$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\sin 4y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{4y}{\sin 4y}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}.$$

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx\cdot mx\cdot nx}{mx\cdot nx\cdot\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{mx}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{\sin nx}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{tgx-tgx_0}{x-x_0}$.

Решение.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\frac{0}{0}=\left\{\begin{array}{l}y=\pi/2-x\\ x=\pi/2-y\\ y\to 0\ \text{при}\ x\to 0\\ \pi-2x=\pi-\pi+2y\end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

5. ***Второй замечательный предел***

В лекции 10 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Покажем, что имеет место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Предположим: $n\le x\le n+1$

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}\ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\cdot 1=e;$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{e}{1}=e.$ Следовательно, по лемме «о двух полицейских» имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (12.3)$$

Следствие 1. $\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$

Следствие 2. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

Действительно,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\left\{\begin{array}{l}\alpha(x)=\dfrac{1}{\beta(x)}\\ \beta(x)\to\infty \textit{ при } \alpha(x)\to 0\end{array}\right\}=\lim_{\beta(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)}=e$$

Следствие 3. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1.$

Действительно,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\lim_{\alpha(x)\to 0}\ln(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\ln\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\ln e=1,$$

что доказывает истинность четвертой строчки в таблице эквивалентных функций.

Часто если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=1^{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)^{x+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l}y=x-1\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{y}{4}}\right)^{\frac{y}{4}\cdot\frac{4}{y}\cdot(y+4)}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}e^{\frac{4}{y}\cdot(y+4)}=e^{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{4}{y}\cdot(y+4)}=e^{4}$$

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{4x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{4x}=2^{\infty}=\begin{cases}2^{+\infty}=+\infty \ \ \textit{при} \ \ x\to+\infty\\ 2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=+0 \ \ \textit{при} \ \ x\to-\infty\end{cases}$

Пример 18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}x\big(\ln(4x-2)-\ln(4x+1)\big)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(4x-2)-\ln(4x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{4x-2}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{4x-2}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{4x-2}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-2}{4x+1}-1\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{4x+1}\cdot\frac{4x+1}{-3}\cdot\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+1}{-3x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+1}{-3x}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{-3x}}=\ln e^{-\frac{4}{3}}=-\frac{4}{3}.$$

Лекция 13

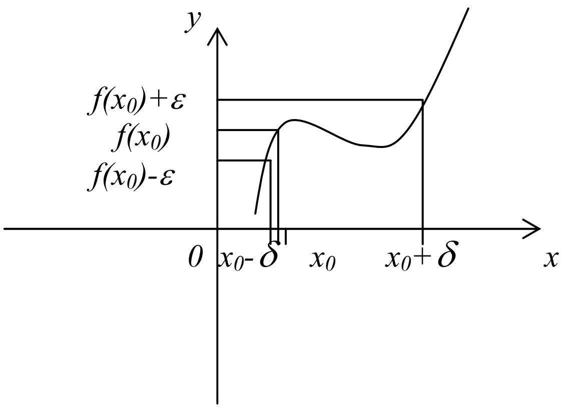
Непрерывность функции в точке

Функция *f(x)*, определенная в окрестности некоторой точки x_0, а также в самой точке x_0, называется ***непрерывной в точке*** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (13.1)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$ (13.2)

Символ предела и символ непрерывной функции можно переставлять между собой. Пример непрерывной функции:



Так как непрерывность функции в точке – локальное понятие, определяемое через предел, то (13.1) можно записать на «языке $\varepsilon - \delta$». Функция *f(x)* называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число $\delta > 0$, что для любых *x*, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

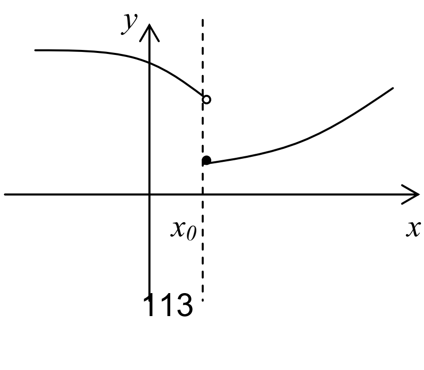
Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента и обозначается Δx. Приращением Δy функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 называется разность $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция *f(x)* называется ***непрерывной*** в точке $x = x_0$, если приращение функции Δy в точке x_0 является бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$, т.е.

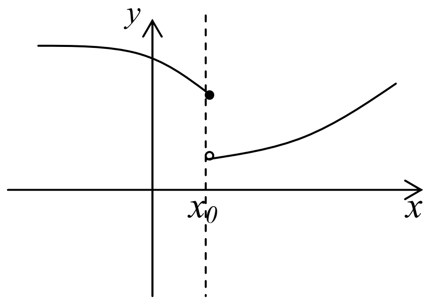
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (13.3)$$

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. лекцию 11) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция называется ***непрерывной справа в точке*** x_0.



Если односторонний предел (см. лекцию 11) $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$, то функция называется ***непрерывной слева в точке*** x_0.



Если функция непрерывна в точке x_0, то в этой точке она является непрерывной слева и непрерывной справа.

Непрерывность некоторых элементарных функций

1) Функция $f(x) = C$, $C = const$ – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ непрерывны на своей области определения.

4) Показательная функция $y=a^x$ непрерывна при любом значении x.

Докажем свойство 3 для функции $y = \sin x$.

Запишем приращение функции $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$, или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x\to 0$ $\left|\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, а т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{\Delta x}{2}=0$, то она является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно, это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция $y=\sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x=x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Свойства непрерывных функций

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0.

Пример 1. Функция $y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна для всех значений аргумента x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т.е. кроме значений $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично, функция $y = ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна для всех значений аргумента x, кроме тех, для которых $\sin x = 0$, т.е. кроме значений $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.
Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u=f(x)$, $v=g(x)$ – непрерывные функции в точке $x=x_0$, то функция $v=g(f(x))$ является также непрерывной функцией в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

4) Если функция $y = f(x)$ непрерывна и существует однозначная обратная функция $x = \varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

В силу этого свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $y = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 0)$, обратные тригонометрические функции $y = arctgx$, $y = arcctgx$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ являются непрерывными при всяком значении аргумента *x, при котором эти функции определены.*

Точки разрыва и их классификация

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется ***разрывной функцией в точке x_0***. При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0; в самой же точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Пример 2. Функция Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

* Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г

не является непрерывной в любой точке x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода***, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

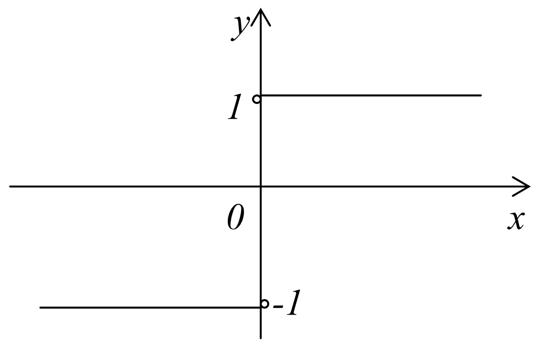
$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x=x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке x_0 разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок, величина которого равна $f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то точку разрыва x_0 называют точкой ***устранимого*** разрыва. Последнее оправдано тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Пример 3. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} 1, & при \quad x>0 \\ -1, & при \quad x<0 \end{cases}$



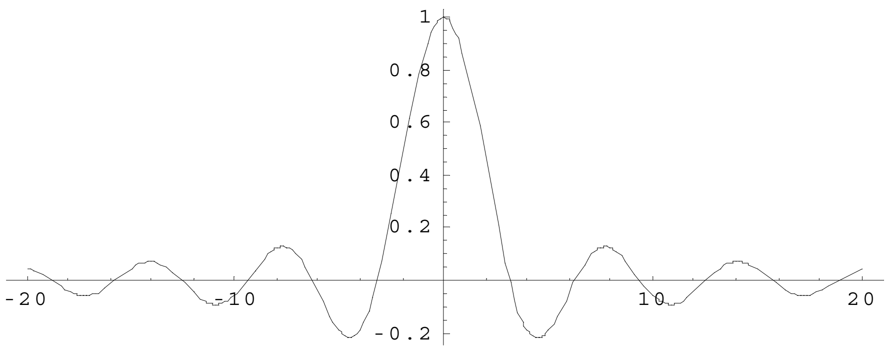
Эта функция также обозначается $y=sign(x)$ – знак x. В точке x=0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва x=0 является точкой разрыва 1-го рода. Если доопределить функцию в точке $x=0$, положив $f(0)=1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0)=-1$, то функция будет непрерывной слева, если положить $f(x)$ равное какому-либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях, тем не менее, будет иметь в точке $x=0$ разрыв 1-го рода. В этом примере точка разрыва 1-го рода не является устранимой.

Пример 4. Функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, т.е. в точке $x=0$ функция имеет точку разрыва 1-

го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. возможно доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$:

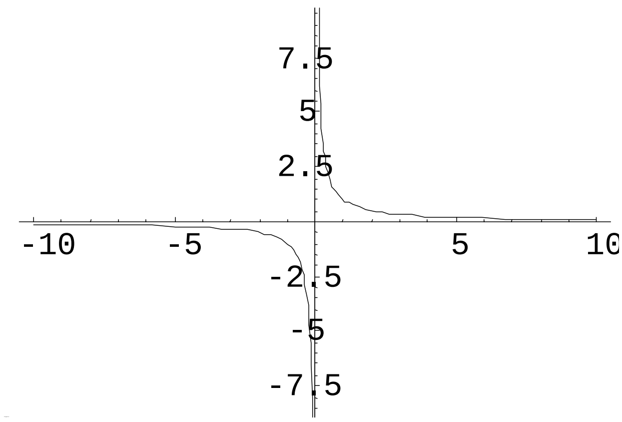
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x\neq 0\\ 1, & при \quad x=0\end{cases}$$, которая является непрерывной при любом x.

График этой функции:



Точка x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода***, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример 5. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0=0$ точку разрыва 2-го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$.



Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале (отрезке)***, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом на концах отрезка или интервала необходима только односторонняя непрерывность.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

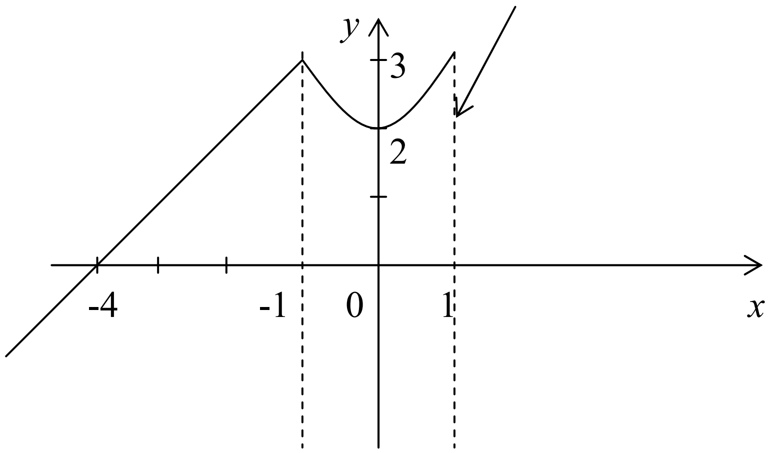
Решение. Это составная функция, областью определения которой является вся числовая прямая, которая точками «стыка» $x_1=-1$ и $x_2=1$ разбивается на интервалы, на которых функция меняет свое аналитическое представление. На каждом интервале $(-\infty,-1)$, (-1,1), $(1,+\infty)$ функция *f(x)* определяется элементарной степенной функцией, которая является непрерывной для любого x. Поэтому на каждом интервале $(-\infty,-1)$, (-1,1), $(1,+\infty)$ функция *f(x)* является непрерывной. Необходимо проверить непрерывность функции *f(x)* в точках «стыка» $x_1=-1$ и $x_2=1$:

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=3$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=3$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$

$f(-1)=(-1)^2+2=3$ $f(1)=1^2+2=3$

Таким образом, в точке *x=-1* функция непрерывна, в точке *x=1* имеет разрыв 1-го рода. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=3=f(1)$, то функция *f(x)* в точке *x=1* непрерывна слева.



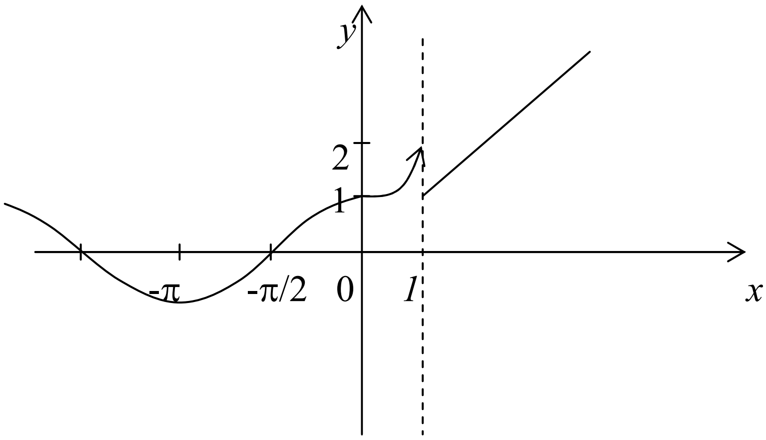
Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Решение. Это составная функция, областью определения которой является вся числовая прямая, которая точками «стыка» $x_1=0$ и $x_2=1$ разбивается на интервалы, на которых функция меняет свое аналитическое представление. На каждом интервале $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$ функция *f(x)* определяется элементарными тригонометрической и степенными функциями, которые являются непрерывными для любого x. Поэтому на каждом интервале $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$ функция *f(x)* является непрерывной. Необходимо проверить непрерывность функции *f(x)* в точках «стыка» $x_1=0$ и $x_2=1$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$
$$f(0)=\cos 0=1 \qquad f(1)=1$$

Таким образом, т.к. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$, то в точке $x_1=0$ функция непрерывна. В точке $x_2=1$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$, поэтому это точка разрыва 1-го рода. В точке $x_2=1$ функция *f(x)* непрерывна справа.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойство 1: (***Первая теорема Вейерштрасса****[*]). Функция, непрерывная на **отрезке**, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M\le f(x)\le M$.

Замечание: Свойство 1 не справедливо для промежутков другого вида, чем отрезок. В этом легко убедиться, построив соответствующие примеры.

Пример 8. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке интервала $(0,1)$ и вместе с тем не ограничена на нем; функция $y=x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограниченна на ней.

Свойство 2: Функция, непрерывная на **отрезке** [a, b], имеет на нем как наибольшее так и наименьшее значение.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$, причем

[*] Карл Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик

$m \le f(x) \le M$

Замечание 1: Отметим, что наибольшее и наименьшее значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x)=\sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется ***колебанием*** функции на отрезке.

Замечание 2: Если функция f непрерывна не на отрезке, а на промежутке другого типа и даже, кроме того, ограничена на нем, она вообше говоря, не имеет наибольшего и наименьшего значения.

Свойство 3: (теорема Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b] такая, что $f(a)=A,\ f(b)=B$, то для любого значения C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi)=C$.

Иначе говоря, непрерывная на отрезке функция, принимающая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (теорема Больцано–Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, в которой функция обращается в нуль.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \ne \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0)=0$.

Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

верно неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое δ, не зависящее от x, а при “обычной” непрерывности δ зависит от ε и x.

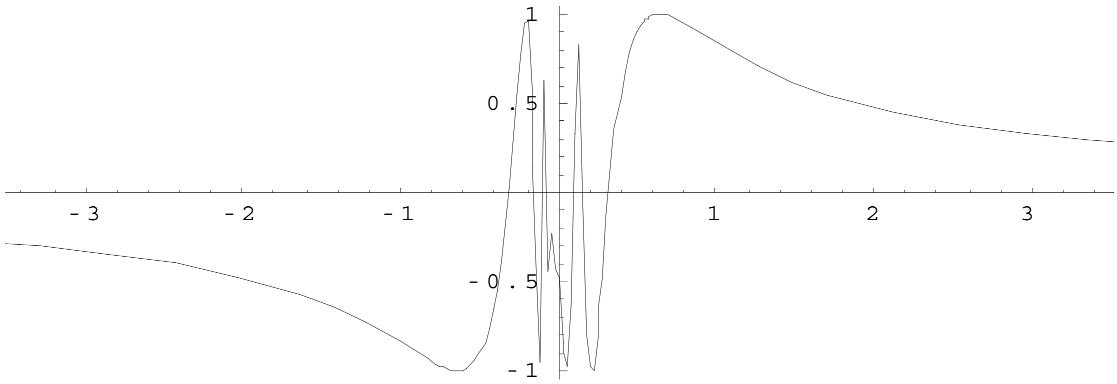
Свойство 6: (Теорема Кантора*). Функция, непрерывная на **<u>отрезке</u>**, равномерно непрерывна на нем.

Замечание: Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.

---

* Кантор Георг (1845-1918) – немецкий математик

Пример 9. $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a,b), где $c = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $d = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, то и обратная ей функция $x=g(y)$ так же однозначна, монотонна и непрерывна на интервале с концами c и d.

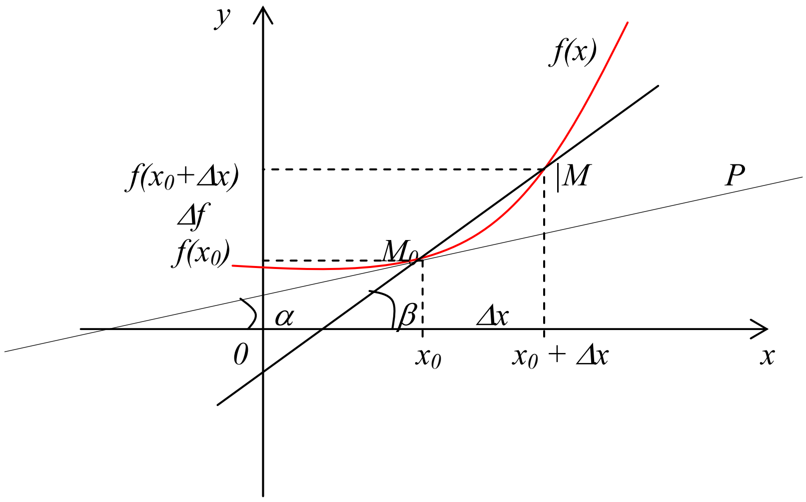
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Лекция 14

Производная функции в точке ее геометрический и физический смысл

Производной функции *y=f(x)* в точке $x=x_0$ называется конечный предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (14.1)$$



Пусть *y=f(x)* определена на некотором промежутке (*a,b*). Пусть $M_0(x_0,y_0)\in(a,b)$ и $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in(a,b)-$ точки, лежащие на линии, описываемой уравнением $y=f(x)$. Тогда $tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}-$ тангенс угла наклона секущей M_0M к графику функции *y=f(x)*. Пусть теперь $M\to M_0$, тогда $\Delta x\to 0$ и секущая M_0M стремится к своему предельному положению – *касательной* M_0P в точке M_0, $\beta\to\alpha$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=tg\alpha\,, \qquad (14.2)$$

где $\beta-$ угол наклона секущей M_0M графика функции *f(x)* в точке $(x_0, f(x_0))$,
α – угол наклона касательной M_0P к графику функции *f(x)* в точке $(x_0, f(x_0))$.

Таким образом, геометрический смысл производной функции в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен ее производной в точке касания.

Уравнение касательной к кривой:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (14.3)$$

Уравнение нормали к кривой:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (14.4)$$

Выясним физический (механический) смысл производной функции $s=f(t)$ в момент времени t_0, где $f(t)$– закон движения материальной точки по прямой. Тогда разность $\Delta s = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ есть путь, пройденный за интервал времени Δt, а отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{ср.}$–средняя скорость за время Δt. Предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0) = v_{мгн.}$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t_0.

Односторонние производные функции в точке

Правой (левой) производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (14.5)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (14.6)$$

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых, функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Пример 1. $f(x) = /x/$ имеет в точке $x=0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Операцию нахождения производной функции называют *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой.*

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. (*Необходимое условие существования производной*) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно: функция *f(x),* непрерывная в точке, может не быть дифференцируемой в этой точке (см. пример 1).

Таким образом, требование дифференцируемости функции является более сильным, чем требование непрерывности, поскольку из первого следует второе.

Основные правила дифференцирования

Пусть *u(x) и v(x)* – функции, дифференцируемые в точке *x*, тогда справедливы следующие формулы:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (14.7)

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ (14.8)

$$3)\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0 \qquad (14.9)$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах. Докажем, например, формулу (14.8).

Составим приращение функции $y = uv$ при условии, что аргумент получил приращение Δx:

$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$.

Разделим обе части последнего равенства на Δx и устремив $\Delta x \to 0$, перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta u,$$

Рассмотрим последнее слагаемое $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta u = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = v'\cdot 0$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, т.к. по условию функция *u(x)*–дифференцируемая, а значит, по теореме 1 и непрерывная)

откуда получаем: $y' = u'v + uv' + v'\cdot 0$ или $(uv)' = u'v + uv'$.

Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$;	9) $(\sin x)' = \cos x$
2) $x' = 1$;	10) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5) $(e^x)' = e^x$	13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6) $(a^x)' = a^x\ln a$	14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Все эти формулы могут быть доказаны, используя определение производной (14.1) и основные правила дифференцирования (14.7)–(14.9). Докажем, например, формулу 6):

Имеем: $y = a^x$ и $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$, откуда $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$.

Устремляя $\Delta x\to 0$ и переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\overset{a^{\Delta x}-1\sim\Delta x\ln a}{=}a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$$

Докажем формулу 9):

Пусть $y=\sin x$. Придавая x приращение Δx, найдем $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$. Отсюда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y=x\cos x\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение. Сначала преобразуем данную функцию: $y=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x2\cos 2x+\frac{1}{2}2\cos x(-\sin x)=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x-\sin x\cos x=x\cos 2x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$.

Решение.

$$y'=\frac{(2xe^{x^2}+x^2 2xe^{x^2})(x^2+1)-(2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3e^{x^2}+2x^5e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}-2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример 4. Вычислить производную y=ln $\sqrt[3]{\frac{(x^2+4)^5(3x-1)^7}{(6x^3+1)^2e^{tg\,5x}}}$.

Решение. Преобразуем функцию, используя свойства логарифмов:

$$y=\frac{5}{3}\ln(x2+4)+\frac{7}{3}\ln(3x-1)-\frac{2}{3}\ln(6x3+1)-\frac{1}{3}tg\ 5x.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$y'=\frac{5}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+4}+\frac{7}{3x-1}-\frac{12x^2}{6x^3+1}-\frac{5}{3\cos^2 5x}.$$

Производная композиции функций

Теорема 2. *Пусть y=f(u); u=g(x), причем область значений функции u=g(x) входит в область определения функции y=f(u), т.е. y является функцией от x: y=f(g(x)). Тогда при условии, что существуют производные* $y'_u = f'(u)$ *и* $u'_x = g'(x)$ *существует и производная* y'_x*:*

$$y'_x = f'_u(u)\cdot u'_x(x) \qquad (14.10)$$

Доказательство. Придавая аргументу x приращение Δx, *u* получит приращение Δu, что в свою очередь вызывает приращение Δy.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$. Так как по условию теоремы существует производная $u'_x = g'(x)$, то по теореме 1, *u=g(x)* – непрерывная функция, поэтому $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $y'_x = y'_u(u)\cdot u'_x(x)$. Теорема доказана.

Пример 5. Найти производную функции $y=\ln tg\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$

Решение.

$$y'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-\sin x + x\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример 6. Найти производную функции $y=arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

Решение.

$$y'=\frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2}=\frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2}=\frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2}=$$

$$=\frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2}=\frac{8x^3}{1+x^8}$$

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & при \quad x>0\\ \ln(-x), & при \quad x<0\end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, т.к. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$; $\quad(\ln(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\left(\ln|f(x)|\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется ***логарифмической производной*** функции *f(x)*.

Способ ***логарифмического дифференцирования*** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле:

$$f'(x)=(\ln|f(x)|)'\cdot f(x) \tag{14.11}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким. Например:

1. $y=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$ при $n>2$
2. $y=\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_m(x)}$, $\quad g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_m(x)\neq 0$ при $n>1,\ m>1$
3. $y=f(x)^{g(x)}$

Пример 7. Найти производную функции $y=x^2\cdot e^{x^2}\cdot\ln x\cdot\cos^2 x$

Решение. Прологарифмируем обе части равенства:

$\ln y=\ln(x^2\cdot e^{x^2}\cdot\ln x\cdot\cos^2 x)$

По свойствам логарифма:

$\ln y=2\ln|x|+x^2\ln e\ +\ln\ln x+2\ln\cos x$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+2x+\frac{1}{x\ln x}+\frac{2(-\sin x)}{\cos x}$$

Окончательно имеем:

$$y'=y\left(\frac{2}{x}+2x+\frac{1}{x\ln x}+\frac{2(-\sin x)}{\cos x}\right) \text{ или}$$

$$y'=x^2\cdot e^{x^2}\cdot\ln x\cdot\cos^2 x\left(\frac{2}{x}+2x+\frac{1}{x\ln x}+\frac{2(-\sin x)}{\cos x}\right)$$

Производная показательно-степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно-степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$lny = vlnu$

Дифференцируя обе части последнего равенства, имеем:

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u \qquad (14.12)$$

При нахождении производной показательно-степенной функции можно каждый раз применять технику логарифмического дифференцирования или использовать формулу (14.12), которая получена с использованием этой техники.

Пример 8. Найти производную функции $f(x) = (x^2+3x)^{x\cos x}$.

Решение. По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $\qquad v = x\cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $\quad v' = \cos x - x\sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x\cdot(x^2+3x)^{x\cos x-1}\cdot(2x+3) + (x^2+3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2+3x)$$

Производная обратной функции

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$1 = g'(y)y'$

т.к. $g'(y) \neq 0$, то получаем

$$y' = \frac{1}{g'(y)} \qquad (14.13)$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример 9. Найти формулу для производной функции $arctgx$.

Решение. Функция $arctgx$ является функцией, обратной функции tgx, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$y = tgx$; $\qquad x = arctgy$;

Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{(arctgy)'}; \qquad (arctgy)' = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2$; то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy)' = \frac{1}{1+y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных *arcctgx*, *arcsinx, arccosx* и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Предельный анализ в экономике. Эластичность функции

В экономических исследованиях для обозначения производных часто пользуются специфической терминологией. Например, если *f(x)* есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции от затрат фактора *x*, то *f '(x)* называют ***предельным продуктом***; если *g(x)* есть функция издержек, т. е. функция *g(x)* выражает зависимость общих затрат от объема продукции *x*, то *g'(x)* называют ***предельными издержками***.

Предельный анализ в экономике **–** совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Большей частью плановые расчеты, основывающиеся на обычных статистических данных, ведутся в форме суммарных показателей. При этом анализ заключается главным образом в вычислении средних величин. Однако в некоторых случаях оказывается необходимым более детальное исследование с учетом предельных значений. Например, при выяснении издержек производства зерна в районе на перспективу принимают во внимание, что издержки могут быть различными в зависимости, при прочих равных условиях, от предполагаемых объемов сбора зерна, так как на вновь вовлекаемых в обработку худших землях издержки производства будут выше, чем по району в среднем.

Если зависимость между двумя показателями *v* и *x* задана аналитически: *v=f(x)*, то *средняя величина* представляет собой отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, а *предельная* – производную $\dfrac{dv}{dx}$.

Нахождение производительности труда. Пусть известна функция *u=u(t)*, выражающая количество произведенной продукции *u* за время работы *t*. Вычислим количество произведенной продукции за время $\Delta t=t_1-t_0$: $\Delta u=u(t_1)-u(t_0)=u(t_0+\Delta t)-u(t_0)$. *Средней производительностью труда* называется отношение количества произведенной продукции к затраченному времени, т.е. $z_{ср.} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Производительностью труда рабочего $z(t_0)$ в момент t_0 называется предел, к которому стремится $z_{ср}$. при $\Delta t \to 0$: $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Вычисление производительности труда, таким образом, сводится к вычислению производной: $z(t_0) = u'(t_0)$.

Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать $K=K(x)$. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x+\Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta K=K(x+\Delta x)-K(x)$.

Среднее приращение издержек производства есть $\dfrac{\Delta K}{\Delta x}$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta K}{\Delta x}=K'(x)$ называется *предельными издержками производства*.

Если обозначить через $u(x)$ выручку от продажи x единиц товара, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$ и называется *предельной выручкой*.

С помощью производной можно вычислить приращение функции, соответствующее приращению аргумента. Во многих задачах удобнее вычислять процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующий проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют *относительной производной*). Итак, пусть дана функция $y=f(x)$, для которой существует производная $y'=f'(x)$. *Эластичностью функции $y=f(x)$* относительно переменной x называют предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y\cdot 100\%}{\Delta x/x\cdot 100\%}=\frac{x}{y}\,f'(x).$$

Его обозначают
$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (14.14)$$

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%. Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть *относительно эластичным* или просто эластичным. Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос *относительно неэластичен* или просто неэластичен. Термин *совершенно неэластичный* спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин или спрос наркоманов на героин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей, тогда мы говорим, что спрос является *совершенно эластичным.*

Пример 10. Найти эластичность спроса на товар, определяемого формулой $y(x) = 100 - 3x$, при цене на товар $x_0 = 20$ ден.ед.

Решение. Найдем производную y' функции $y(x) = 100 - 3x$: $y'(x) = -3$.

По формуле (14.14) имеем: $E_x(y_0) = \dfrac{x_0}{y_0} \cdot y'(x_0) = \dfrac{20}{100\text{-}3 \cdot 20}(-3) = -1{,}5$.

Таким образом, при повышении (понижении) цены товара на 1% спрос на него понизится (повысится) на 1,5%.

Лекция 15

Дифференциал функции*

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Тогда по теореме 2 из лекции 11 можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$, при $\Delta x\to 0$.

Следовательно, $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha(x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем сомножители, и в частности, чем Δx, т.е. можно записать $\alpha(x)\Delta x=\circ(\Delta x)$.

Таким образом, приращение функции имеет вид:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad (15.1)$$

В формуле (15.1) элемент $f'(x_0)\Delta x$ является главной линейной частью приращения Δy относительно приращения Δx.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения функции.

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $dy\big|_{x=x_0}$ или $df(x_0)$.

Из определения и формулы (15.1) следует, что

$$dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x. \qquad (15.2)$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = x$ в любой точке из $\mathbb{R}$.

Решение. По формуле (15.2) получаем:

$$dy\big|_{x} = dx = \Delta x.$$

Таким образом, для независимой переменной x справедливо соотношение:

$$dx = \Delta x \qquad (15.3)$$

Комбинируя (15.2) и (15.3), имеем

$$dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\, dx \qquad (15.4)$$

Из (15.4) вытекает:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (15.5)$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Подставляя (15.4) в (15.1), получаем:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = dy\big|_{x=x_0} + o(\Delta x) \qquad (15.6)$$

Если в формуле (15.6) пренебречь $o(\Delta x)$, то получим приближенное равенство:

---

* от латинского *differentia*–разность

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy\big|_{x=x_0} \qquad (15.7)$$

Смысл формулы (15.7) в том, что при малых Δx приращение функции с большой степенью точности можно заменить ее дифференциалом.

Тогда абсолютная погрешность такой замены

$$|\Delta y - dy| = |o(\Delta x)| \qquad (15.8)$$

Подставляя в (15.7) формулу (15.4), получаем формулу, используемую в приближенных вычислениях:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy\big|_{x=x_0} \text{ или}$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (15.9)$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{16,06}$

Решение. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16, \Delta x = 0,06$, тогда по формуле (15.9):

$$\sqrt{16 + 0,06} \approx \sqrt{16} + \left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x_0=16} \cdot 0,06 = 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,06 = 4 + \frac{0,06}{8} = 4,0075$$

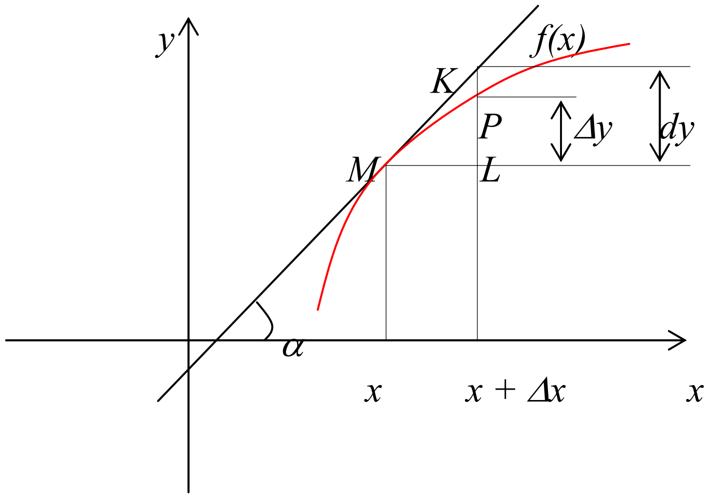
Пример 3. Вычислить $tg46^{\circ}$

Решение. Пусть $f(x) = tgx$, $x_0 = 45^{\circ}, \Delta x = 1^{\circ}$. Для того чтобы применить формулу (15.9) необходимо все углы выразить в радианах: $x_0 = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}, \Delta x = 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} = \frac{3,14}{180} \approx 0,0174$

По формуле (15.9) получаем:

$$tg(45^{\circ} + 1^{\circ}) = tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}) \approx tg\frac{\pi}{4} + (tgx)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1 + \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} \cdot 0,0174 = 1 + 2 \cdot 0,0174 = 1,0348$$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Поэтому замена Δy на dy геометрически означает замену участка кривой участком ее касательной.

Свойства дифференциала

Если $u=f(x)$ и $v=g(x)$ есть функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал композиции функции. Инвариантная форма записи дифференциала

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. y – композиция функций: $y = f(g(t))$

Тогда $dy=y_t'(t)dt$, но по формуле (14.10) из лекции 14 получаем

$$dy = f_g'(g)\cdot g_t'(t)dt = f_g'(g)dg \qquad (15.10)$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется ***инвариантной формой записи дифференциала***.

Замечание. Если x является независимой переменной, то $dx=\Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$. Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим ***вторую производную*** функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y''=(y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные порядка n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \qquad (15.11)$$

При этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция $(y)^{(0)} = y$

Общие правила нахождения высших производных

Если функции $u=f(x)$ и $v=g(x)$ дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$;
2) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;
3) $(u\cdot v)^{(n)}=vu^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots$

$$\ldots+uv^{(n)}=C_n^0vu^{(n)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+C_n^nuv^{(n)}, \quad (15.12)$$

где C_n^k–число сочетаний из n элементов по k, $k=0,1,2,\ldots,n$.

Это выражение называется ***формулой Лейбница****.

Формулу (15.12) **символически** можно записать в виде, удобном для запоминания:

$$(uv)^{(n)}=(u+v)^{\{n\}}$$

Индекс $\{n\}$ означает, что выражение $(u+v)^{\{n\}}$ записывается подобно биному Ньютона, т.е. в виде суммы с теми же коэффициентами, что и у бинома Ньютона, только вместо степеней u и v берутся их производные соответствующего порядка.

Эти формулы доказываются методом математической индукции.

Дифференциал n-го порядка может быть найден по формуле

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n \quad (15.13)$$

Замечание. Формула (15.13) справедлива при $n>1$ (в отличие от случая $n=1$) только тогда, когда x является *независимым переменным*.

---

* Г.Лейбниц (1646-1716)–немецкий философ и математик.

Лекция 16

Теоремы о среднем

***Теорема Ролля*[*].** *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, f′(ε) = 0.*

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция *f(x)* на отрезке *[a, b]* принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения *M* и *m* соответственно. Возможны два различных случая $M=m$ и $M\neq m$.

Пусть $M=m$. Тогда на отрезке *[a, b]* функция *f(x)* постоянна и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за *ε* можно принять любую точку интервала.

Пусть $M\neq m$. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений *M* или *m* функция принимает внутри отрезка *[a, b]*. Пусть этим значением является *M*. Обозначим *ε*, $a<\varepsilon<b$ точку, в которой $f(\varepsilon)=M$. Так как *M* – наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon+\Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство: $\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon+\Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0$.

При этом $\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{если} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}\leq 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}\geq 0$, то можно сделать вывод:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}=0, \quad т.е. \quad f'(\varepsilon)=0.$ Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале *(a, b)* существует точка *ε* такая, что в соответствующей точке кривой *y = f(x)* касательная параллельна оси Ох. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Следствие .Если функция *f(x)* на отрезке *[a, b]* удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка *ε*, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

---

[*] Ролль (1652-1719) – французский математик

***Теорема Лагранжа*[*]*.** *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\varepsilon),\ a<\varepsilon<b. \qquad (16.1)$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - y_{сек\ AB}$

Уравнение секущей AB можно записать в виде:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

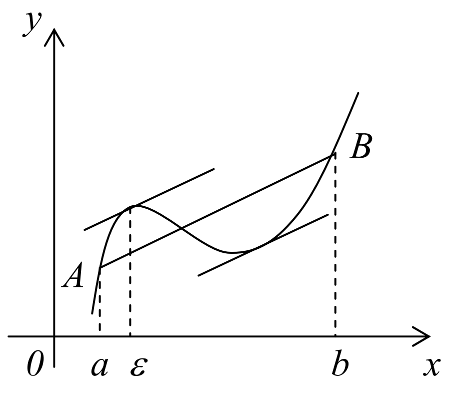
$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к. $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, то $F'(\varepsilon)=f'(\varepsilon)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, следовательно

$f'(\varepsilon)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB.



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

[*] Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик

Выражение $f(a)-f(b)=f'(\varepsilon)(b-a)$ называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:
$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$,
где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

***Теорема Коши*[*].** *Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и g′(x) ≠ 0 на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}. \tag{16.2}$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функции в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это - очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

которая на интервале *[a, b]* удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при *x=a* и *x=b* *F(a)=F(b)=0*. Тогда по теореме Ролля существует такая точка *ε, a < ε < b*, такая, что *F′(ε) = 0*. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\varepsilon)$$

С учетом того, что $g'(\varepsilon) \neq 0$, имеем $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Теорема доказана.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при *g(x)=x*) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

[*] Коши (1789-1857) – французский математик

Раскрытие неопределенностей

Теорема 1 (правило Лопиталя*). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в окрестности точки a (a – число или ∞), g(x) и g′(x) отличны от нуля в указанной окрестности и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Тогда если существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует также равный ему предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \qquad (16.3)$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между *a* и *x*. Учитывая, что *f(a) = g(a) = 0*:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x\to a$ отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками *a* и *x*, то при $x\to a$ получим $\varepsilon\to a$, а следовательно и отношение $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Теорема доказана.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x}; \qquad g'(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

---

* Лопиталь (1661-1704) – французский математик

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$; $\quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2}$;

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{(\frac{1}{x^2}+1)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right) = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой-либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2$; $\quad g'(x) = 1 - \cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$ – опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = e^x - e^{-x}$; $\quad g''(x) = \sin x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ – применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x}$; $\quad g'''(x) = \cos x$;

Окончательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$.

Теорема 2 (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в окрестности точки a (a – число или ∞), g(x) и g′(x) отличны от нуля в указанной окрестности и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *($+\infty$ или $-\infty$). Тогда если существует предел (конечный или бесконечный)* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *то существует также равный ему предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \qquad (16.4)$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x)=1+e^x; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x)}{1+e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x);\ g''(x)=e^x;\ \lim_{x\to+\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}; \qquad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя

$f'(x)=2x;\qquad g'(x)=2e^{2x};\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}=\dfrac{\infty}{\infty};$ – получили неопределенность.

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x)=2; \qquad g'(x)=4e^{2x}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{\infty}=0;$$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, *f(x)>0* вблизи точки *a* при *x→a*. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции *lny=g(x)lnf(x).*

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Здесь y = x^x . Прологарифмируем обе части равенства *lny=xlnx*.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0\cdot\infty=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\infty}{\infty}\left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0.$

Следовательно $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln y=\ln\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}y=0$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^x=1$.

Исследование функций и построение графиков

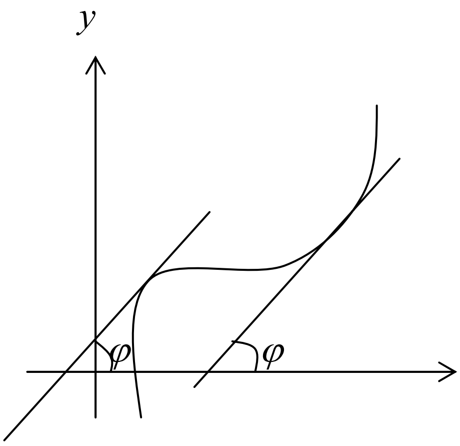
Лекция 17

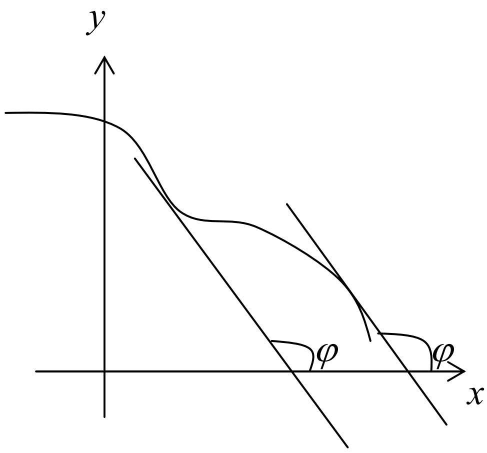
Возрастание и убывание функций

Теорема 1. *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a<x<b$, то эта функция строго возрастает (убывает) на отрезке [a, b].*

Доказательство. Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1<x_2$. Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2)-f(x_1)=f'(\varepsilon)(x_2-x_1)$, $x_1<\varepsilon<x_2$. По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает. Теорема доказана.

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать графически:





Точки экстремума

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***максимум (минимум)***, если для всех точек $x\neq x_0$ из этой окрестности выполнено неравенство: $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$).

Максимум или минимум функции называется ***экстремумом*** функции, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются ***точками экстремума*** функции (точки максимума и точки минимума).

Из определения следует, что экстремум функции имеет локальный характер–это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с ее *близлежащими* значениями.

Теорема 2. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_0$ и точка x_0 является точкой экстремума, то в этой точке производная функции равна нулю.*

Доказательство. Предположим не ограничивая общности, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум. Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$

Тогда $$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0 \qquad \text{при} \quad \Delta x<0$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0 \qquad при \quad \Delta x>0$$

По определению: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

Т.е. если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_0)\geq 0$, а если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_0)\leq 0$. Возможно это только в том случае, если при $\Delta x\to 0$ $f'(x_0)=0$.

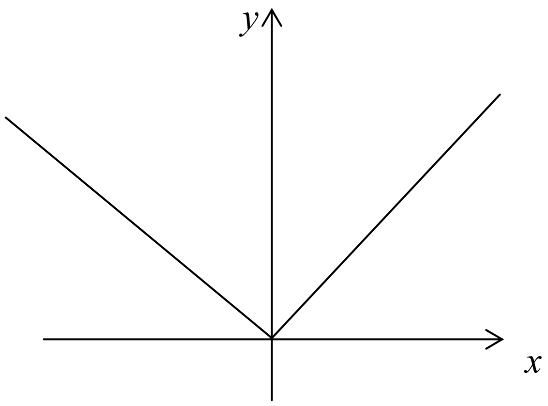
Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум теорема доказывается аналогично. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация. Геометрически условие $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума x_0 дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к графику параллельна оси Ox.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

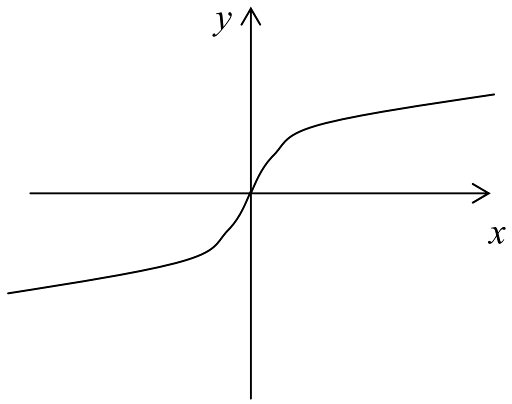
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример 1. $f(x)=|x|$



В точке $x = 0$ функция $f(x)=|x|$ имеет минимум, но не имеет производной.

Пример 2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Следствие. Непрерывная функция $f(x)$ *может* иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Критическими точками функции называются точки *из области определения функции*, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема 3. (Достаточные условия существования экстремума) *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0, и дифференцируема во всех точках этой окрестности (кроме, может быть, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+", то функция имеет в этой точке минимум. ,Если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.*

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_0 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_0 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(\varepsilon)(x - x_0)$, где ε – промежуточная точка между x и x_0.

Тогда: 1) Если $x < x_0$, то $\varepsilon < x_0$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_0)<0$, следовательно $f(x) - f(x_0)<0$ или $f(x) < f(x_0)$.

2) Если $x > x_0$, то $\varepsilon > x_0$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_0)<0$, следовательно $f(x) - f(x_0)<0$ или $f(x) < f(x_0)$.

Т. к. и в первом и во втором случаях $f(x)<f(x_0)$, то можно сказать, что $f(x)<f(x_0)$ в любых точках вблизи x_0, т.е. x_0 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично. Теорема доказана.

Из приведенных теорем 1-3 вытекает следующее ***правило исследования функции на экстремум и нахождения промежутков возрастания и убывания функции***:

1. Находим область определения функции $y = f(x)$.
2. находим первую производную функции $y = f(x)$.
3. приравниваем производную к нулю $f'(x) = 0$ и находим все действительные корни полученного уравнения, а также точки из области определения, в которых производная не существует. Т.о. находим все критические точки функции.
4. на числовой прямой в области определения строим критические точки. Они разобьют область определения на ряд интервалов, в каждом из которых производная сохраняет знак.
5. определяем знак производной в каждом из полученных интервалов (для этого достаточно определить знак производной в какой-нибудь одной точке каждого из этих интервалов). Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0$, то это – интервал возрастания, если $f'(x) < 0$, то это–интервал убывания функции.
6. устанавливаем, как меняет знак производная при переходе слева направо через каждую из критических точек. Если при переходе через критическую точку x_i слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_i$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+", то функция имеет в этой точке минимум.

Приведем ***алгоритм для нахождения наибольшего и наименьшего значения (абсолютного максимума и абсолютного минимума) непрерывной на отрезке*** $[a,b]$ ***функции*** $y = f(x)$:

1) Найти критические точки функции, *принадлежащие интервалу* (a,b).
2) Найти значения функции в найденных критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.

4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \ln^2 x - 2\ln x$ на отрезке $[1,5]$.

Решение. Найдем производную функции $y' = \left(\ln^2 x - 2\ln x\right)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{\ln x - 1}{x}$.

Найдем критические точки функции из условий: $\ln x - 1 = 0$ или $x = 0$.

Т.о. $x = e$ и $x = 0$ – критически точки исследуемой функции. Однако, отрезку $[1,5]$ принадлежит только $x = e$. Вычислим значения функции

$f(e) = \ln^2 e - 2\ln e = 1 - 2 = -1$

$f(1) = \ln^2 1 - 2\ln 1 = 0 - 0 = 0$

$f(5) = \ln^2 5 - 2\ln 5 \approx -0,63$

Сравнивая значения $f(e), f(1), f(5)$, находим $y_{наиб.[1,5]} = f(1) = 0$, $y_{наим.[1,5]} = f(e) = -1$.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Теорема 4. *Если $f'(x_0)=0$, то функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$. Пусть $x = x_0 + \Delta x$ –точка, близкая к x_0.Т.к. $f''(x)=(f'(x))'$, то имеем

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Таким образом, переменная величина $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ стремится к пределу $f''(x_0)$, а значит, начиная с некоторого момента эта величина имеет знак своего предела, т.е. $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ при $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, где ε –достаточно малое положительное число.

Получаем, что числитель и знаменатель дроби $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ имеют одинаковые знаки и, следовательно,

$f'(x) < 0$ при $-\varepsilon < x - x_0 < 0$ и $f'(x) > 0$ при $0 < x - x_0 < \varepsilon$.

Производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак с “-“ на “+”.

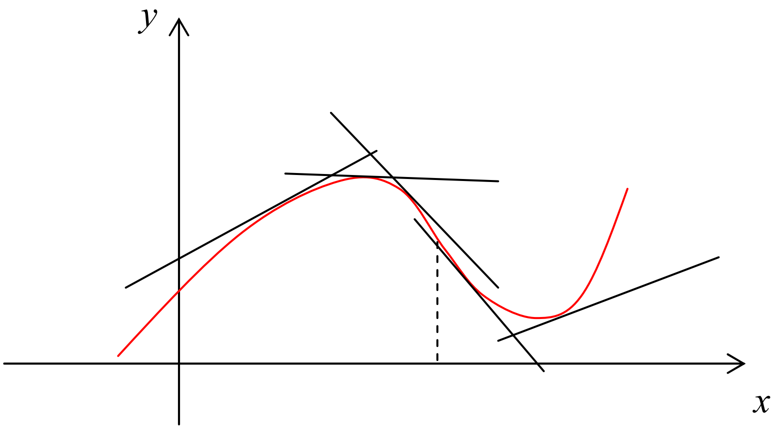
На основании теоремы 3 в этой точке функция $f(x)$ имеет минимум.

Для случая максимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x_0)=0$, то характер критической точки x_0 неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется ***выпуклой***, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется ***вогнутой***.



На рисунке дана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 5. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная дважды дифференцируемой в этом интервале функции f(x) отрицательна (положительна), то кривая y=f(x) обращена выпуклостью вверх (выпуклостью вниз).*

Доказательство. Пусть произвольная точка $x_0 \in (a,\ b)$ и $f''(x_0) < 0$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y=f(x)$;

Уравнение касательной: $y_{кас.} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Составим разность: $y - y_{кас.} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x)–f(x_0)$:

$y - y_{кас.} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, для $x_0<c<x$ или

$y - y_{кас.} = (x - x_0)(f'(c) - f'(x_0))$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:

$y - y_{кас.} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \qquad x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - y_{кас.} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - y_{кас.} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x)>0$ на интервале (a, b), то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется ***точкой перегиба***. В точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 6. (Необходимое условие точки перегиба) *Если график функции* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$, *то либо* $f''(x_0) = 0$ *либо* $f''(x_0)$ *не существует.*

Теорема 7. (Достаточное условие перегиба) *Пусть кривая определяется уравнением y=f(x). Если вторая производная* $f''(x_0) = 0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует и при переходе через точку* $x=x_0$ $f''(x)$ *меняет знак, то точка кривой* $M_0(x_0, f(x_0))$ *является точкой перегиба.*

Доказательство.

1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.
1) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x < b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба. Теорема доказана.

Из приведенных теорем 5-7 вытекает ***правило отыскания точек перегиба и исследование графиков функции на выпуклость и вогнутость***:

1. Находим область определения функции $y = f(x)$.
2. находим вторую производную функции $y = f(x)$.
3. приравниваем вторую производную к нулю $f''(x) = 0$ и находим все действительные корни полученного уравнения, а также точки из области определения, в которых вторая производная не существует. Т.о. находим все критические точки второго рода функции.
4. Найденные точки строим на числовой прямой в области определения функции. Они разобьют область определения на ряд интервалов, в каждом из которых вторая производная сохраняет знак.
5. определяем знак второй производной в каждом из полученных интервалов (для этого достаточно определить ее знак в какой-нибудь одной точке каждого из этих интервалов). Если на рассматриваемом интервале $f''(x) > 0$, то это – интервал вогнутости графика функции, если $f''(x) < 0$, то это–интервал выпуклости графика функции.
6. среди точек, в которых функция $y = f(x)$ непрерывна, а вторая производная равна нулю или не существует, определяем те, при переходе через которые вторая производная меняет знак. Такие точки будут являться точками перегиба.

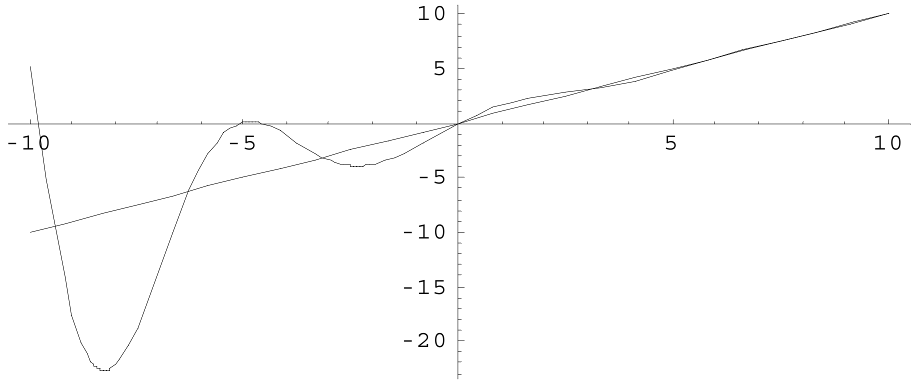
Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Прямая называется ***асимптотой*** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота *y=x*.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

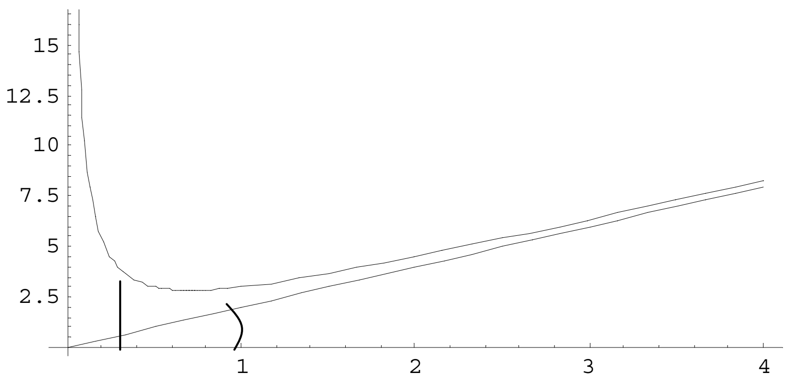
Вертикальные асимптоты

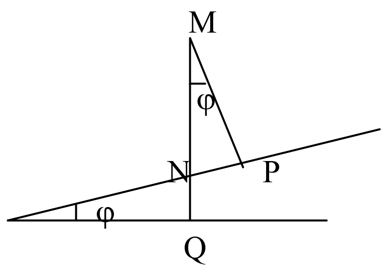
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая *x=a* – асимптота кривой *y=f(x)*.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая *x=5* является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

Предположим, что кривая *y=f(x)* имеет наклонную асимптоту $y_{ac.} = kx + b$.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – *M, P* – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда $MQ=y$ – ордината точки кривой, $NQ=y_{ac.}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP|=0$, $\angle NMP=\varphi$, $|NM|=\dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90^0, тогда

$\lim\limits_{x\to\infty}|MP|=\lim\limits_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi=\lim\limits_{x\to\infty}|NM|=0$

$|NM|=\big||MQ|-|QN|\big|=|y-y_{ac.}|=|f(x)-(kx+b)|$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$, т.к. $b = const$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}k=k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}-k-0=0$, следовательно,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (17.1)$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\big[f(x)-(kx+b)\big]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\big[f(x)-kx\big]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$, следовательно,

$$b=\lim_{x\to\infty}\big[f(x)-kx\big] \qquad (17.2)$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

Пример 4. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение.

1) Вертикальные асимптоты:

$\lim\limits_{x\to 0-0}y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 0+0}y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}=-\infty$, следовательно,

$x=0$ – вертикальная асимптота.

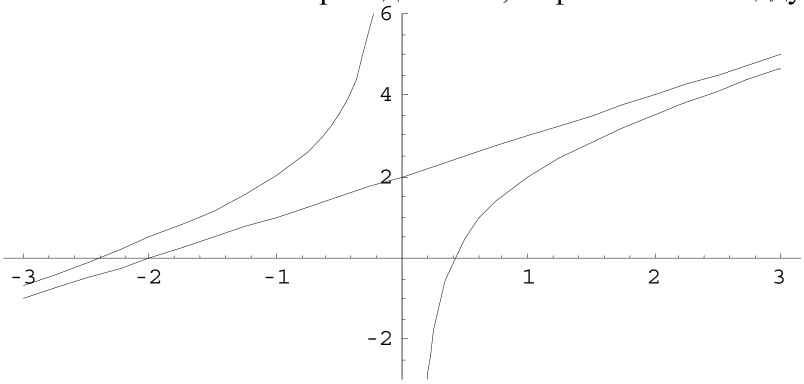
2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



Пример 5. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{9x}{9-x^2}$.

Решение. Прямые $x=3$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами кривой. Действительно,

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to 3+0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)} = \frac{27}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to 3-0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)} = \frac{27}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3+0} y = \lim_{x\to -3+0}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to -3+0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)} = \frac{-27}{+0} = -\infty$$

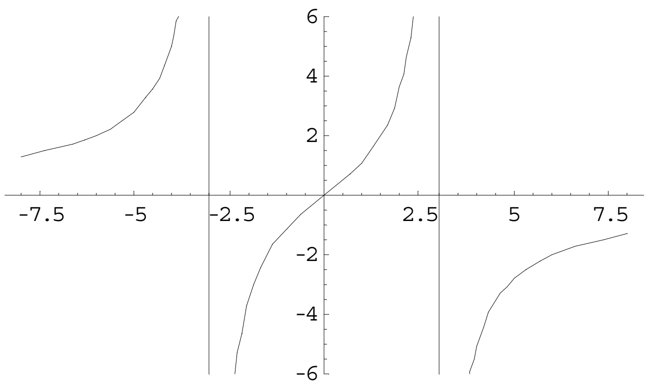
$$\lim_{x\to -3-0} y = \lim_{x\to -3-0}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to -3-0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)} = \frac{-27}{-0} = +\infty$$

Найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты по формулам (17.1) и (17.2):

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{9}{9-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1} = 0$$

$y=0$ – горизонтальная асимптота.



Пример 6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Решение. Прямая *x=-2* является вертикальной асимптотой кривой.
Действительно,

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\frac{11}{+0}=+\infty$$

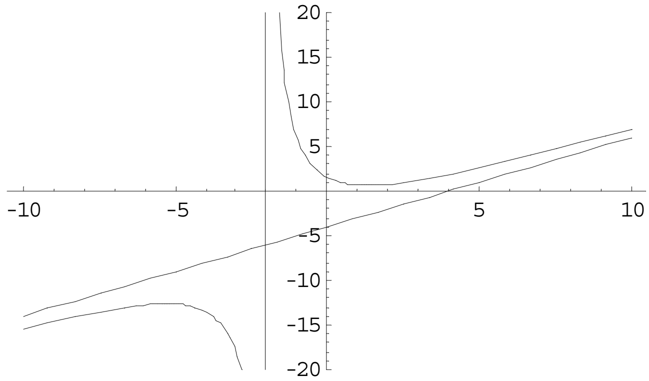
$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\frac{11}{-0}=-\infty$$

Найдем наклонные асимптоты вида $y = kx + b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-4$$

Таким образом, прямая *y=x–4* является наклонной асимптотой.



Полная схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо:

1) Найти область определения функции.
2) В случае если область определения функции симметрична относительно 0, проверить является ли функция четной или нечетной.
3) Найти точки разрыва функции (если они имеются) и ее односторонние пределы в этих точках. Изобразить на чертеже поведение функции вблизи каждой точки разрыва.
4) Найти асимптоты графика функции. Изобразить их на чертеже штриховыми линиями.
5) Изучить поведение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения (если это неясно из предыдущих исследований).

6) Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат. Построить эти точки.
7) Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума. Вычислить значения функции в этих точках. Изобразить на чертеже поведение функции в окрестности каждой из них.
8) Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции. Нанести на чертеж эти точки.
9) Используя полученные результаты исследования, построить график функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительные точки.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример 7. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение.

1. Находим область определения функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область *(-∞; -1) ∪(-1; 1) ∪(1;+∞)*.
2. Так как область определения функции–симметричное относительно 0 множество, то проверим функцию на четность (нечетность):

$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-y(x)$ –функция нечетная, значит, ее график симметричен относительно начала координат.

3. Точки *x=1, x=-1* являются точками разрыва второго рода.

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1-0} y=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1+0} y=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

Таким образом, прямые *x=1, x=-1* являются *вертикальными асимптотами* кривой.

4. Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: *y=x*.

5. Изучим поведение функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty;$$

6. Точки пересечения с осями координат:

$Ox:\ y=0\ \Rightarrow x=0$

$Oy:\ x=0\ \Rightarrow y=0$. Точка $O(0,0)$ –точка пересечения с осями координат.

7. Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x=0;\ x=-\sqrt{3};\ x=\sqrt{3}$.

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty<x<-\sqrt{3}$, $y'>0$, функция возрастает

$-\sqrt{3}<x<-1$, $y'<0$, функция убывает

$-1<x<0$, $y'<0$, функция убывает

$0<x<1$, $y'<0$, функция убывает

$1<x<\sqrt{3}$, $y'<0$, функция убывает

$\sqrt{3}<x<\infty$, $y'>0$, функция возрастает

Видно, что точка $x=-\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x=\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны $y(-\sqrt{3})=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ и $y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Найдем вторую производную функции

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Критические точки второго рода: $x=0;\ x=-\sqrt{3};\ x=\sqrt{3}$.

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty<x<-\sqrt{3}$, $y''<0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3}<x<-1$, $y''<0$, кривая выпуклая

$-1<x<0$, $y''>0$, кривая вогнутая

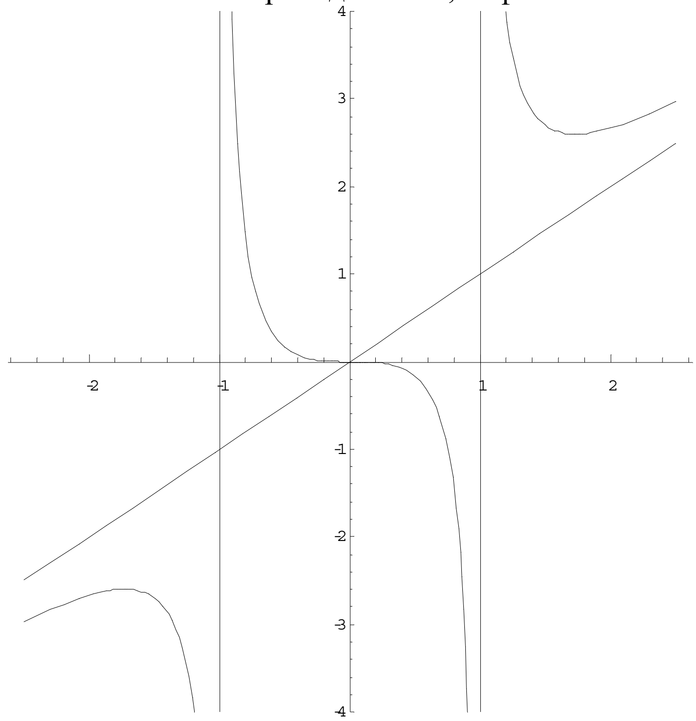
$0<x<1$, $y''<0$, кривая выпуклая

$1<x<\sqrt{3}$, $y''>0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3}<x<\infty$, $y''>0$, кривая вогнутая

Точка $x=0$ является точкой перегиба графика функции.

Построим *график* функции:



Лекция 18

Формула Тейлора*

Теорема Тейлора. 1) *Пусть функция f(x) имеет в точке x = a и некоторой ее окрестности производные до порядка (n+1) включительно. Т.е. и все предыдущие до порядка n производные функции непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.*
2) Пусть x–любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.
Тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (18.1)$$

где точка ε – промежуточная между точками x и a.
Выражение (18.1) называется ***формулой Тейлора***, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x) \qquad (18.2)$$

называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Доказательство. Представим функцию *f(x)* в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке *x=a* равно значению функции *f(x)*, а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке *x=a*.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (18.3)$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции *f(x)*. Чем больше значение *n*, тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он приближает функцию.

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n \qquad (18.4)$$

Дифференцируем равенство (18.4) последовательно *n* раз:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1C_n \end{cases} \qquad (18.5)$$

Решая систему (18.5) при *x=a*, учитывая (18.3), получаем:

$f(a) = C_0$
$f'(a) = C_1$
$f''(a) = 2\cdot 1C_2$
$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1C_3$
………………………
$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1C_n$

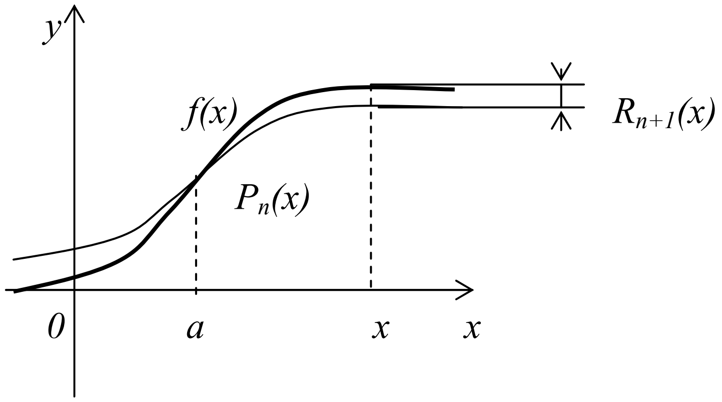
* Тейлор (1685-1731) – английский математик

Подставляя полученные значения C_i в формулу (18.4), получаем:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Как было замечено выше, многочлен не точно совпадает с функцией $f(x)$, т.е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда: $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее величину $R_{n+1}(x)$.



Как видно на рисунке, в точке $x=a$ значение многочлена в точности совпадает со значением функции. Однако, при удалении от точки $x=a$ расхождение значений увеличивается.

Иногда используется другая запись для $R_{n+1}(x)$. Т.к. точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\varepsilon = a + \theta(x-a)$.

Тогда можно записать:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (18.6)$$

Тогда, если принять $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \qquad (18.7)$$

где $0 < \theta < 1$.

Если принять $n = 0$, получим: $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\cdot\Delta x}$ – это выражение называется ***формулой Лагранжа***.

Формула Тейлора имеет огромное значение для различных математических преобразований. С ее помощью можно находить значения различных функций, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д.

При рассмотрении степенных рядов будет более подробно описаны некоторые особенности и условия разложения функции по формуле Тейлора.

Формула Маклорена[*]

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \qquad (18.8)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой- либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа a очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке a, значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки a для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Т.е. чем больше по модулю значение разности $(x - a)$ тем более точное значение функции отличается от найденного по формуле Тейлора.

Кроме того, можно показать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$, причем более высокого порядка, чем $(x - a)^n$, т.е.

$$R_{n+1}(x) = \circ((x-a)^n).$$

Таким образом, ряд Маклорена можно считать частным случаем ряда Тейлора.

Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью.

[*] Колин Маклорен (1698-1746) – шотландский математик.

Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Приведем примеры разложения в ряд Маклорена важнейших элементарных функций.

Функция $f(x)=e^x$

Находим: $f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$

……………………

$f^{(n)}(x) = e^x, \; f^{(n)}(0) = 1$

Тогда по формуле (18.8):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (18.9)$$

Пример 1. Найти значение числа *e*.

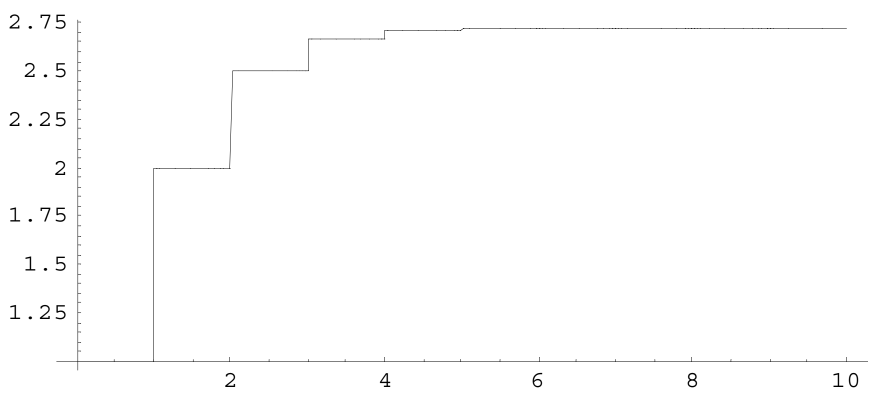
Решение. В полученной выше формуле (18.9) положим $x=1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: e = 2,71827876984127003

Для 10 членов разложения: e = 2,71828180114638451

Для 100 членов разложения: e = 2,71828182845904553



На графике показаны значения числа е с точностью в зависимости от числа членов разложения в ряд Маклорена.

Как видно, для достижения точности, достаточной для решения большинства практических задач, можно ограничиться 6–7-ю членами ряда.

Функция $f(x)=\sin x$

Находим значение функции и n производных в точке $x=0$:

$f(x) = \sin x; \; f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); \; f'(0) = 1;$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2); \; f''(0) = 0;$

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2); \; f'''(0) = -1;$

…………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2); \qquad f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$$
$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2); \qquad f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2);$$

Окончательно имеем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x), \tag{18.10}$$

где $R_{2n}(x) = \dfrac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\dfrac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

Пример 2. Применить полученную формулу для нахождения синуса любого угла с любой степенью точности.

На приведенных ниже графиках представлено сравнение точного значения функции и значения разложения в ряд Тейлора при различном количестве членов разложения.

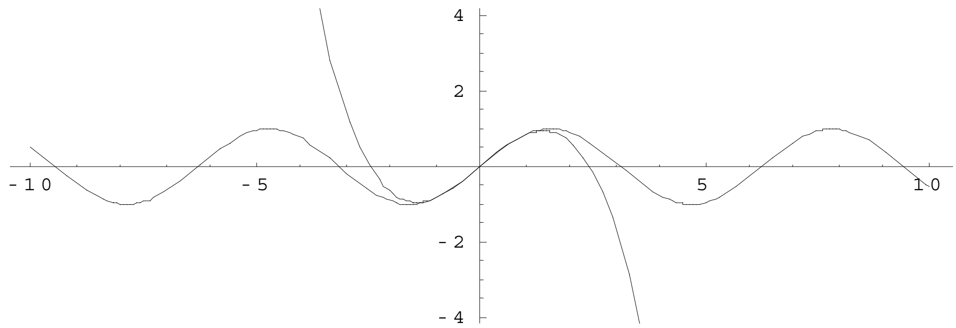


Рис. 1. Два члена разложения

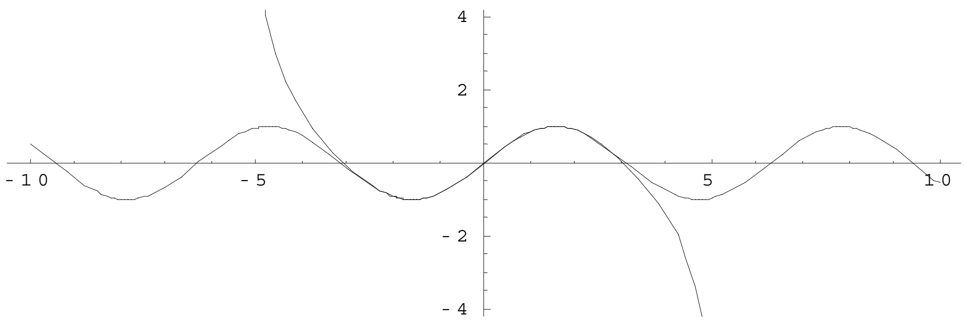


Рис. 2. Четыре члена разложения

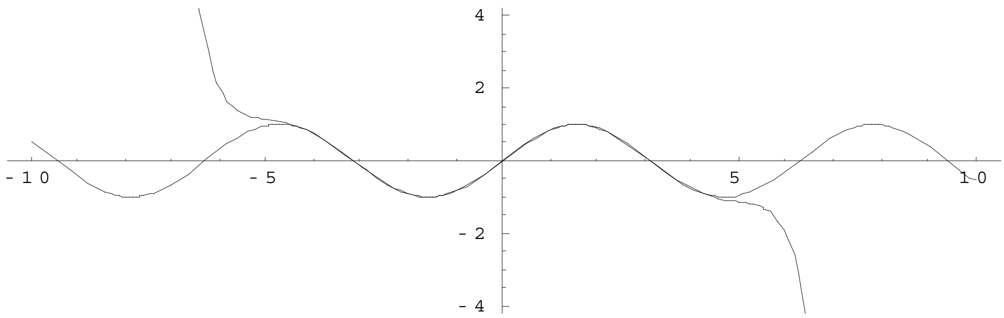


Рис. 3. Шесть членов разложения

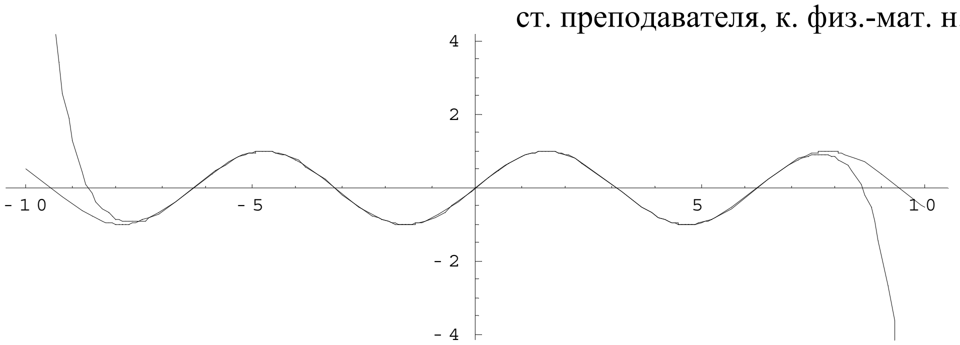


Рис. 4. Десять членов разложения

Чтобы получить наиболее точное значение функции при наименьшем количестве членов разложения надо в формуле Тейлора в качестве параметра x_0 выбрать такое число, которое достаточно близко к значению x, и значение функции от этого числа легко вычисляется.

Пример 3. Вычислить значение $\sin 20^0$.

Предварительно переведем угол 20^0 в радианы: $20^0 = \pi/9$.

Применим разложение в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами разложения:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0{,}348889 - 0{,}007078 + 0{,}000043 = 0{,}341854$$

В четырехзначных таблицах Брадиса для синуса этого угла указано значение 0,3420. Как видно, если ограничиться тремя членами разложения, то достигается точность до 0,0002.

Выше говорилось, что при $x \to 0$ функция $\sin x$ является бесконечно малой и может при вычислении быть заменена на эквивалентную ей бесконечно малую функцию x. Теперь видно, что при x, близких к нулю, можно практически без потери в точности ограничиться первым членом разложения, т.е. $\sin x \cong x$.

Функция f(x)=cosx

Для функции $\cos x$ аналогично получим:

$f(x)=\cos x;\ f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x;\ f'(0)=0;$

$f''(x)=-\cos x;\ f''(0)=-1;$

$f'''(x)=\sin x;\ f'''(0)=0;$

$f^{IV}(x)=\cos x;\ f^{IV}(0)=1$ и так далее.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) \qquad (18.11)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Функция f(x)=(1+x)$^{\alpha}$ (α - действительное число)

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1};\quad f'(0)=\alpha;$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1);$

……………………………………………………..

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n};\quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

Тогда:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \qquad (18.12)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)};\qquad 0<\theta<1$$

Если в полученной формуле принять $\alpha=n$, где n–натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1}=0$, тогда

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+x^n \qquad (18.13)$$

Получилась формула, известная как ***бином Ньютона***.

Функция f(x)=ln(1 + x)

Получаем: $f(x)=ln(1+x);\quad f(0)=0;$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x};\qquad f'(0)=1;$

$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2};\qquad f''(0)=-1;$

$f'''(x)=\dfrac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3};\qquad f'''(0)=2;$

………………………………………

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n};\qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!;$

Окончательно имеем: $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-...+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n+R_{n+1}(x);$ или

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_{n+1}(x), \qquad (18.14)$$

где остаточный член имеет вид $R_{n+1}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\dfrac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности.

Пример 4. Вычислить приближенно ln1,5

Решение. По формуле (18.14) имеем:

$$\ln 1{,}5=\ln(1+0{,}5)\approx 0{,}5-\frac{0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}5^3}{3}-\frac{0{,}5^4}{4}+\frac{0{,}5^5}{5}-\frac{0{,}5^6}{6}+\frac{0{,}5^7}{7}=0{,}4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.

Теоретические вопросы к экзамену

1. Понятие матрицы, виды матриц, примеры.
2. Умножение матрицы на число, сложение матриц. Свойства операций сложения и умножения. Примеры.
3. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Их свойства. Примеры.
4. Определитель матриц 1-го, 2-го и 3-го порядков. Их вычисление. Примеры.
5. Определитель квадратной матрица n-го порядка. Примеры.
6. Свойства определителей.
7. Обратная матрица. Теорема существования обратной матрицы*. Ее вычисление.
8. Минор к-го порядка матрицы. Базисный минор матрицы. Ранг матрицы и его свойства. Теорема о базисном миноре. Вычисление ранга.
9. Система m-линейных уравнений с n неизвестными. Матричная запись системы. Метод обратной матрицы.
10. Система m-линейных уравнений с n неизвестными. Матричная запись системы. Метод Крамера*.
11. Метод Гаусса (прямой и обратный ход). Эквивалентные преобразования систем.
12. Исследование на совместность СЛАУ методом Гаусса.
13. Система m-линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли о совместности исследуемой системы.
14. Понятие векторного (линейного) пространства. Аксиомы n-мерного векторного пространства.
15. Линейная зависимость (независимость) n-векторов.
16. Разложение n-вектора по базису. Теорема о единственности координат вектора в заданном базисе*.
17. Скалярное произведение n-векторов. Длина n-вектора, угол между векторами, ортогональность n-векторов. Примеры.
18. Векторы на плоскости и в пространстве. Понятие равных, ортогональных, коллинеарных, компланарных векторов. Линейные операции над векторами, их свойства.
19. Базис на плоскости и в пространстве. Ортонормированный базис. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.
20. Координаты точки и радиус-вектора в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве. Длина вектора. Деление отрезка в данном соотношении. Скалярное произведение векторов; его свойства. Угол между векторами. Критерий перпендикулярности векторов.
21. Векторное произведение векторов. Его свойства и геометрический смысл.
22. Смешанное произведение векторов. Его свойства и геометрический смысл.
23. Предмет аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Уравнения линии на плоскости и поверхности в пространстве.
24. Прямая в R^2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом*.

25. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых*.
26. Прямая в R^2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и проходящей через заданную точку плоскости*. Каноническое и параметрическое уравнение прямой.
27. Прямая в R^2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Уравнение прямой в отрезках*. Общее уравнение прямой и его частные случаи.
28. Расположение двух прямых на плоскости. Формула расстояния от точки до прямой.
29. Уравнение линии (кривой) 2-го порядка. Приведение уравнения $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ к каноническому виду выделением полных квадратов.
30. Эллипс и его каноническое уравнение*.
31. Исследование формы эллипса, его характеристики, геометрические свойства.
32. Критерий принадлежности точки эллипсу*.
33. Окружность как частный случай эллипса, ее характеристики, геометрические свойства.
34. Гипербола и ее каноническое уравнение*.
35. Исследование формы гиперболы, ее характеристики, геометрические свойства.
36. Критерий принадлежности точки гиперболе*.
37. Парабола и ее каноническое уравнение*.
38. Исследование формы параболы, ее характеристики, геометрические свойства.
39. Канонические уравнения кривых второго порядка с осями симметрии $x = x_0 \neq 0,\ y = y_0 \neq 0$. Построение их графиков.
40. Уравнение плоскости в пространстве, проходящей через точку M_0 и общее уравнение плоскости*.
41. Построение плоскости в пространстве, заданной общим уравнением. Частные случаи общего уравнения плоскости с графической иллюстрацией.
42. Уравнение плоскости в отрезках и уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки*.
43. Угол между плоскостями. Параллельность и перпендикулярность плоскостей.
44. Уравнение линии в пространстве. Общие уравнения прямой в векторной и координатной формах*.
45. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору. Канонические и параметрическое уравнение прямой в пространстве*.

46. Направляющие косинусы прямой в пространстве, их геометрический смысл. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки. Переход от общего уравнения к каноническому уравнению прямой.
47. Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
48. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.
49. Понятие гиперплоскости и полупространств в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$.
50. Алгоритм нахождения графического решения системы m линейных неравенств с двумя переменными.
51. Матрицы линейных преобразований
52. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования
53. Множества и операции над ними
54. Понятие отображения (функции)
55. Способы задания функций: аналитический, графический, табличный
56. Виды функций (явная, составная, неявная, многозначная, параметрическое задание функции, композиция функций, монотонные функции, обратная функция)
57. Числовая последовательность (ограниченные и неограниченные последовательности, монотонные последовательности)
58. Предел последовательности
59. Число e и его экономическая интерпретация*
60. Предел функции в точке (по Гейне и Коши)
61. Односторонние пределы функции
62. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности
63. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций
64. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми функциями
65. Основные теоремы о пределах*
66. Сравнение бесконечно малых функций. Свойства эквивалентных бесконечно малых.
67. Первый замечательный предел и его следствия*
68. Второй замечательный предел и его следствия
69. Непрерывность функции в точке.
70. Непрерывность некоторых элементарных функций*. Свойства непрерывных функций в точке.
71. Точки разрыва и их классификация
72. Непрерывность функции на интервале и на отрезке, их свойства
73. Производная функции, ее геометрический и физический смысл
74. Предельный анализ в экономике. Эластичность функции
75. Односторонние производные функции в точке
76. Основные правила дифференцирования*
77. Производные основных элементарных функций*
78. Производная композиции функций*
79. Логарифмическое дифференцирование*

80. Теорема о производной обратной функции и ее применение для нахождения производных функций *arctgx, arcctgx, arcsinx, arccosx**
81. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала, его свойства
82. Применение дифференциала для приближенных вычислений
83. Дифференциал функции. Инвариантная форма записи дифференциала.
84. Производные и дифференциалы высших порядков
85. Теоремы о среднем (Ролля, Лагранжа и Коши) их геометрическая интерпритация.
86. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя*
87. Возрастание и убывание функций*
88. Точки экстремума. Необходимое условие существования экстремума*
89. Точки экстремума. Достаточное условие существования экстремума*
90. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
91. Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков*
92. Выпуклость и вогнутость кривой*
93. Точки перегиба*
94. Асимптоты*
95. Формула Тейлора
96. Формула Маклорена
97. Применение формулы Маклорена для разложения в ряд функции $f(x) = e^x$
98. Применение формулы Маклорена для разложения в ряд функции $f(x) = \sin x$
99. Применение формулы Маклорена для разложения в ряд функции $f(x) = \cos x$
100. Применение формулы Маклорена для разложения в ряд функции $f(x) = (1+x)^\alpha$
101. Применение формулы Маклорена для разложения в ряд функции $f(x) = \ln(1+x)$
102. Алгоритм исследования функций и построения их графиков с помощью производной