МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

Л.В. Станишевская, Л.С. Барковская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Практикум

Издание пятое, переработанное и дополненное

Минск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕРОЯТНОСТЬ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Пространство элементарных событий. Операции над случайными событиями

В основе теории вероятностей лежит понятие случайного эксперимента. Эксперимент считается *случайным*, если он может закончиться любым из совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента нельзя предсказать, каким именно.

Примеры случайного эксперимента: бросание монеты, игральной кости, проведение лотереи, азартные игры, стрельба по цели, поступление звонков на телефонную станцию и т.п.

Различные результаты эксперимента называют *исходами*.

Определение 1. Множество всех взаимоисключающих исходов эксперимента называется *пространством элементарных событий*. Взаимоисключающие исходы – это те, которые не могут наступить одновременно.

Пространство элементарных событий будем обозначать буквой Ω, а его исходы – буквой ω.

Определение 2. Произвольное подмножество пространства элементарных событий называется *событием*. Событие может состоять из одного или нескольких элементарных событий, а также из счетного или несчетного числа элементарных событий.

Событие Ω, состоящее из всех исходов эксперимента, называется *достоверным событием*. Оно обязательно происходит, так как эксперимент всегда заканчивается каким-нибудь исходом.

Пустое множество исходов эксперимента называется *невозможным событием* и обозначается символом $\varnothing$.

Определение 3. *Суммой* двух событий A и B (обозначается $A+B$) называется событие, состоящее из всех исходов, входящих либо в A, либо в B. Другими словами, под $A+B$ понимают следующее событие: произошло или событие A, или событие B, либо они произошли одновременно, т.е. произошло хотя бы одно из событий A или B (рис. 1.1а).

Определение 4. *Произведением* двух событий A и B (обозначается AB) называется событие, состоящее из тех исходов, которые входят как в A, так и в B. Иными словами, AB означает событие, при котором события A и B наступают одновременно (рис. 1.1б).

Определение 5. *Разностью* двух событий A и B (обозначается $A-B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B.

Смысл события $A - B$ состоит в том, что событие A наступает, но при этом не наступает событие B (рис. 1.1в).

Определение 6. Противоположным (*дополнительным*) для события A (обозначается $\overline{A}$) называется событие, состоящее из всех исходов, которые не входят в A. Наступление события $\overline{A}$ означает просто, что событие A не наступило.

Если события изобразить на плоскости, то результат определенных операций над событиями выглядит следующим образом:

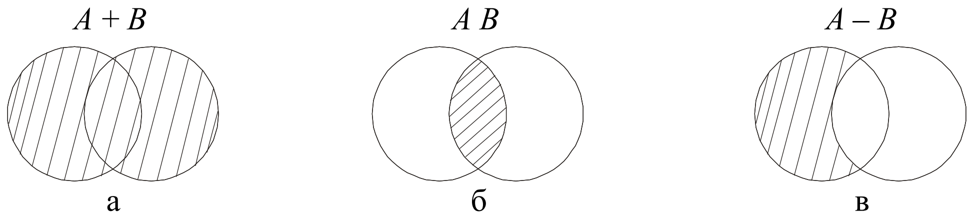

Рис. 1.1

Определение 7. События A и B называются *несовместимыми*, если нет исходов, входящих как в A, так и в B, т.е. $AB = \varnothing$.

Определение 8. Говорят, что событие A *содержится* в событии B (обозначается $A \subset B$), если все исходы события A входят в событие B.

Свойства операций над событиями

1) $A + B = B + A$;
2) $AB = BA$;
3) $A + \overline{A} = \Omega$;
4) $A\Omega = A$;
5) $AB \subset A$;
6) $A\overline{A} = \varnothing$;
7) $\overline{\overline{A}} = A$;
8) $A - B = A\overline{B}$;
9) $(A + B)C = AC + BC$;
10) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;
11) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
12) $(A - B)C = AC - BC$.

Пример 1.1. Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта будем понимать выигрыш одного из них в i-й партии или ничью. Построить пространство Ω элементарных исходов.

Решение. Обозначим события A_i – в i-й партии выиграл первый игрок, B_i – второй, C – ничья. Тогда возможные исходы игры:

1. Обе партии выиграл первый игрок A_1A_2.
2. Обе партии выиграл второй игрок B_1B_2.
3. Обе партии закончились вничью C_1C_2.
4. В первой партии выиграл первый игрок, во второй – второй A_1B_2.
5. В первой выиграл первый игрок, во второй – ничья A_1C_2.

6. В первой партии победа второго игрока, во второй – первого B_1A_2.

7. В первой – победа второго игрока, во второй – ничья B_1C_2.

8. В первой – ничья, во второй – победа первого игрока C_1A_2.

9. В первой – ничья, во второй – победа второго игрока C_1B_2.

Ответ: $\Omega = \{ A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2,\ A_1B_2,\ A_1C_2,\ B_1A_2,\ B_1C_2,\ C_1A_2,\ C_1B_2 \}$.

Пример 1.2. Пусть *A*, *B*, *C* – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из *A*, *B*, *C*:

1. Произошло только *A*.
2. Произошло *A* и *B*, но *C* не произошло.
3. Все три события произошли.
4. Произошло, по крайней мере, одно из событий.
5. Произошли, по крайней мере, два события.
6. Произошло одно и только одно событие.
7. Произошли два и только два события.
8. Ни одно событие не произошло.
9. Произошло не более двух событий.

Решение.

1. Обозначим $\overline{B}$ и $\overline{C}$, что события *B* и *C* не произошли, тогда событие: произошло только *A* можно записать в виде $A\overline{B}\,\overline{C}$.

2. $AB\overline{C}$.

3. ABC.

4. Событие произошло, по крайней мере, одно из событий можно представить как сумму этих событий: $A + B + C$.

5. Произошли, по крайней мере, два события – это сумма $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$.

6. Произошло одно и только одно событие – это сумма событий $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$.

7. Произошли два и только два события – можно записать в виде $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, или $AB + AC + BC - ABC$.

8. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

9. $\overline{ABC}$, т.е. три события одновременно не произошли.

Пример 1.3. События *A*, *B* и *C* означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты *s*, а из второго *k* томов. Что означают события: а) $A + B + C$; б) ABC; в) $A_1 + B_3$; г) A_2B_2; д) $(A_1B_3 + B_1A_3)C$?

Решение.

1. $A + B + C$ – взята хотя бы одна книга.

2. ABC – взято хотя бы по одному тому из первого, второго и третьего собрания сочинений.

3. $A_1 + B_3$ – взята одна книга из первого собрания сочинений или три книги из второго собрания сочинений, или одна из первого и три из второго собрания сочинений одновременно.

4. A_2B_2 – взято по два тома из первого и второго собрания сочинений.

5. $(A_1B_3 + B_1A_3)C$ – взят хотя бы один том из третьего собрания сочинений и один том из первого и три тома из второго собрания сочинений или три тома из первого и один том из второго собрания сочинений.

Пример 1.4. Пусть $A_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ – события: Ваша встреча с i-ым другом. Составьте события: а) с друзьями Вы не встречались; б) Вы встречались только со вторым другом; в) с кем-то Вы не встретились; г) Вы встретились с большей частью друзей; д) у Вас состоялась встреча только с одним другом; е) Вы встретились с кем-то из первых двух друзей, а с третьим другом – нет; ж) со вторым другом Вы не встретились.

Назовите события: а) $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + {} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$; б) $\overline{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}}$; в) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; г) $A_1 \cdot \left(\overline{A_2} + \overline{A_3}\right)$; д) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$; е) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$; ж) $A_1 \cdot \overline{A_2}$.

Решение. Составим события:

а) Так как событие $A_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ – «Ваша встреча с i-ым другом», то $\overline{A_i} \left(i = \overline{1,3}\right)$ – «с i-ым другом Вы не встретились». Поэтому событие «с друзьями Вы не встречались» – это совместное наступление событий $\overline{A_i}$, т.е. $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

б) Слово *только* говорит о том, что с первым и третьим другом Вы не встречались, а со вторым – да. Это $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$.

в) Этот кто-то может быть любым из ваших друзей, поэтому событие – сумма событий $\overline{A_i} \left(i = \overline{1,3}\right)$, т.е. $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$.

г) Так как друзей трое, а большая часть – это более половины, то Вы встретились, по крайней мере, с двумя друзьями, поэтому событие – сумма событий $A_i \cdot A_j \left(i, j = \overline{1,3}\right)$ и $i \neq j$, т.е. $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

д) Этим одним другом может быть любой из Ваших трех друзей, поэтому это событие есть сумма таких событий: «Вы встретились только с первым другом» или «встретились только со вторым», или «встретились только с третьим», т.е. $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + {} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

е) Встреча с кем-то из первых двух друзей – это встреча либо с первым другом, либо со вторым (а может быть и с обоими), т.е. это сумма $A_1 + A_2$ и в то же время не встретились с третьим. Поэтому ответ: $(A_1 + A_2)\cdot \overline{A_3}$.

ж) Так как A_2 – «встреча со вторым другом», то $\overline{A_2}$ – «встречи со вторым другом не было». Так как про других друзей ничего не говорится, то не надо думать про встречи с ними.

Назовем события:

а) Вы не встретились только с одним другом (или Вы встретились только с двумя).

б) Событие $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ – «ни с кем Вы не встретились», а событие $\overline{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}}$ – противоположное событию $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ (отрицание этого события). Поэтому ответ: встречи были $(A_1 + A_2 + A_3)$ (с кем-то Вы встретились). Итак, $\overline{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}} = A_1 + A_2 + A_3$.

в) С двумя друзьями Вы не встречались (с большей частью своих друзей Вы не встречались).

г) С первым другом Вы встретились, а с кем-то из остальных – нет.

д) Вы не встретились только со вторым другом (или у Вас была встреча только с первым и третьим другом).

е) Так как $A_1 + A_2 + A_3$ событие «Вы с кем-то встречались», то событие $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$ – ему противоположное (отрицание этого события – «Вы ни с кем не встречались», т.е. $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$). Итак, $\overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Бросаются две игральные кости. Пусть A — событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B — событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Составить пространство элементарных событий, связанное с данным опытом.

1.2. Потребитель может увидеть рекламу определенного продукта по телевидению, на рекламном стенде и прочитать в газете. Составить пространство элементарных событий для потребителя в этом опыте.

1.3. Торговый агент последовательно контактирует с тремя потенциальными покупателями. Под исходом опыта будем понимать последовательность

(X_1, X_2, X_3), где каждый из X_i обозначает продажу или нет $(\overline{X_i})$ товара покупателю. Построить пространство Ω элементарных событий.

1.4. Из таблицы чисел взято число. Событие A – число делится на 5, событие B – число оканчивается нулем. а) Что означают события A–B и $A\overline{B}$?
б) Совместны ли события A и $\overline{A+B}$?

1.5. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие A: «Мужу больше 30 лет», событие B: «Муж старше жены», событие C: «Жене больше 30 лет».

1. Выяснить смысл событий ABC, $A - AB$, $A\overline{B}C$.
2. Проверить, что $A\overline{C} \subset B$.

1.6. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A — первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B — второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C — третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события: а) ABC; б) $A + B + C$; в) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$; г) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$; д) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; е) $A + B + C - ABC$?

1.7. Производится испытание трех приборов на надежность. Пусть событие $A_k - k$-й прибор выдержал испытание $(k = 1, 2, 3)$. Представить в виде суммы и произведения события A_k и $\overline{A_k}$ следующие события: а) хотя бы один прибор выдержал испытание; б) не менее двух приборов выдержали испытание; в) только один прибор выдержал испытание; г) только два прибора выдержали испытание.

1.8. Страховой агент предлагает услугу по страхованию жизни трем потенциальным клиентам. Пусть события A, B и C означают соответственно, что первый, второй и третий клиент согласился застраховать свою жизнь.
1) Составить события:
а) все клиенты согласились на страховку;
б) хотя бы один клиент согласился на страховку;
в) только один клиент согласился на страховку;
в) только первый клиент согласился на страховку.
2) Назвать события:
а) $AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$; б) $A\overline{B}\,\overline{C}$; в) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$; г) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

1.9. Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот игрок, у которого раньше выпадет герб. Пусть A_i означает событие, что в i-ой партии у первого игрока выпал герб; B_i – у второго игрока в i-ой партии выпал герб; A – выигрыш первого игрока, B – выигрыш второго игрока. Записать выражение для A и B через A_i, B_i, $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

1.10. Если событие А – выигрыш по билету одной лотереи, В – выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события: $C = A\overline{B} + \overline{A}B,\quad D = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$?

1.11. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A1$ = {первый студент решил задачу}, $A2$ = {второй студент решил задачу}, $A3$ = {третий студент решил задачу}. Выразить через Ai(i= 1, 2, 3) следующие события: A = {задачу решил хотя бы один студент}; B = {задачу решил только первый студент }; C = {задачу решил только один студент }.

1.12. Найти случайное событие X из равенства $\overline{X + \overline{\overline{A}}} + \overline{X + \overline{\overline{A}}} = B.$

1.13. В урне 5 синих, 3 красных и 2 желтых шара, пронумерованных от 1 до 10. Из нее наудачу достали 1 шар. Событие A – достали синий шар, событие B – достали красный шар, событие C – достали желтый шар, событие D – достали шар с четным номером, событие E – достали шар с номером, кратным 3. Что означает событие $(A + B)\cdot\overline{D}\cdot E$?

1.14. Пусть события: A – цветет астра, K – цветет кактус, C – цветет сирень.

Составьте события: а) только цветет кактус; б) не цветут два вида цветов; в) только два вида цветов цветут; г) цветут сирень с кактусом; д) только один вид цветет; е) что-то цветет; ж) астра не цветет.

Назовите события: а) $\overline{A}\cdot\overline{K}\cdot\overline{C}$; б) $\overline{C\cdot A\cdot K}$; в) $(A + C)\cdot\overline{K}$; г) $\overline{A}\cdot\overline{K} + {}$ $+ \overline{A}\cdot\overline{C} + \overline{K}\cdot\overline{C}$; д) $\overline{A + K + C}$; е) $\overline{A}\cdot K\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{K}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{K}\cdot C$; ж) $\overline{A}\cdot\overline{K}$.

1.15. Пусть $D_i\ \left(i = \overline{1,3}\right)$ – события: i-ый депутат выступил с речью.

Составьте события: а) только двое депутатов выступили с речью; б) все промолчали; в) только третий депутат высказался; г) кто-то из первых двух депутатов выступил с речью, а третий промолчал; д) большая часть депутатов промолчала; е) не все промолчали.

Назовите события: а) $\overline{\overline{D_1}+\overline{D_2}+\overline{D_3}}$; б) $\left(\overline{D_1}+\overline{D_2}\right)\cdot D_3$; в) $\overline{D_1}\cdot D_3$; г) $D_1+D_2+D_3$; д) $\overline{D_1}\cdot\overline{D_2}\cdot D_3+\overline{D_1}\cdot D_2\cdot\overline{D_3}+D_1\cdot\overline{D_2}\cdot\overline{D_3}$; е) $\overline{D_1\cdot D_2\cdot D_3}$; ж) $\overline{D_1}\cdot D_2\cdot D_3$.

1.16. Пусть $T_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ – события: i-ое такси стоит на стоянке.

Составьте события: а) можно уехать на такси; б) только одна машина стоит на стоянке; в) двух такси нет на стоянке; г) только два такси стоят на стояке; д) только второго такси нет на стоянке; е) какого-то такси нет на стоянке; ж) стоянка пуста.

Назовите события: а) $T_1\cdot T_2+T_1\cdot T_3+T_2\cdot T_3$; б) $\overline{T_1}\cdot\overline{T_2}\cdot\overline{T_3}$; в) T_2; г) $\overline{T_1\cdot T_2\cdot T_3}$; д) $T_1\cdot\left(\overline{T_2}+\overline{T_3}\right)$; е) $T_1+T_2+T_3$; ж) $\overline{T_1}\cdot T_2\cdot T_3+T_1\cdot\overline{T_2}\cdot T_3+$ $+T_1\cdot T_2\cdot\overline{T_3}$.

1.17. Пусть $S_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ – события: i-ый магазин закрыт на обед.

Составьте события: а) можно совершить покупку; б) только третий магазин закрыт; в) только один магазин открыт; г) большая часть магазинов закрыта; д) открыт первый и третий магазины; е) не все магазины открыты; ж) третий магазин открыт, а из первых двух только один магазин закрыт.

Назовите события: а) $\overline{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$; б) $\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}+\overline{S_1}\cdot\overline{S_3}+\overline{S_2}\cdot\overline{S_3}$; в) $S_1\cdot\overline{S_2}\cdot S_3$; г) $\overline{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}\cdot\overline{S_3}}$; д) $\overline{S_2}$; е) $S_1+S_2+S_3$; ж) $S_1\cdot S_2\cdot S_3$.

2. Элементы комбинаторики. Непосредственный подсчет вероятностей

Комбинаторика происходит от лат. combinatio — соединение.

Группы, составленные из каких-либо предметов (безразлично каких), называются *соединениями* (комбинациями).

Предметы, из которых состоят соединения, называются *элементами*.

Соединение называется *упорядоченным*, если в нем указан порядок следования элементов.

Сформулируем основные правила комбинаторики.

1. Правило суммы. Если два действия взаимо исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое — n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n + m$ способами.

2. Правило умножения. Пусть требуется выполнить одно за другим какие-то k действия. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после этого второе действие можно осуществить n_2 способами и т.д. и, наконец, после осуществления $(k-1)$-го действия, k-е можно выполнить n_k способами, то все k действия вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$ способами.

Эти правила дают удобные универсальные методы решения многих комбинаторных задач.

Основные комбинаторные формулы

Размещения. Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (считается, что 0! = 1).

Пример 2.1. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Решение. В этом случае надо найти число размещений (без повторений) из 25 элементов по 4, так как здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные.

Ответ: $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600$.

Размещения с повторениями. Каждое размещение с повторениями из n элементов по m элементов может состоять не только из различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов, взятых из данных n элементов.

Соединения, отличающиеся друг от друга хотя бы порядком расположения элементов, считаются различными размещениями.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{2}$$

Пример 2.2. Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Пусть на диск нанесено 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Решение. Общее число возможных комбинаций можно найти по формуле (2)

$$N = \overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248\,832.$$

Число неудачных попыток — 248 832 – 1 = 248 831.

Ответ: 248 831.

Сочетания. Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{3}$$

где $0 \le m \le n$.

Пример 2.3. Покупая карточку лотереи «Спортлото», игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько возможных комбинаций можно составить из 49 по 6, если порядок чисел безразличен?

Решение. Число возможных комбинаций можно рассчитать по формуле (3)

$$N = C_{49}^6 = \frac{49\,!}{6!\,43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816.$$

Ответ: N = 13 983 816.

Сочетания с повторениями. Сочетание с повторениями из n элементов по m элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно или не содержать его совсем, т.е. каждое сочетание из n элементов по m элементов может состоять не только из m различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначают символом $\overline{C}_n^m$ и вычисляют по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

В сочетаниях с повторениями m может быть и больше n.

Пример 2.4. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Число различных покупок равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 7:

$$N = \overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Ответ: Из пирожных 4 сортов 7 пирожных можно выбрать 120 способами.

Перестановки. Перестановками из n элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n, это то же самое, что число размещений из n элементов по n в каждом, поэтому

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1 = n!.$$

Пример 2.5. Сколько существует способов составления списка 10 деловых звонков случайным образом?

Решение. Количество способов составления списка из 10 звонков будет равно числу перестановок из 10 элементов:

$$N = P_{10} = 10! = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3\,628\,800.$$

Ответ: Число способов составления списка из 10 звонков равно 3 628 800.

Перестановки с повторениями. Пусть имеются n элементов, среди которых k_1 элементов одного типа, k_2 элементов другого типа, k_l элементов

l-го типа $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$. Число перестановок из этих n элементов равно числу перестановок с повторениями, обозначается $\overline{P_n}$ и вычисляется по формуле

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Пример 2.6. Десять приезжих мужчин размещаются в гостинице в двух трехместных и одном четырехместном номерах. Сколько существует способов их размещения?

Решение. $N = \dfrac{10!}{3!\,3!\,4!} = 4200.$

Ответ: Существует 4200 способов.

Классическое определение вероятности

Классической схемой, или схемой случаев, называется испытание, при котором число элементарных исходов конечно и все из них равновозможны.

Элементарное событие (исход) ω называется благоприятствующим событию A, если его появление влечет наступление события A (т.е. ω входит в число элементов, составляющих A).

Классической вероятностью события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех элементарных событий этой схемы

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Из определения вероятности следует, что $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$ и $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 2.7. В магазин поступило 40 новых цветных телевизоров, среди которых 7 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?

Решение. Число телевизоров, не имеющих скрытых дефектов, равно $m = 40 - 7 = 33$. Число всех элементарных исходов всех поступивших телевизоров равно $n = 40$. Следовательно, по классическому определению вероятности вероятность того, что отобранный телевизор не имеет скрытых дефектов (событие A), равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{33}{40} = 0{,}825.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}825$.

Пример 2.8. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию три лекции из 10 различных предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно.

Решение. Студенту необходимо из 10 лекций, которые могут быть поставлены в расписание, причем в определенном порядке, выбрать три. Следовательно, число всех возможных исходов испытания равно числу размещений из 10 по 3, т.е.

$$n = A_{10}^{3} = \frac{10\,!}{(10-3)!} = \frac{10\,!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720\,.$$

Благоприятный же случай только один, т.е. $m = 1$. Искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014\,.$$

Ответ: $P = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014$.

Пример 2.9. В подъезде дома установили замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из возможных десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 15 секунд. Какова вероятность события A = {вошедшему удастся открыть дверь за один час}?

Решение. Так как цифры, входящие в набираемый номер, могут повторяться и порядок их набора играет существенную роль, то мы приходим к схеме размещений с повторениями. Число возможных вариантов набора трех цифр из 10 возможных равно $\overline{A}_{10}^{3} = 10^3$. За один час, тратя на набор комбинации 15 секунд, можно набрать 240 различных комбинаций, т.е. $m = 240$. Искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{240}{10^3} = 0{,}24$.

Ответ: $P = 0{,}24$.

Пример 2.10. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

Решение. Так как каждый из 12 человек может родиться в любом из 12 месяцев года, то число всех возможных вариантов можно посчитать по формуле размещений с повторениями

$$n = \overline{A}_{12}^{12} = 12^{12}.$$

Число благоприятных случаев получим, переставляя месяцы рождения у этих 12 человек, т.е.

$$m = P_{12} = 12!.$$

Тогда искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{12!}{12^{12}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1925}{12^7} =$$

$$= \frac{1925}{35\,831\,808} \approx 0{,}00005372.$$

Ответ: $P = \dfrac{12\,!}{12^{12}} \approx 0{,}00005372.$

Пример 2.11. На полке стоят 15 книг, 5 из них в переплете. Берут наудачу три книги. Какова вероятность того, что все три книги в переплете?

Решение. Опыт состоит в том, что из 15 книг отбирают 3, причем в каком порядке они отобраны, роли не играет. Следовательно, число возможных способов выбора будет равно числу сочетаний из 15 по 3, т.е.

$$n = C_{15}^{3} = \frac{15\,!}{3\,!12\,!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} = \frac{2730}{6} = 455.$$

Число благоприятных случаев будет равно числу сочетаний из 5 по 3, т.е.

$$m = C_5^3 = \frac{5\,!}{3\,!2\,!} = 10.$$

Искомая вероятность $P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{10}{455} = \dfrac{2}{91} \approx 0{,}022.$

Ответ: $P = \dfrac{2}{91} \approx 0{,}022.$

Пример 2.12. В кондитерской имеются 6 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 3 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал пирожные разных видов.

Решение. Число всех возможных видов заказов 3 пирожных будет равно числу сочетаний с повторениями из 6 элементов по 3, т.е.

$$n = \overline{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8\,!}{3\,!5\,!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56.$$

Число благоприятных случаев будет равно числу сочетаний из 6 по 3, т.е.

$$m = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20; \qquad P = \frac{m}{n} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357.$$

Ответ: $P = \frac{5}{14} \approx 0{,}357.$

Пример 2.13. Десять приезжих мужчин, среди которых Петров и Иванов, размещаются в гостинице в двух трехместных и одном четырехместном номерах. Какова вероятность события A, состоящего в том, что Петров и Иванов попадут в четырехместный номер?

Решение. Число всех возможных размещений 10 человек в двух трехместных и одном четырехместном номере равно числу перестановок из десяти элементов, среди которых 3 одного вида, 3 другого и 4 третьего, т.е.

$$n = \overline{P}_{10}(3; 3; 4) = \frac{10!}{3!3!4!} = 4200.$$

После того как Иванов и Петров будут размещены в четырехместном номере, остальные 8 человек должны быть размещены в двух трехместных и на оставшиеся два свободных места в четырехместном номере, это можно будет сделать следующим образом:

$$m = \overline{P}_8(3; 3; 2) = \frac{8!}{3!3!2!} = 560.$$

Искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{560}{4200} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133.$

Ответ: $P = \frac{2}{15} \approx 0{,}133.$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово «два»?

Ответ: $P = \frac{1}{60}$.

2.2. а) Три одноклассника Иванов, Петров и Сидоров решили подать документы на экономический факультет одного из четырех вузов: БГУ, БНТУ, БГАТУ и БГУИР, причем каждый выбирал себе вуз случайно и независимо от других. Найти вероятности следующих событий:

1) все одноклассники окажутся в разных вузах;

2) все подадут документы в один и тот же вуз;

3) все подадут документы в БГУ.

б) На одной полке наугад расставляются n различных книг. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом (в любом порядке). Задачу решить в общем виде и вычислить конкретный ответ для $n=2$, $n=3$, $n=8$.

в) На одной полке наугад расставляются 10 различных книг. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом (в любом порядке).

Ответ: а) 1. $P(A)=\frac{3}{8}$; 2. $P(B)=\frac{1}{16}$; 3. $P(C)=\frac{1}{64}$.

б) $P=\frac{2}{n}$, если $n=2$, то $P(A)=1$; если $n=3$, то $P(A)=\frac{2}{3}$;

если $n=8$, то $P(A)=\frac{1}{4}$.

в) $P=\frac{1}{15}$.

2.3. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

Ответ: 0,3.

2.4. Из восьми магазинов с номерами 1,2, …,8 для проверки случайным образом выбирают три. Какова вероятность того, что будут проверяться магазины № 5 и № 6?

Ответ: $\frac{3}{28}$.

2.5. Имеется 6 карточек с буквами А, А, Т, Т, Л, Н. Карточки перемешивают и затем наугад достают по очереди и располагают в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово «АТЛАНТ»?

Ответ: $\frac{1}{180}$.

2.6. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в ряд в порядке поступления слева направо. Найти вероятность следующих событий: A = {появится число 123}; B = {появится число, не содержащее цифры 2}; C = {появится число, состоящее из последовательных цифр}.

Ответ: $P(A)=\frac{1}{60}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, $P(C)=\frac{1}{20}$.

2.7. Десять человек входят в комнату, где имеется всего 7 стульев, и рассаживаются случайным образом, но так, что все стулья оказываются занятыми. Какова вероятность того, что а) два определенных лица окажутся без места? б) четыре определенных лица будут сидеть рядом?

Ответ: а) $P = \frac{1}{15}$; б) $P = \frac{1}{6}$.

2.8. Фирмы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 предлагают свои условия по выполнению 3 различных контрактов C_1, C_2, C_3. Любая фирма может получить только один контракт. Если предположить равновозможность заключения контрактов, чему равна вероятность того, что фирма A_3 получит контракт? Чему равна вероятность того, что фирмы A_1 и A_2 получат контракт?

Ответ: $P = \frac{3}{5}$; $P = \frac{3}{10}$.

2.9. 8 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди шести студентов, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятность следующих событий: A = «варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными»; B = «варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам»; C = «будут распределены последовательные номера вариантов».

Ответ: $P(A) = \frac{1}{28}$, $P(B) = \frac{5}{28}$, $P(C) = \frac{3}{28}$.

2.10. A и B и еще 8 человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что A и B отделены друг от друга тремя лицами.

Ответ: $P = \frac{2}{15}$.

2.11. Группа, состоящая из 6 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если а) число мест равно 6; б) число мест равно 8.

Ответ: а) $P = \frac{1}{3}$; б) $P = \frac{1}{4}$.

2.12. В течение пяти дней случайным образом поступают сообщения о банкротстве одного из пяти банков, назовем их условно A, B, C, D, E. Чему равна вероятность того, что сообщение о банкротстве банка B не следует сразу же за сообщением о банкротстве банка A?

Ответ: $P = \frac{4}{5}$.

2.13. Пять мужчин и пять женщин случайным образом рассаживаются в ряд на десять мест. Найти вероятности следующих событий: A = «никакие два мужчины не будут сидеть рядом»; B = «все мужчины будут сидеть рядом», C = «мужчины и женщины будут чередоваться».

Ответ: $P(A)=\frac{1}{42}$; $P(B)=\frac{1}{42}$; $P(C)=\frac{1}{126}$.

2.14. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: A = «все пассажиры выйдут на четвертом этаже»; B = «все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже)»; C = «все пассажиры выйдут на разных этажах».

Ответ: $P(A)=\frac{1}{216}$, $P(B)=\frac{1}{36}$, $P(C)=\frac{5}{9}$.

2.15. 9 пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Найти вероятность того, что а) в каждый вагон сядут по три пассажира; б) в один вагон сядут 4, в другой – 3, в третий – 2 пассажира.

Ответ: а)$P=\frac{9!}{(3!)^3\cdot 3^9}$;   б) $P=\frac{9!}{4!\,3!\,2!\,3^9}$.

2.16. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать код из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. С какой вероятностью можно получить доступ к сети с первой попытки, если а) все цифры в коде не повторяются; б) цифры могут повторяться?

Ответ: а) $P=\frac{1}{5040}$; á) $P=\frac{1}{10^4}$.

2.17. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: A = = «четыре последние цифры телефонного номера одинаковы»; B = «все цифры различны»; C = «номер начинается с цифры 5»; D = «номер содержит три цифры 7, две цифры 5 и две цифры 3».

Ответ: $P(A)=0{,}001$; $P(B)\approx 0{,}0605$; $P(C)=0{,}1$; $P(D)=2{,}1\cdot 10^{-5}$.

2.18. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: A = «все автомобили поедут по одной и той же улице»; B = «по определенной улице поедут ровно три автомобиля»; C = «по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль».

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{64}$; $P(B)=\dfrac{3}{64}$; $P(C)=\dfrac{29}{32}$.

2.19. В партии из 15 изделий 4 бракованных. Из партии выбираются наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий 2 бракованных.

Ответ: $P=\dfrac{36}{91}$.

2.20. Профессор вызвал через старосту на обязательную консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех отстающих студентов. Какова вероятность того, что староста послал именно тех студентов, которых назвал профессор?

Ответ: $P=\dfrac{1}{20}$.

2.21. В группе 20 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найти вероятности следующих событий: A = «среди отобранных – нет отличников»; B = «среди отобранных – 2 отличника»; C = «среди отобранных – хотя бы один отличник».

Ответ: $P(A)\approx 0{,}13$; $P(B)\approx 0{,}35$; $P(C)\approx 0{,}87$.

2.22. Для уменьшения общего количества игр 20 команд спортсменов по жребию разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

Ответ: а) $P=\dfrac{10}{19}$; б) $P=\dfrac{9}{19}$.

2.23. Два одинаковых по силе противника играют матч из 8 партий в теннис. Каждая партия заканчивается выигрышем либо проигрышем одного из участников. Все исходы данного матча считаются равновероятными. Найти вероятность того, что первый игрок выиграет ровно пять партий.

Ответ: $P=\dfrac{7}{32}$.

2.24. В шкафу находится 10 пар ботинок различных сортов. Из них случайно выбираются 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных отсутствуют парные.

Ответ: $P = C_{10}^4 \cdot 2^4 / C_{20}^4 \approx 0{,}6935$.

2.25. В библиотеке имеются книги по экономике, математике, физике, всего по 16 разделам науки. Поступили четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: A = «заказаны книги из различных разделов науки»; B = «заказаны книги из одного и того же раздела науки».

Ответ: $P(A) = C_{16}^4 / C_{19}^4$; $P(B) = C_{16}^1 / C_{19}^4$.

2.26. В кондитерском отделе магазина имеются 9 видов шоколадных конфет. Очередной покупатель выбил чек на 500 г конфет. Найти вероятность того, что покупатель заказал: а) по 100 г конфет различного вида; б) 200 г конфет одного вида и 300 г другого; в) все конфеты одного вида.

Ответ: $n = C_{9+5-1}^5$; а)$P = C_9^5 / C_{13}^5$; б)$P = 2 \cdot C_9^2 / C_{13}^5$; в)$P = 9 / C_{13}^5$.

2.27. 20 футбольных команд, среди которых 4 призера предыдущего первенства, по жеребьевке разбиваются на четыре занумерованные подгруппы по 5 команд. Найти вероятности следующих событий: A = «в первую и вторую подгруппы не попадет ни один из призеров»; B = «в каждую подгруппу попадет один из призеров».

Ответ: $P(A) = \dfrac{14}{323}$; $P(B) = \dfrac{125}{969}$.

2.28. На карточках отдельно написаны буквы: А — на двух карточках; С — на 2; И — на 2; К — на 1; Т — на 3 карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает их одну к другой. Найти вероятность того, что в результате получится слово «статистика».

Ответ: $P = \dfrac{48}{10!}$.

2.29. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются случайным образом в три пакета, но так, чтобы в каждом пакете было одинаковое количество фруктов. Найти вероятности следующих событий: A = «в каждом пакете по одному апельсину»; B = «случайно выбранный пакет не содержит апельсинов».

Ответ: $P(A) = \dfrac{25}{91}$; $P(B) = \dfrac{24}{91}$.

2.30. Из колоды карт (36) случайным образом достают две. Найти вероятности того, что они разной масти.

Ответ: $P = \dfrac{27}{35}$.

2.31. Подбрасывают два игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: A = «сумма выпавших очков равна шести»; B = «сумма выпавших очков не менее четыцрех».

Ответ: $P(A) = \dfrac{5}{36}$; $P(B) = \dfrac{11}{12}$.

3. Геометрические вероятности

Геометрическое определение вероятности может быть использовано в том случае, когда вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой области (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы.

Если геометрическая мера всей области равна S, а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_b, то вероятность события равна $p = \dfrac{S_b}{S}$. Области могут иметь любое число измерений.

Пример 3.1. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше $\dfrac{2}{9}$?

Решение.

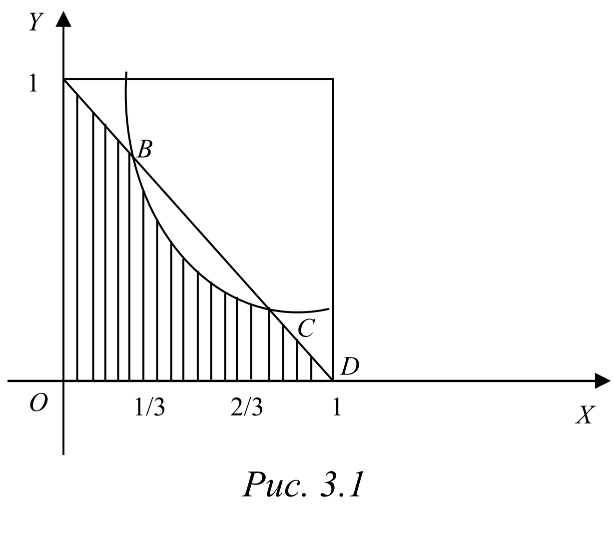

Рис. 3.1

Пусть x и y — взятые числа (см. рис. 3.1). Их возможные значения $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$, что на плоскости соответствует квадрату с площадью $S = 1$. Благоприятствующие значения удовлетворяют условиям $x + y \le 1$ и $xy \le \dfrac{2}{9}$. Граница $x + y =$ $= 1$ делит квадрат пополам, причем область $x + y \le 1$ представляет собой нижний треугольник. Вторая граница $xy = \dfrac{2}{9}$ является гиперболой. Абсциссы точек пересечения этих границ (точек B и C) $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$. Величина благоприятствующей площади $OABCD$ (на рис. 3.1 она заштрихована)

$$S = \int_0^{1/3}(1-x)dx + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x} + \int_{2/3}^{1}(1-x)dx = x\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\ln|x|\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} +$$

$$+ x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{2}{9}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}\right) + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$

Ответ: $P = \frac{3 + 2\ln 2}{9} \approx 0{,}487.$

Пример 3.2. На отрезке AB, длина которого l, наугад ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Найти вероятность того, что из трех получившихся частей можно составить треугольник.

Решение. Обозначим через x, y и $l - x - y$ части отрезка AB. Тогда $0 \le x \le l$; $0 \le y \le l$; $x + y \le l$. На плоскости этой области соответствует треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y \le l$.

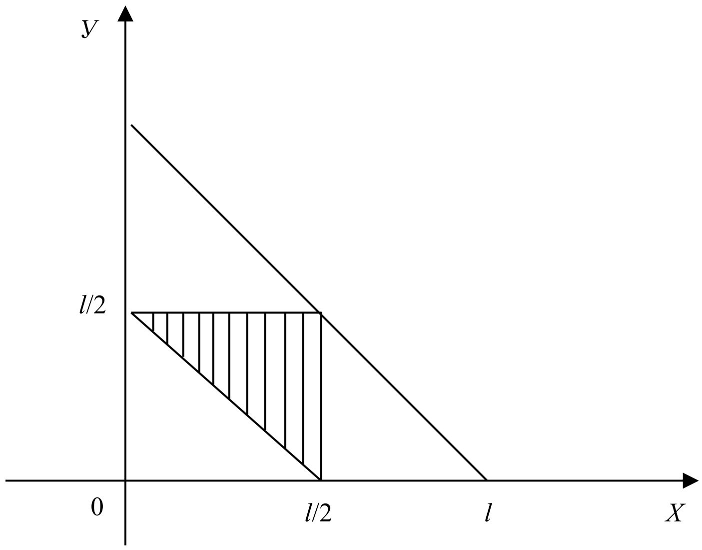

Рис. 3.2

Треугольник из полученных отрезков можно будет составить, если сумма длин двух из них превзойдет третью сторону, т.е.

$$x + y \ge l - x - y \Leftrightarrow x + y \ge \frac{l}{2} \text{ и } x \le \frac{l}{2},\ y \le \frac{l}{2}.$$

Благоприятствующая площадь (см. рис. 3.2 заштрихованный треугольник) равна

$$S_{\text{b}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}.\ S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l = \frac{l^2}{2}.$$

$$P = \frac{S_b}{S} = \frac{l^2}{8} \Big/ \frac{l^2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $P = \dfrac{1}{4}$.

Пример 3.3. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросается монета радиуса $r < \dfrac{a}{2}$. Найти вероятности следующих событий: A = «монета попадет целиком внутрь одного квадрата», B = «монета пересечет не более одной стороны квадрата».

Решение. Пусть $(x,\ y)$ — координаты центра упавшей монеты (рис. 3.3). В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата можно записать множество элементарных исходов в виде $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$. Множество, соответствующее событию A: $x \ge r$, $y \le a - r$, т.е. является квадратом со стороной $a - 2r$.

Следовательно, $S_b = (a - 2r)^2$; $S = a^2$; $P = \dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$.

Множество, соответствующее событию B, изображено на рис. 3.3.

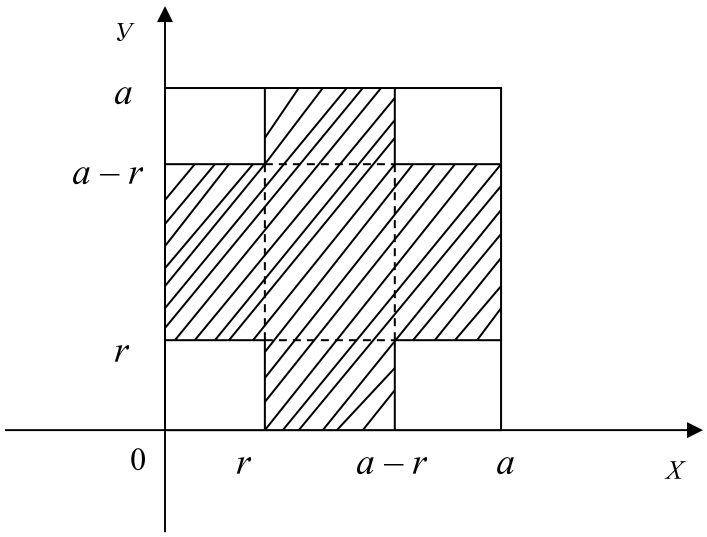

Рис. 3.3

$$S_b = a^2 - 4r^2;\ S = a^2,\ P = \frac{a^2 - 4r^2}{a^2} = 1 - 4\frac{r^2}{a^2}.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$; $P(B) = 1 - 4\dfrac{r^2}{a^2}$.

Пример 3.4. Шар $x^2+y^2+z^2=9$ помещен внутрь эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. Найти вероятность того, что поставленная наудачу внутри эллипсоида точка окажется внутри шара.

Решение. Искомая вероятность будет равна отношению объема шара к объему эллипсоида. Объем шара равен $V_{ш}=\frac{4}{3}\pi R^3$, т.е. $V_{b}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi$. Объем эллипсоида $V_{эл}=\frac{4}{3}\pi abc$, следовательно, $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 5\cdot 4\cdot 3=80\pi$. $P=\frac{V_b}{V}=\frac{36\pi}{80\pi}=\frac{9}{20}$.

Ответ: $P=\frac{9}{20}$.

Пример 3.5. (Задача о встрече). Два человека в течение промежутка времени $[0;T]$ случайным образом приходят к месту встречи и ждут время $t<T$. Какова вероятность, что они встретятся.

Решение. Пусть x — время прихода первого человека, а y — второго. X и y удовлетворяют условиям: $0\le x\le T$, $0\le y\le T$. Поскольку они приходят случайным образом, то все исходы равновозможны и S будет равна площади квадрата со стороной T: $S=T^2$. Событие A = {они встретятся} можно задать так $|y-x|\le t$. Это множество образуют те точки, которые лежат внутри квадрата $0\le x\le T$, $0\le y\le T$ между прямыми $y=x-t$ и $y=x+t$. Поэтому $S_b=T^2-(T-t)^2$. Искомая вероятность $P=\frac{S_b}{S}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

Ответ: $P=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a|\le 1$, $|b|\le 1$. Найти вероятности следующих событий: A = «корни квадратного трехчлена $x^2+2ax+b$ действительны», B = «корни квадратного трехчлена положительны».

Ответ: $P(A)=2/3$; $P(B)=1/12$.

3.2. Из отрезка $[-1;2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

Ответ: $P=\frac{2}{9}\ln 2+\frac{1}{6}$.

3.3. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты красный, затем снова одну минуту — зеленый и полминуты красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

Ответ: $P = \frac{2}{3}$.

3.4. К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии A и через каждые шесть минут — автобус линии B. Интервал времени между моментами прихода автобуса линии A и ближайшего следующего автобуса линии B равновозможен в пределах от нуля до четырех минут. Определить вероятность того, что: а) первый пришедший автобус окажется автобусом линии A; б) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.

Ответ: а) $P = \frac{2}{3}$; б) $P = \frac{2}{3}$.

3.5. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

Ответ: $P = 0{,}121$.

3.6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 мин, после чего уходит. Наблюдаемый результат — пара чисел (x, y), где x — время прихода Петра, y — время прихода Ивана. Определить вероятности следующих событий: A = «встреча состоялась», B = «Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался», C = «Ивану не пришлось ждать Петра», D = = «встреча состоялась после 11 ч 30 мин», E = «Иван опоздал на встречу», F = = «встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут».

Ответ: $P(A) = 0{,}4375$; $P(B) = 0{,}5625$;

$$P(C) = 0{,}2188;\ P(D) = 0{,}25;\ P(E) = 0{,}2813;\ P(F) = 0{,}0417.$$

3.7. Какова вероятность не целясь попасть бесконечномалой пулей в квадратную решетку, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их средними линиями равно l?

Ответ: $P = \frac{a}{l}\left(2 - \frac{a}{l}\right)$.

3.8. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

Ответ: $P = \frac{1}{4}$.

3.9. В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

Ответ: $P = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}134$.

3.10. В шар вписан правильный тетраэдр. Найти вероятность того, что случайно брошенная в шар точка окажется внутри тетраэдра.

Ответ: $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{\text{тет}} = \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$; $P = \frac{V_{\text{тет}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi} \approx 0{,}123$.

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 4.1. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Преподаватель задает три вопроса. Зачет будет сдан, если студент ответит хотя бы на два из трех вопросов. Какова вероятность того, что этот студент сдаст зачет.

Решение. Пусть A_1 — событие, состоящее в том, что студент ответит на два из заданных трех вопросов, A_2 — он ответит на все три вопроса. Тогда, если A — студент сдаст зачет, то $A = A_1 + A_2$. События A_1 и A_2 несовместны. По классическому определению вероятности

$$P(A_1) = \frac{C_{24}^2 C_6^1}{C_{30}^3} = \frac{\dfrac{24!}{2!22!}6}{\dfrac{30!}{3!27!}} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 3}{28 \cdot 29 \cdot 5} = \frac{414}{1015} \approx 0{,}408,$$

$$P(A_2) = \frac{C_{24}^3}{C_{30}^3} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{22 \cdot 23}{7 \cdot 29 \cdot 5} = \frac{506}{1015} \approx 0{,}499.$$

По теореме сложения для несовместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}408 + 0{,}499 = 0{,}907.$$

Ответ: $P = 0{,}907$.

Пример 4.2. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу четыре учебника. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них в переплете.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что по крайней мере два из четырех взятых учебников будут в переплете. Это событие можно представить как сумму трех несовместных событий $A = A_2 + A_3 + A_4$, где A_2 — два учебника в переплете, A_3 — три учебника, A_4 — четыре учебника в переплете. Найдем вероятности этих событий. Число всех возможных исходов этого опыта

$$n = C_{15}^4 = \frac{15!}{4!11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{24} = 13 \cdot 7 \cdot 15 = 1365.$$

Для события A_2 число благоприятных исходов $m(A_2) = C_5^2 \cdot C_{10}^2 = 10 \cdot 45 = 450$, для события $A_3 - m(A_3) = C_5^3 C_{10}^1 = 10 \cdot 10 = 100$, для $A_4 - m(A_4) = C_5^4 = 5$. Следовательно,

$$P(A_2) = \frac{450}{1365} = \frac{30}{91},\ P(A_3) = \frac{100}{1365} = \frac{20}{273},\ P(A_4) = \frac{5}{1365} = \frac{1}{273}.$$

По теореме сложения для несовместных событий

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{30}{91} + \frac{20}{273} + \frac{1}{273} = \frac{90 + 20 + 1}{273} = \frac{111}{273} \approx 0{,}407.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{111}{273} \approx 0{,}407.$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) -$$
$$- P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Определение 1. *Условной вероятностью* события A называется вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло событие B. (Условную вероятность будем рассматривать лишь для таких событий B, вероятность наступления которых отлична от нуля).

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло обозначается символами $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

Определение 2. *Условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B с $P(B) \neq 0$, называется число $P_B(A)$, которое определяется формулой

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Свойства условных вероятностей

1) $P_B(\Omega) = 1$; 2) $P_B(\emptyset) = 0$; 3) $0 \le P_B(A) \le 1$; 4) если $A \subset C$, то $P_B(A) \le P_B(C)$; 5) $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

Определение 3. *Событие A* называется независимым от события B с $P(B) \neq 0$, если $P_B(A) = P(A)$, т.е. вероятность наступления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

В частности для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$, т.е. вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленную в предположении, что все предыдущие события уже наступили

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n).$$

В частности, вероятность совместного наступления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Вычисление вероятности появления хотя бы одного из совместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычислять как разность между единицей и вероятностью произведения противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n).$$

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Пример 4.3. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,06. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,08. Предполагая, что оба события независимы, определить вероятность того, что потребитель увидит: а) обе рекламы; б) хотя бы одну рекламу.

Решение. Пусть A = «потребитель увидит рекламу по телевидению»; B = = «потребитель увидит рекламу на стенде»; C = «потребитель увидит хотя бы одну рекламу». По условию $P(A)$ = 0,06; $P(B)$ = 0,08. События A и B совместные и независимые.

а) Потребитель увидит две рекламы. В наших обозначениях это событие AB, так как эти события независимы, то

$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}06\cdot 0{,}08=0{,}0048.$$

б) Событие C есть сумма событий A и B. Так как эти события совместны, то

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

$$P(C)=0{,}06+0{,}08-0{,}0048=0{,}1352.$$

Эту же вероятность можно найти, используя свойство вероятностей противоположных событий

$$P(C)=P(A+B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B});$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}06=0{,}94;\ P(\overline{B})=1-0{,}08=0{,}92;$$

$$P(C)=1-0{,}94\cdot 0{,}92=1-0{,}8648=0{,}1352.$$

Ответ: а) $P(AB)=0{,}0048$; б) $P(C)=0{,}1352$.

Пример 4.4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

Решение. Обозначим события: A_1 — студент ответит на первый вопрос, A_2 — на второй, A_3 — на третий. То, что студент ответит на все три вопроса — это произведение событий $A_1A_2A_3$. По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос $P(A_1)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, так как всех возможных вопросов 25, а студент знает 20. После того как студент ответит на первый вопрос останется 24 возможных вопроса, а из них тех, которые знает студент, 19, следовательно, $P_{A_1}(A_2)=\frac{19}{24}$. Аналогично рассуждая, получим, что $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{18}{23}$. Искомая вероятность

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{19}{14}\cdot\frac{18}{23}=\frac{19\cdot 3}{5\cdot 23}=\frac{57}{115}\approx 0{,}496.$$

Ответ: $P=0{,}496$.

Пример 4.5. В большой рекламной фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы — женщины, а 6,4 % работников — женщины, получающие высокую заработную плату. Можно ли утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение. Для решения задачи необходимо ответить на вопрос: «Чему равняется вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщиной, имеющей высокую заработную плату?» и сравнить ее с вероятностью того, что наудачу выбранный работник любого пола имеет высокую зарплату.

Пусть A — случайно выбранный работник имеет высокую зарплату; B — случайно выбранный работник — женщина. События A и B — зависимые. По условию $P(AB)$ = 0,064; $P(B)$ = 0,40; $P(A)$ = 0,21. Необходимо найти условную вероятность $P_B(A)$. Из равенства $P(AB) = P(B)P_B(A)$ получим

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}064}{0{,}40} = 0{,}16\,.$$

Поскольку $P_B(A) = 0{,}16$ меньше, чем $P(A)$ = 0,21, то можно заключить, что женщины, работающие в рекламной фирме, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Пример 4.6. Вероятность хотя бы одного правильного ответа при опросе преподавателем четырех студентов равна 0,9984. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент правильно ответит на заданный вопрос.

Решение. Вероятность хотя бы одного правильного ответа при опросе четырех студентов определяется по формуле

$$P = 1 - (1 - p)^4,$$

где p — вероятность правильного ответа для одного наудачу выбранного студента.

По условию P = 0,9984. Решаем уравнение

$$1 - (1 - p)^4 = 0{,}9984 \;\Rightarrow\; (1 - p)^4 = 1 - 0{,}9984 \;\Rightarrow\; (1 - p)^4 = 0{,}0016 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (1 - p)^2 = 0{,}04 \;\Rightarrow\; 1 - p = 0{,}2 \;\Rightarrow\; p = 0{,}8.$$

Ответ: p = 0,8.

Пример 4.7. В театральной кассе к некоторому моменту времени осталось: 1 билет в театр эстрады, 2 билета в драматический театр и 3 билета в театр комедии. Каждый очередной покупатель покупает лишь один билет с равной вероятностью в любой из возможных театров. Два человека из очереди последовательно приобрели билеты. Найти вероятности следующих событий: 1) A = = «куплены билеты в разные театры»; 2) B = «куплены билеты в какой-нибудь один театр»; 3) C = «все билеты в театр эстрады распроданы»; 4) D = «билет в театр комедии куплен раньше, чем в театр эстрады».

Решение. 1. Обозначим A_1 — билет куплен в театр эстрады, A_2 — в драматический театр, A_3 — в театр комедии. Нас интересует вероятность события $A = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 + A_2A_1 + A_3A_2 + A_3A_1$. Для первого покупателя вероятность купить билет в театр эстрады $P(A_1)=\frac{1}{6}$ (так как всех билетов 6, а в театр эстрады только один). После того как первый покупатель приобрел билет в театр эстрады, в кассе осталось 5 билетов и для второго покупателя условные вероятности $P_{A_1}(A_2)$ и $P_{A_1}(A_3)$ будут равны $P_{A_1}(A_2)=\frac{2}{5}$, $P_{A_1}(A_3)=\frac{3}{5}$. Следовательно, по теореме умножения

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{15};\ P(A_1A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}.$$

Если первый покупатель купил билет в драматический театр, то $P(A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, а условные вероятности $P_{A_2}(A_1)=\frac{1}{5}$, $P_{A_2}(A_3)=\frac{3}{5}$ и $P(A_2A_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$, $P(A_2A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$. Наконец, если первый покупатель приобрел билет в театр комедии, то

$$P(A_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P_{A_3}(A_1)=\frac{1}{5},\ P_{A_3}(A_2)=\frac{2}{5}\ \text{и}\ P(A_3A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10},$$

$$P(A_3A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5},$$

$$P(A)=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=2\left(\frac{2+3+6}{30}\right)=\frac{11}{15}\approx 0{,}733.$$

2. $B = A_2A_2 + A_3A_3$,

$$P(B)=P(A_2)P_{A_2}(A_2)+P_{A_3}(A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\approx 0{,}267.$$

3. $P(C)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_1)+P(A_3A_1)=2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$

4. $P(D)=P(A_3A_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$

Ответ: $P(A)=\frac{11}{15}$; $P(B)=\frac{4}{15}$; $P(C)=\frac{1}{3}$; $P(D)=\frac{1}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. В течение года фирмы A, B, C, независимо друг от друга, могут обанкротиться с вероятностями 0,06; 0,09 и 0,05 соответственно. Найти вероятности того, что к концу года: 1) все три фирмы будут функционировать; 2) все три фирмы обанкротятся; 3) только одна фирма обанкротится; 4) только две фирмы обанкротятся; 5) хотя бы одна фирма обанкротится.

Ответ: $P_1 = 0{,}81263$; $P_2 = 0{,}00027$; $P_3 = 0{,}17501$; $P_4 = 0{,}01209$; $P_5 = 0{,}18737$.

4.2. Пусть вероятность того, что в секции магазина по продаже мужской обуви очередной будет продана пара обуви 44-го размера, равна 0,12, 45-го — 0,04, 46-го или большего — 0,01. Найти вероятность того, что очередной будет продана пара мужской обуви не менее 44-го размера.

Ответ: $P = 0{,}17$.

4.3. Студент выучил к зачету 15 вопросов из 20. Ему по одному предлагают три вопроса. Найти вероятность того, что только на третий из них он не дает ответа.

Ответ: $P = \dfrac{35}{228}$.

4.4. Для рабочего из маршрутов трамвая № 1, 2, 4, 7 попутными являются маршруты № 1 и 4. Вычислить вероятность того, что к остановке первым подойдет трамвай маршрута попутного для него номера, если по линиям маршрутов № 1, 2, 4, 7 курсируют соответственно 12, 4, 10, 14 поездов.

Ответ: $P = 0{,}55$.

4.5. Два охотника стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго — 0,8. Определить вероятность попадания в волка, если каждый охотник: 1) делает по одному выстрелу; 2) делает по два выстрела?

Ответ: 1) $P_1 = 0{,}94$; 2) $P_2 = 0{,}9964$.

4.6. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

Ответ: а) $P = 0{,}14$; б) $P = 0{,}995$.

4.7. Для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, вероятность получить контракт в стране *A* равна 0,4, вероятность выиграть его в стране *B* равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране A, и в стране B, равна 0,12. Какова вероятность того, что компания получит контракт: а) хотя бы в одной стране; б) только в одной стране?

Ответ: а) $P = 0{,}58$; б) $P = 0{,}46$.

4.8. Обследовалась группа из 10 000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4 000 из них постоянно курит. У 1 800 человек из курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящих серьезные изменения в легких имели 1 500 человек. Являются ли курение и наличие серьезных изменений в легких независимыми событиями? (Ответ дать, проверив выполнение равенства $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, где событие A – человек курит, событие B – человек имеет серьезные изменения в легких.

Ответ: $P(AB) = 0{,}18$; равенство неверно.

4.9. Вероятности успешной сдачи сессии у студентов Иванова и Петрова равны соответственно 0,95 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

а) оба студент успешно сдадут сессию;

б) Иванов сдаст сессию успешно, а Петров не сдаст;

в) только один из студентов сдаст сессию успешно.

Предполагается, что Иванов и Петров независимо друг от друга готовятся к сессии.

Ответ: а) $P = 0{,}855$; б) $P = 0{,}095$; в) $P = 0{,}14$.

4.10. Покупатель может приобрести акции двух компаний A и B. Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90 %, а второй — 80 %. Чему равна вероятность того, что: а) обе компании в течение года не станут банкротами; б) только одна компания станет банкротом; в) наступит хотя бы одно банкротство?

Ответ: а) $P = 0{,}72$; б) $P = 0{,}26$; в) $P = 0{,}28$.

4.11. В автопробеге участвуют 3 автомобиля. Первый может сойти с маршрута с вероятностью 0,15, второй – с вероятностью 0,05, а третий – с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что к финишу придут: а) только один автомобиль; б) два автомобиля; в) по крайней мере два автомобиля.

Ответ: а) $P = 0{,}02525$; б) $P = 0{,}24725$; в) $P = 0{,}974$.

4.12. О двух акциях A и B известно, что они выпущены одной и той же отраслью. Вероятность того, что акция A поднимется завтра в цене, равна 0,2. Вероятность того, что обе акции A и B поднимутся завтра в цене, равна 0,12. Предположим, что вы знаете, что акция A поднимется в цене завтра. Чему равна вероятность того, что и акция B завтра поднимется в цене?

Ответ: $P = 0{,}6$.

4.13. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 м и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150 м. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 м. Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния, определить вероятность попадания в лося.

Ответ: $P = \dfrac{95}{144}$.

4.14. Из коробки, в которой 8 красных и 12 черных карандашей, трижды наугад извлекают по одному карандашу (без возвращения). Найти вероятность того, что все три раза будут извлечены черные карандаши.

Ответ: $P = \dfrac{11}{57}$.

4.15. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составляют 5 % обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья $\left(A\overline{B}\right)$ — 7,9 %, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья $\left(\overline{A}B\right)$ — 8,9 %, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья $\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$ — 78,2 %. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

Ответ: $P_A(B) \approx 0{,}39$; $P_A\left(\overline{B}\right) \approx 0{,}61$; $P_{\overline{A}}(B) \approx 0{,}102$; $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) \approx 0{,}898$.

4.16. Статистика, собранная среди студентов одного из вузов, обнаружила следующие факты: 60 % всех студентов занимаются спортом, 40 % участвуют в научной работе на кафедрах и 20 % занимаются спортом и участвуют в научной работе на кафедрах. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятности следующих событий: A = «студент занимается по крайней мере одним из двух указанных видов деятельности», B = = «студент занимается только спортом», С = «студент занимается только одним видом деятельности».

Ответ: $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}6$.

4.17. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 — среднее специальное образование, у 357 высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет: а) хотя бы одно из этих образований; б) только одно из этих образований; в) работник имеет только среднее специальное образование.

Ответ: а) $P \approx 0{,}791$; б) $P \approx 0{,}142$; в) $P = 0{,}1$.

4.18. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью p, а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

Ответ: $P = p$.

4.19. (Продолжение.) Все трое членов жюри принимают независимо друг от друга правильное решение с вероятностью p. Каким должно быть p, чтобы данное жюри принимало правильное решение с большей вероятностью, чем жюри из предыдущей задачи?

Ответ: $P > \frac{1}{2}$.

4.20. (Продолжение.) Первые двое судей из жюри принимают решение так же, как в условии задачи 4.13, а третий судья поступает следующим образом: если двое первых судей принимают одинаковые решения, то он к ним присоединяется, если же решения двух первых судей разные, то третий судья бросает монету. Какова вероятность правильного решения у такого жюри?

Ответ: $P = p$.

4.21. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить с вероятностью 1/4 и разделиться на две с вероятностью 1/2. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями могут существовать к концу второго промежутка времени?

Ответ: $P(0) = \frac{11}{32}$; $P(1) = \frac{4}{32}$; $P(2) = \frac{9}{32}$; $P(3) = \frac{4}{32}$; $P(4) = \frac{4}{32}$.

4.22. Радист посылает вызов корреспонденту до тех пор, пока тот его не услышит, но при этом может послать не более трех вызовов. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,2, второй — 0,3, третий — 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что i-й по счету вызов ($i = 1, 2, 3$) услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит радиста.

Ответ: $P = 0{,}664$.

4.23. Игрок A поочередно играет с игроками B и C по две партии. Игра начинается с игрока B. Вероятности выигрыша первой партии для B и C равна 0,1 и 0,2 соответственно; вероятность выигрыша во второй партии для B равна

0,3, для C равна 0,4. Определить вероятность того, что: а) первым выиграет B; б) первым выиграет C.

Ответ: а) $P = 0{,}316$; б) $P = 0{,}3816$.

4.24. Вероятность того, что в трех независимых испытаниях некоторое событие наступит хотя бы один раз, равна 0,784. Найти вероятность появления события в отдельном испытании.

Ответ: $P = 0{,}6$.

4.25. В урне четыре белых и пять красных шаров. Из урны наугад один за другим вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что последний вынутый шар окажется белым.

Ответ: $P = \dfrac{4}{9}$.

5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Определение. Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется *полной группой событий*, если они попарно несовместны и их сумма составляет достоверное событие

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega.$$

Формула полной вероятности. Пусть события H_i, $i = \overline{1,n}$ образуют полную группу событий ($P(H_i) > 0$) и событие A может произойти с одним и только с одним из этих событий. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i).$$

Пример 5.1. Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае — в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,40. Чему равна вероятность заключения контракта для этой фирмы?

Решение. A = «фирма заключит контракт»; H_1 = «конкурент выдвинет свои предложения»; H_2 = «конкурент не выдвинет свои предложения». По условию задачи $P(H_1)=0{,}4$, $P(H_2)=1-0{,}4=0{,}6$. Условные вероятности по заключению контракта для фирмы $P(A/H_1)=0{,}25$, $P(A/H_2)=0{,}45$. По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2),$$

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}25+0{,}6\cdot 0{,}45=0{,}1+0{,}27=0{,}37.$$

Ответ: $P(A)=0{,}37$.

Формула Байеса. Если событие A произошло, то условные вероятности (апостериорные) гипотез H_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ вычисляются по формуле Байеса

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)$ — вероятность события A, вычисленная по формуле полной вероятности.

Пример 5.2. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,15; 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,60, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,30, когда ситуация посредственная, и с вероятностью 0,10, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

Решение. A = «индекс экономического состояния страны возрастет», H_1 = = «экономическая ситуация в стране «хорошая», H_2 = «экономическая ситуация в стране «посредственная», H_3 = «экономическая ситуация в стране «плохая». По условию: $P(H_1)=0{,}15$, $P(H_2)=0{,}70$, $P(H_3)=0{,}15$. Условные вероятности: $P(A/H_1)=0{,}60$, $P(A/H_2)=0{,}30$, $P(A/H_3)=0{,}10$. Требуется найти вероятность $P(H_1/A)$. Находим ее по формуле Байеса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)},$$

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}15\cdot 0{,}6}{0{,}15\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}15\cdot 0{,}1}=\frac{0{,}09}{0{,}09+0{,}21+0{,}015}=\frac{0{,}09}{0{,}315}\approx 0{,}286.$$

Ответ: $P(H_1/A)\approx 0{,}286$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. В магазин для продажи поступают однотипные трикотажные изделия с трех фабрик. С первой фабрики поступило 20 %, со второй – 30 %, с третьей – 50 % всех изделий. Дефект в их продукции составляет соответственно 2 %, 1 %, 3 %. Какова вероятность приобрести качественное изделие?

Ответ: $P = 0{,}022$.

5.2. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает α % брака, второй — β %. Для контроля отобрано n_1 деталей из первого цеха и n_2 из второго. Эти $n_1 + n_2$ деталей смешаны в одну партию, и из нее наугад извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

Ответ: $P = \dfrac{\alpha\, n_1 + \beta\, n_2}{(n_1 + n_2)100}$.

5.3. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении — с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

Ответ: $P = 0{,}815$.

5.4. Из 10 студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают по 20 билетов из 30, Сидоров знает 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. Экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный студент сдаст экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

Ответ: $P \approx 0{,}763$.

5.5. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбираются два мяча, и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

Ответ: $P \approx 0{,}445$.

5.6. На рис. 5.1 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта $П_1$, выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу, причем выбор каждой из дорог равновозможен. Какова вероятность того, что они попадут в пункт $П_2$?

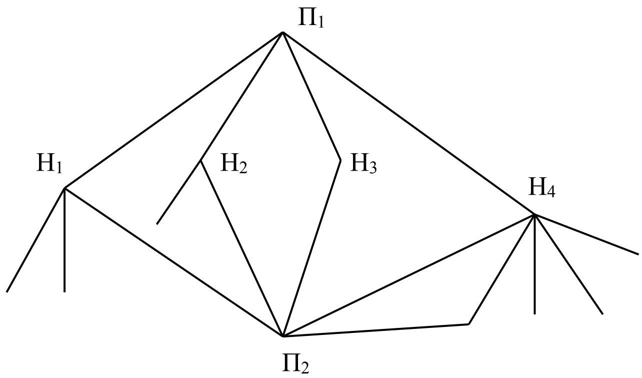

Рис. 5.1

Ответ: $P = \frac{67}{120}$.

5.7. Два станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка вдвое больше производительности второго. Первый станок производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй — 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена: а) первым станком; б) вторым станком.

Ответ: а) $P \approx 0{,}588$; б) $P \approx 0{,}412$.

5.8. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70 % женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина?

Ответ: $P \approx 0{,}308$.

5.9. В данный регион молочная продукция поставляется заводом № 1 и № 2 в соотношении 2 : 3. На заводе № 1 продукция высшего сорта составляет 90 %, на заводе № 2 – 80 %. Взятый наугад продукт оказался высшего сорта. Найти вероятность того, что этот продукт изготовлен на заводе № 1.

Ответ: $P = \frac{3}{7}$.

5.10. Три охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0,8, второй — 0,4, а третий — 0,2. Кабан убит, и в нем обнаружены две пули. Как делить кабана?

Ответ: первый охотник должен получить $\frac{22}{46}$; второй — $\frac{17}{46}$; третий — $\frac{7}{46}$ кабана.

5.11. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 — удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные — 20, подготовленные удовлетворительно — 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез: H_1 = «студент подготовлен отлично», H_2 = «студент подготовлен хорошо», H_3 = «студент подготовлен удовлетворительно», H_4 = «студент подготовлен плохо».

Ответ: $P_1 \approx 0{,}6012; P_2 \approx 0{,}2665; P_3 \approx 0{,}1052; P_4 \approx 0{,}0271$.

5.12. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты, о котором можно высказать четыре предположения (гипотезы) H_1, H_2, H_3 и H_4. По данным статистики $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}4$, $P(H_3) = 0{,}3$, $P(H_4) = 0{,}1$. В ходе расследования обнаружено, что при запуске произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности события A, согласно той же статистике, равны: $P(A/H_1) = 0{,}8$, $P(A/H_2) = 0{,}1$, $P(A/H_3) = 0{,}2$, $P(A/H_4) = 0{,}3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?

Ответ: наиболее вероятна гипотеза H_1, $P(H_1/A) = 0{,}552$.

5.13. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0,3; 0,5; 0,2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,6; для второй – 0,4; для третьей – 0,3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что эта была первая касса.

Ответ: $P \approx 0{,}214$.

5.14. Количество акций, представленных 4 различными предприятиями на наличный рынок, относятся как 5 : 4 : 1 : 10. Вероятности того, что акции будут котироваться по 25 тыс. за штуку для этих предприятий соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Известно, что цена случайно выбранной акции составила 25 тыс. руб. Найти вероятность того, что эта акция представлена вторым предприятием.

Ответ: $P \approx 0{,}176$.

5.15. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен третьим стрелком.

Ответ: $P = 0{,}5$.

5.16. Имеются две урны с шарами. В первой урне два белых и три черных шара, во второй – три белых и пять черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну, в которой нет шаров. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Ответ: $P = 0{,}3875$.

5.17. На сборку попадают детали с 3 станков. Известно, что первый станок дает 0,3 % брака, второй – 0,2 % и третий – 0,4 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 1000 деталей, со второго – 2000 деталей и с третьего – 2500 деталей.

Ответ: $P = 0{,}003$.

5.18. Студент выучил к экзамену 15 билетов из 20. Что для него предпочтительнее – идти сдавать экзамен первым или вторым?

Ответ: Оба события равновероятны $(P = 0{,}75)$.

5.19. В страховой компании 500 начинающих и 2000 опытных водителей. В среднем 10 % начинающих и 2 % опытных водителей в течение года попадают в аварию. Один из водителей попал в аварию. Какова вероятность того, что это был опытный водитель?

Ответ: $P = \dfrac{4}{9}$.

5.20. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

Ответ: $P = \dfrac{43}{60}$.

5.21. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

Ответ: $P = 0{,}0715$.

5.22. В группе спортсменов 20 пловцов, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы для пловца равна 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Наудачу вызванный спортсмен выполнил норму. Найти вероятность того, что он – пловец.

Ответ: $P = \dfrac{30}{43}$.

5.23. Курортная гостиница будет заполнена в июле с вероятностью 0.92, если будет солнечная погода, или с вероятностью 0.72, если будет дождливая погода. По оценкам синоптиков в данной местности в июле бывает 75% солнечных дней. Какова вероятность того, что гостиница будет заполнена?

Ответ: $P = 0{,}87$.

5.24. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный товар, равна 0,67. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит на рынок аналогичный товар в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

Ответ: $P = 0{,}5825$.

5.25. По самолету производится три выстрела независимо друг от друга. Вероятность попадания в самолет при первом выстреле равна 0,5; при втором – 0,6; при третьем – 0,8. Для вывода самолет из строя достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет выйдет из строя.

Ответ: $P \approx 0{,}594$.

6. Повторные независимые испытания (схема Бернулли)

Ряд классических распределений связан с экспериментом, в котором проводятся последовательные независимые испытания и наблюдается результат совместного осуществления тех или иных исходов каждого испытания.

Последовательные испытания называются *независимыми*, если вероятность осуществления любого исхода в n-м по счету испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний.

Простейшим классом повторных независимых испытаний является *последовательность независимых испытаний с двумя исходами* («успех» и «неуспех») и *с неизменными вероятностями «успеха» (р) и «неуспеха»* $(1-p=q)$ *в каждом испытании (схема испытаний Бернулли)*.

Вероятность получить ровно m успехов в n независимых испытаниях вычисляется по формуле, называемой *формулой Бернулли*

$$P_{m,n}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

Пример 6.1. Изделия некоторого производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного испорченного; б) будут два испорченных.

Решение. а) По условию задачи $n=5,\ p=0{,}05$. Так как вероятность наступления события A (появление бракованной детали) постоянна для каждого испытания, то задача подходит под схему Бернулли. Находим вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий нет ни одного испорченного $n=5,\ m=0,\ p=0{,}05$. По формуле Бернулли

$$\text{а) } P_{0;5}=C_5^0\cdot 0{,}05^0\cdot 0{,}95^5=1\cdot 1\cdot 0{,}774=0{,}774;$$

$$\text{б) } n=5,\ m=2,\ p=0{,}05,$$

$$P_{2;5}=C_5^2\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^3=\frac{5\cdot 4}{2}0{,}0025\cdot 0{,}857=0{,}021.$$

Ответ: а) $P_{0;5}=0{,}774$; б) $P_{2;5}=0{,}021$.

Определение. Число наступлений события A называется *наивероятнейшим*, если оно имеет наибольшую вероятность по сравнению с вероятностями наступления события A любое другое количество раз.

Наивероятнейшее число наступлений события A в n испытаниях заключено между числами $np-q$ и $np+p$: $np-q\le m_0\le np+p$. Если $np-q$ — целое число, то наивероятнейших чисел два $np-q$ и $np+p$.

Пример 6.2. В помещении четыре лампы. Вероятность работы в течение года для каждой лампы 0,8. Чему равно наивероятнейшее число ламп, которые будут работать в течение года?

Решение. По формуле $np-q\le m_0\le np+p$ найдем m_0. По условию $n=4,\ p=0{,}8,\ q=1-0{,}8=0{,}2$:

$$4\cdot 0{,}8-0{,}2\le m_0\le 4\cdot 0{,}8+0{,}8\Leftrightarrow 3\le m_0\le 4.$$

Следовательно, имеются два наивероятнейших числа $m_0=3$ или $m_0=4$.

Ответ: $m_0 = 3$ или $m_0 = 4$.

Пример 6.3. Вероятность попадания в кольцо при штрафном броске для баскетболиста равна 0,8. Сколько надо произвести бросков, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

Решение. Известно, что $p = 0{,}8, m_0 = 20$. Тогда $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ и n найдем из системы неравенств

$$\begin{cases} n \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le 20 \\ n \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \ge 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le \dfrac{20{,}2}{0{,}8} \\ n \ge \dfrac{19{,}2}{0{,}8} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 24 \le n \le 25{,}25.$$

Так как n — целое число, то $n = 24$ или $n = 25$.

Ответ: 24 или 25.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

Ответ: $P_{3;8} \approx 0{,}2787$.

6.2. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен) три партии из четырех или пять из восьми?

Ответ: $P_{3;4} > P_{5;8}$.

6.3. В банк поступило 6 заявлений от физических лиц на получение кредита. Вероятность получить кредит для каждого равна $\frac{3}{4}$. Найти вероятности следующих событий:

1) будет выдано ровно 3 кредита;

2) будет выдано не менее двух кредитов.

Ответ: $P_1 \approx 0{,}132$; $P_2 \approx 0{,}995$.

6.4. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

Ответ: $P \approx 0{,}3723$.

6.5. Два баскетболиста делают по три броска в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

Ответ: $P = \sum_{m=0}^{3} \left(C_3^m\right)^2 \cdot 0{,}6^m \cdot 0{,}4^{3-m} \cdot (0{,}7)^m \cdot (0{,}3)^{3-m} \approx 0{,}32076$, где m – число попаданий.

6.6. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

Ответ: $P = \dfrac{80}{243}$.

6.7. Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов в виде теста с тремя возможными ответами на каждый из пяти вопросов, из которых нужно выбрать один правильный. Какова вероятность сдать экзамен методом простого угадывания, если достаточно ответить хотя бы на 4 вопроса?

Ответ: $P = \dfrac{11}{243}$.

6.8. Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятности попадания каждым из охотников одинаковы и равны 0,4. Определить вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0,2, при двух – с вероятностью 0,5 и при трех – с вероятностью 0,8.

Ответ: $P = 0{,}2816$.

6.9. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5 % всех деталей не удовлетворяет стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

Ответ: $n \geq 59$.

6.10. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

Ответ: $m_0 = 4$, $P \approx 0{,}251$.

6.11. Вероятность малому предприятию стать банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти малых предприятий за время t обанкротится менее двух.

Ответ: $P \approx 0{,}737$.

6.12. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле p = 0,2. Сколько нужно провести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в десятку хотя бы один раз?

Ответ: $n \geq \dfrac{1}{1-3\lg 2}$.

6.13. Какое наименьшее количество чисел необходимо взять из чисел от 1 до 100, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечивалось появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

Ответ: $n = 29$.

6.14. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30.

Ответ: $100 \leq n \leq 102$.

6.15. Доля крупных заказов в строительной фирме составляет 40%. Чему равно наивероятнейшее число крупных заказов, если фирма предполагает заключить 120 договоров на следующий год?

Ответ: $m_0 = 48$.

6.16. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов.

Ответ: $m_0 = 7$.

6.17. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

Ответ: $0{,}6 \leq p \leq 0{,}62$.

6.18. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

Ответ: $0{,}625 \leq p \leq 0{,}650$.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Теорема 1 (Пуассона). Предположим, что произведение np является постоянной величиной, когда n неограниченно возрастает. Обозначим $\lambda = np.$ Тогда для любого фиксированного m и любого постоянного λ:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ np=\lambda}} P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m\,!}\,e^{-\lambda}\,.$$

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$) вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m\,!}\ \text{, где } \lambda = np.$$

Пример 6.4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. Для определения вероятности $P_{5;1000}$ применим приближенную формулу Пуассона

$$\lambda = np = 0{,}004\cdot 1000 = 4\,;\ P_{5;1000} \approx \frac{4^5\cdot e^{-4}}{5!} \approx 0{,}1563.$$

Значение функции Пуассона найдено по прил. 3 для $m = 5$ и $\lambda = 4$.

Ответ: $P_{5;1000} \approx 0{,}1563.$

Теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 2 (Муавра-Лапласа (локальная)). Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (чем больше n, тем точнее) значению функции

$$P_{m;n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,f(u),$$

где $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, $u = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Таблица значений функции $f(x)$ приведена в прил. 1.

Пример 6.5. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 75?

Решение. По условию задачи $p=\frac{1}{4}, m=75, n=300$, $q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Находим $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-300\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{300\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}=0$. По таблице находим $\varphi(x)=0{,}3989$.

$$P_{75;300}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{0{,}3989}{\sqrt{\frac{900}{16}}}=\frac{4\cdot 0{,}3989}{30}\approx 0{,}053.$$

Ответ: $P_{75;300}\approx 0{,}053$.

Теорема 3 (Муавра-Лапласа (интегральная)). Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в n испытаниях число успехов m находится между m_1 и m_2, приближенно равна (чем больше n, тем точнее)

$$P(m_1\le m\le m_2)\approx\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

где $p-$ вероятность появления успеха в каждом испытании, $q=1-p$, $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$, значения $\Phi(x)$ приведены в прил. 2.

Пример 6.6. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью $\frac{1}{4}$. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600.

Решение. По условию $n=768, p=0{,}75, m_1=564, m_2=600.$ По интегральной теореме Лапласа

$$P(564\le m\le 600)\approx\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{600-768\cdot 0{,}75}{\sqrt{768\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\right)-\Phi\left(\frac{564-768\cdot 0{,}75}{\sqrt{768\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{600-576}{12}\right)-\Phi\left(\frac{564-576}{12}\right)\right)=\frac{1}{2}(\Phi(2)+\Phi(1))\approx\frac{1}{2}(0{,}9545+0{,}6827)=0{,}8186.$$

Ответ: $P_{768}(564\le m\le 600)\approx 0{,}8186.$

Пример 6.7. Город ежедневно посещает 1000 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно быть для этого в его ресторане?

Решение. Пусть A = «турист пообедал у заинтересованного владельца». Наступление события A будем считать «успехом», $p = P(A) = 0{,}5$, $n = 1000$. Нас интересует такое наименьшее число k, что вероятность наступления не менее чем k «успехов» в последовательности из $n = 1000$ независимых испытаний с вероятностью успеха p = 0,5 приблизительно равна 1 – 0,99 = 0,01. Это как раз вероятность переполнения ресторана. Таким образом, нас интересует такое наименьшее число k, что $P_{1000} = (k, 1000) \approx 0{,}01$. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа

$$P_{1000}(k \le m \le 1000) \approx 0{,}01 \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{1000-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{100}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\right).$$

Откуда следует, что

$$\Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}98.$$

Используя таблицу для $\Phi(x)$ (прил. 2), находим $\dfrac{k-500}{5\sqrt{10}} \approx 2{,}33$, значит $k = 2{,}33 \cdot 5\sqrt{10} + 500 \approx 536{,}8$. Следовательно, в ресторане должно быть 537 мест.

Ответ: 537 мест.

Из интегральной теоремы Лапласа можно получить формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 6.8. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. По условию $n = 625,\ p = 0{,}8,\ q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,\ \varepsilon = 0{,}04.$

Требуется найти вероятность $P\left(\left|\dfrac{m}{625} - 0{,}8\right| < 0{,}04\right)$. Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right)\approx\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=\Phi(2{,}5)=0{,}9876.$$

Ответ: $P = 0{,}9876$.

Пример 6.9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Решение. По условию $p=0{,}5,\ q=0{,}5,\ \varepsilon=0{,}02;\ P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le 0{,}02\right)=0{,}7698.$

Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Следовательно,

$$\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698\quad\Rightarrow\quad 0{,}04\sqrt{n}=1{,}2\quad\Rightarrow\quad\sqrt{n}=30\Rightarrow\quad n=900.$$

Ответ: $n=900$.

Задачи для самостоятельного решения

6.19. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Ответ: $P\approx 0{,}0916$.

6.20. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

Ответ: $P\approx 0{,}2385$.

6.21. Радиоаппаратура состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года равна 0,001. Какова вероятность отказа двух элементов за год? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

Ответ: $P_1\approx 0{,}2707$; $P_2\approx 0{,}594$.

6.22. Завод отправил в магазин 5000 лампочек. Вероятность того, что лампочка разобъется при транспортировке равна 0,0002. Найти вероятность того, что в магазин привезли не более трех разбитых лампочек.

Ответ: $P \approx 0{,}951$.

6.23. Среди семян пшеницы 0,6 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков?

Ответ: а) 0,93803; б) 0,9998; в) 0,16062.

6.24. Вероятность изготовления стандартной детали на автомате равна 0,95. Изготовлена партия в 200 деталей. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии. Найти вероятность этого количества нестандартных деталей.

Ответ: $P \approx 0{,}13$.

6.25. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожтдать появление события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,8.

Ответ: $m = 85$.

6.26. На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в данный день равна $1/365$. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

Ответ: $P \approx 0{,}18$.

6.27. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Ответ: $P \approx 0{,}04565$.

6.28. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков?

Ответ: $P \approx 0{,}0782$.

6.29. Известно, что в среднем 70% продукции завода является продукцией первого сорта. Какова вероятность того, что в партии из 200 изделий имеется 120 изделий первого сорта?

Ответ: $P \approx 0{,}000031$.

6.30. Для поступления в колледж необходимо успешно сдать вступительные экзамены. В среднем их успешно сдают 65% абитуриентов. В приемную комиссию поступило 700 заявлений. Какова вероятность того, что хотя бы 500 поступят в колледж?

Ответ: $P \approx 0{,}0002$.

6.31. При установившемся технологическом процессе цех выпускает в среднем 80 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что в партии из 125 изделий будет не менее 100 изделий первого сорта?

Ответ: $P \approx 0{,}5$.

6.32. В страховом обществе застраховано 10 000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января 12 у.е. страховых, и в случае смерти его родственники получают от общества 1000 у.е. Найти вероятность того, что: а) общество потерпит убыток; б) общество получит прибыль, не меньшую 40 000, 60 000, 80 000 у.е.

Ответ: а) 0; б) 0,9952; 0,5; 0,0048.

6.33. Вероятность рождения мальчика p = 0,512. Вычислить вероятность событий: A = «среди 100 рожденных будет больше мальчиков, чем девочек», B= = «разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не превысит 10».

Ответ: $P(A) \approx 0{,}5160$; $P(B) = 0{,}6689$.

6.34. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) не менее 20; б) не более 28; в) от 14 до 26 конденсаторов.

Ответ: а) $P \approx 0{,}5$; á) $P = 0{,}97725$; â) $P = 0{,}86639$.

6.35. При социологических опросах граждан каждый человек независимо от других может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 22 500 опросов число неискренних ответов будет не более 4620.

Ответ: $P \approx 0{,}9773$.

6.36. В банк поступило 1000 стодолларовых купюр. Какова вероятность того, что среди них окажется 5 фальшивых купюр, если известно, что на рынке $0{,}1\%$ купюр фальшивых?

Ответ: $P = 0{,}0031$.

6.37. Сколько семян надо отобрать для определения процента всхожести, чтобы с вероятностью 0,977 можно было утверждать, что отклонение частости доброкачественных семян от их доли, равной 0,9, не превышало по абсолютной величине 0,02?

Ответ: $n = 1170$.

6.38. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

Ответ: $792 \le m \le 828$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

7. Дискретная случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Обозначают случайные величины буквами X, Y, Z,…, а их возможные значения – x, y, z,….

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть как конечным, так и бесконечным, но счетным.

Дискретная случайная величина может быть задана *рядом (законом) распределения* – это соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $p_i = P(X = x_i)$, $i = \overline{1,n}$.

События $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу событий. Следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n = 1.$$

Ряд распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде полигона или многоугольника распределения вероятностей. Для этого по горизонтальной оси в выбранном масштабе нужно отложить значения случайной величины, а по вертикальной – вероятности этих значений.

Тогда точки с координатами (x_i, p_i) будут изображать полигон распределения вероятностей. Соединив эти точки отрезками прямой, получим *многоугольник распределения вероятностей.*

Пример 7.1. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

X	–2	–1	0	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Построить полигон и многоугольник распределения вероятностей.

Решение. На оси OX откладываем значения x_i, равные –2, –1, 0, 2, 4, а по вертикальной оси OY - вероятности этих значений (рис. 7.1):

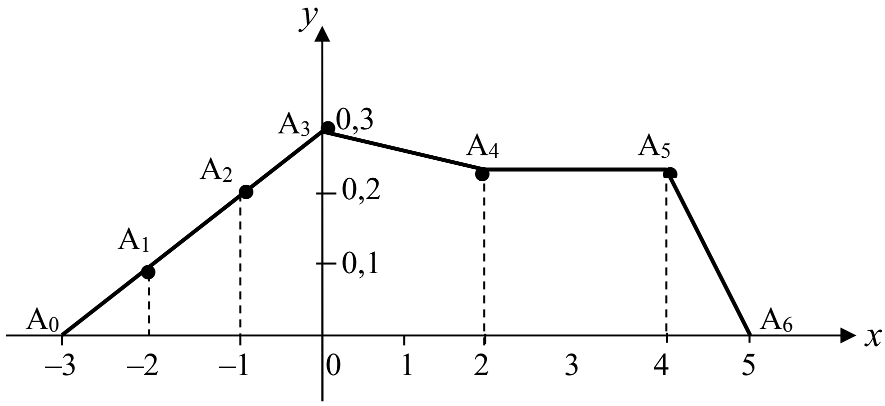

Рис. 7.1

Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 изображают полигон распределения, а ломаная $A_0\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$ – многоугольник распределения вероятностей.

Дискретная случайная величина может быть задана функцией распределения вероятностей. *Функцией распределения вероятностей* случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию $F(x)$ также называют *интегральной* функцией распределения.

Если значения случайной величины – точки на числовой оси, то геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная величина X попадает левее заданной точки x (рис. 7.2):

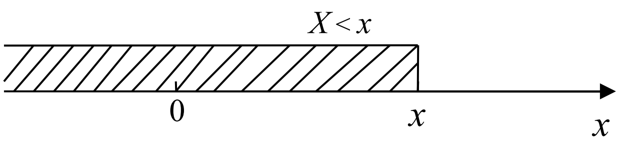

Рис. 7.2

Функция $F(x)$ обладает свойствами:

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Утверждение следует из того, что функция распределения – это вероятность.

2. Функция распределения есть неубывающая функция на всей числовой оси.

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна 1, т.е.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \; F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ (включая x_1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание *M*(*X*) дискретной случайной величины

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда *математическое ожидание* $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Дисперсия случайной величины

Только математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсия – это мера рассеяния случайной величины около ее математического ожидания.

Если X – дискретная случайная величина, то дисперсию вычисляют по следующим формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i ,$$

где $a = M(X)$;

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии случайной величины

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Среднее квадратическое отклонение характеризует степень отклонения случайной величины от ее математического ожидания и имеет размерность значений случайной величины.

Модой дискретной случайной величины X, обозначаемой $M_0(X)$, называется ее наиболее вероятное значение: $M_0(X) = \max P(X = x_i)$.

Медианой дискретной случайной величины X называется такое ее значение $M_e(X)$, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше $M_e(X)$, т.е. $P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X))$.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой величины:

$$v_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

Рассмотрим некоторые распределения дискретной случайной величины.

Биномиальный закон распределения

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p, то число появлений события A – дискретная случайная величина X, принимающая значения 0, 1, 2, …, $m, \ldots, n$ с вероятностями $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ (формула Бернулли), где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X) = np,$$

$$D(X) = npq.$$

Распределение Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность появления события *p* в каждом испытании очень мала, то вместо формулы Бернулли пользуются приближенной формулой Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где m – число появлений события в *n* независимых испытаниях; *m* принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$. $\lambda = np$ (среднее число появлений события в *n* испытаниях).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ, который определяет этот закон, т.е.

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина $X = m$ имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 1, 2, …, *m*, …(бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P = (X = m) = pq^{m-1},$$

где $0 < p < 1, q = 1 - p, m = 1, 2, \ldots$.

Определение геометрического распределения корректно, так как сумма вероятностей $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1} = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

Случайная величина $X = m$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей геометрическое распределение с параметром p вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2},$$

где $q = 1 - p$.

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется N элементов, из которых M элементов обладают некоторым признаком A. Случайным образом без возвращения извлекаются n элементов из N. Пусть X – дискретная случайная величина, элементы которой обладают признаком A. Вероятность того, что $X = m$ определяется по формуле

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

$$M(X) = n\frac{M}{N},$$

$$D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

Пример 7.2. В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти числовые характеристики этого распределения.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Возможные значения, которые может принять случайная величина X: 0, 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения необходимо рассчитать соответствующие вероятности. Обозначим через событие A_1 – первый вуз прошел аккредитацию, A_2 – второй, A_3 – третий, A_4 – четвертый. Тогда $P(A_1) = 0{,}5$; $P(A_2) = 0{,}4$; $P(A_3) = 0{,}3$; $P(A_4) = 0{,}2$. Вероятности для вузов не пройти аккредитацию соответственно равны $P(\overline{A_1})=1-0{,}5=0{,}5$; $P(\overline{A_2})=1-0{,}4=0{,}6$; $P(\overline{A_3})=$ $=1-0{,}3=0{,}7$; $P(\overline{A_4})=1-0{,}2=0{,}8$.

Тогда:

$$P(X=0)=P(A_1A_2A_3A_4)=0{,}012.$$

$$P(X=1)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=0{,}106.$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4})+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)+$$
$$+P(A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)=0{,}320.$$

$$P(X=3)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)=0{,}394.$$

$$P(X=4)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=0{,}168.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,012	0,106	0,320	0,394	0,168

Проверка: 0,012 + 0,106 + 0,32 + 0,394 + 0,168 = 1.

Вычислим

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=0\cdot 0{,}012+1\cdot 0{,}106+2\cdot 0{,}320+3\cdot 0{,}394+4\cdot 0{,}168=2{,}6.$$

Вычислим $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$:

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}p_i=0\cdot 0{,}012+1\cdot 0{,}106+4\cdot 0{,}32+9\cdot 0{,}394+16\cdot 0{,}168=7{,}62,$$

$$(M(X))^2=2{,}6^2=6{,}76.\ D(X)=7{,}62-6{,}76=0{,}86.$$

Пример 7.3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые последовательно посетит студент, чтобы взять необходимую книгу, если в городе 3 библиотеки.

Решение. В качестве случайной величины *X* выступает число библиотек, которые посетит студент, чтобы получить необходимую книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина *X*: 1, 2, 3.

Обозначим через событие A_1 – книга свободна в первой библиотеке, A_2 – во второй, A_3 – в третьей. Тогда $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}3$. Вероятность противоположного события, что книга занята $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = $ $= 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

$$P(X = 1) = P(A_1) = 0{,}3,$$

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21,$$

$$P(X = 3) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}147 + 0{,}343 = 0{,}49.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы.

X	1	2	3
P	0,3	0,21	0,49

Проверка: 0,3 + 0,21 + 0,49 = 1.

Пример 7.4. Из поступающих в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число просмотренных часов. Возможные значения, которые примет случайная величина X: 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Для расчета вероятностей будем использовать формулу классической вероятности и теорему умножения для зависимых событий.

Пусть событие A_1 – первые взятые наугад часы нуждаются в чистке, A_2 – вторые, A_3 – третьи, A_4 – четвертые. Тогда:

$$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{7}{10},$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{120},$$

$$P(X=4)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{120}.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

Проверим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$:

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{30}+\frac{7}{120}+\frac{1}{120}=\frac{84+28+7+1}{120}=\frac{120}{120}=1.$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=1\cdot\frac{7}{10}+2\cdot\frac{7}{30}+3\cdot\frac{7}{120}+4\cdot\frac{1}{120}=\frac{33}{24}=\frac{11}{8}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Так как $M\left(X^2\right)=1\cdot\frac{7}{10}+4\cdot\frac{7}{30}+9\cdot\frac{7}{120}+16\cdot\frac{1}{120}=\frac{55}{24}$, то

$$D(X)=\frac{55}{24}-\left(\frac{33}{24}\right)^2=\frac{55}{24}-\frac{1089}{576}=\frac{231}{576}=\frac{77}{192}.$$

Пример 7.5. Известно, что в определенном городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения. Написать функцию распределения и построить ее график.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число людей, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина X: 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей добирается на работу личным автотранспортом, постоянна и равна $p = 0{,}2$. Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Все 4 испытания независимы. Случайная величина $X = m$ подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами $n = 4$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096,$$

$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{4-1} = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}4096,$$

$$P(X = 2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{4-2} = 6 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}1536,$$

$$P(X = 3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{4-3} = 4 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0256,$$

$$P(X = 4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{4-4} = 1 \cdot 0{,}2^4 \cdot 1 = 0{,}0016.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}4096 + 1 \cdot 0{,}4096 + 2 \cdot 0{,}1536 + 3 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}0016 = 0{,}8.$$

Так как случайная величина подчиняется биноминальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8.$$

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формуле $D(X) =$ $= M\left(X^2\right) - (M(X))^2$:

$$\left(M(X)\right)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64,$$

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i = 0 \cdot 0{,}4096 + 1 \cdot 0{,}4096 + 4 \cdot 0{,}1536 + 9 \cdot 0{,}0256 + 16 \cdot 0{,}0016 = 1{,}28,$$

$$D(X) = 1{,}28 - 0{,}64 = 0{,}64.$$

В данном случае дисперсию можно рассчитать по формуле

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64.$$

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$$

Найдем функцию распределения *F(x)* случайной величины X:

1. $x \le 0, \quad F(x) = 0.$
2. $0 < x \le 1, \quad F(x) = 0{,}4096.$
3. $1 < x \le 2, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192.$
4. $2 < x \le 3, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728.$
5. $3 < x \le 4, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}9984.$
6. $x > 4, \quad F(x) = 1.$

Запишем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}4096, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}8192, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}9728, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}9984, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения вероятностей имеет ступенчатый вид (рис. 7.3). Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения.

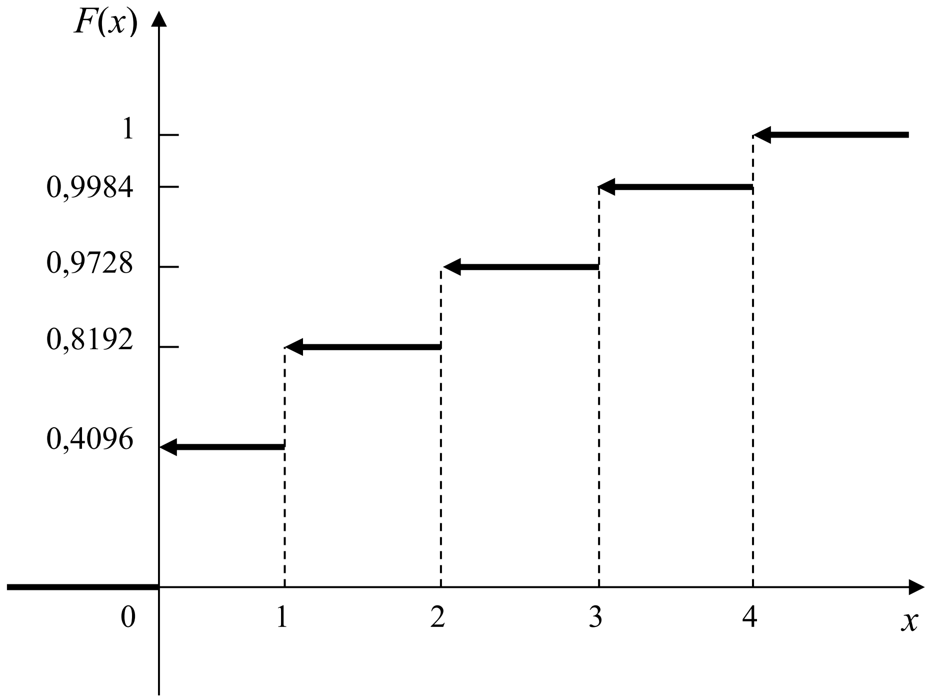

Рис. 7.3

Пример 7.6. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число кредитов, возвращенных клиентами в срок. Возможные значения, которые может принять случайная величина X: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятность того, что каждый клиент возвратит кредит в срок, постоянна и равна $p = 0{,}9$. Вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок, равна $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Случайная величина $X = m$ подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n = 5$; $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^5 = 0{,}1^5 = 0{,}00001,$$

$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^4 = 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}00045,$$

$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^3=10\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^3=0{,}0081,$$

$$P(X=3)=P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^2=10\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^2=0{,}0729,$$

$$P(X=4)=P_5(4)=C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^1=5\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1=0{,}32805,$$

$$P(X=5)=P_5(5)=C_5^5\cdot 0{,}9^5\cdot 0{,}1^0=0{,}9^5=0{,}59049.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Математическое ожидание вычислим по формуле

$$M(X)=np=5\cdot 0{,}9=4{,}5.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X)=npq=5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}45.$$

Пример 7.7. Из 10 телевизоров на выставке оказались 4 телевизора фирмы «Сони». Наудачу для просмотра выбраны 3 телевизора. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число телевизоров фирмы «Сони». Возможные значения, которые может принять случайная величина X: 0, 1, 2, 3. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Эти вероятности можно рассчитать по формуле классической вероятности $p=\dfrac{m}{n}$:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6};\quad P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2};\quad P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

Запишем закон распределения

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{5+15+9+1}{30} = \frac{30}{30} = 1$.

Пример 7.8. На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Дан закон распределения числа бракованных изделий *X*, произведенных в течение смены на первом станке и закон распределения числа бракованных изделий *Y*, произведенных в течение смены на втором станке:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,6	0,2	0,1

Y	y_j	0	1	2
P	p_j	0,5	0,3	0,2

Составить закон распределения числа произведенных в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

Решение. Для того чтобы составить закон распределения *X* + *Y* необходимо складывать $x_i + y_j$, а соответствующие им вероятности перемножить $p_i p_j$:

$x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0$; $p_0 = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$,

$x_1 + y_2 = 0 + 1 = 1$; $p_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}33$,

$x_1 + y_3 = 0 + 2 = 2$; $p_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$,

$x_2 + y_1 = 1 + 0 = 1$; $p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}23$,

$x_2 + y_2 = 1 + 1 = 2$; $p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}07$,

$x_2 + y_3 = 1 + 2 = 3$; $p_5 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$,

$x_3 + y_1 = 2 + 0 = 2$,

$x_3 + y_2 = 2 + 1 = 3$,

$x_3 + y_3 = 2 + 2 = 4$,

$x_4 + y_1 = 3 + 0 = 3$,

$x_4 + y_2 = 3 + 1 = 4$,

$x_4 + y_3 = 3 + 2 = 5$.

Закон распределения запишем в виде таблицы

$X+Y$	0	1	2	3	4	5
P	0,05	0,33	0,3	0,23	0,07	0,02

Проверим свойство математического ожидания $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 = 1{,}3,$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j p_j = 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7,$$

$$M(X+Y)=0\cdot 0{,}05 + 1\cdot 0{,}33 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}23 + 4\cdot 0{,}07 + 5\cdot 0{,}02 = 2,$$

$$M(X)+M(Y)=1{,}3+0{,}7=2.$$

Пример 7.9. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения случайной величины X, если математическое ожидание $M(X)=1{,}4$; $D(X)=0{,}24$.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице. Поэтому вероятность того, что X примет значение x_2 равна $1-0{,}6=0{,}4$. Напишем закон распределения X

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для того чтобы найти значения x_1 и x_2 необходимо составить два уравнения. Из условия задачи следует, что $M(X)=0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4$, $D(X)=0{,}6{x_1}^2+0{,}4{x_2}^2- \ -1{,}4^2=0{,}24$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4, \\ 0{,}6{x_1}^2+0{,}4{x_2}^2=2{,}2. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1=1$; $x_2=2$ и $x_1=1{,}8$; $x_2=0{,}8$.

По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение, т.е. $x_1=1$; $x_2=2$. Тогда закон распределения имеет вид

X	1	2
P	0,6	0,4

Пример 7.10. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$, если известно, что $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

Решение. Так как имеют место свойства дисперсии

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) \text{ и } D(CX) = C^2 D(X), \text{ то}$$

$$D(Z) = D(2X) + D(3Y) = 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 16 + 45 = 61.$$

Пример 7.11. Дискретная СВ задана законом распределения

X	1	3	5	10
P	0,25	0,5	0,125	0,125

Вычислить начальный момент 1-го порядка и центральный момент 2-го порядка.

Решение. Начальный момент 1-го порядка

$$\nu_1 = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,125 + 10 \cdot 0,125 = 3,625.$$

Центральный момент 2-го порядка вычислим по формуле

$$\mu_2 = D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)^2\right).$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,125 + 100 \cdot 0,125 = 20,375.$$

$$\mu_2 = 20,375 - 3,625^2 \approx 7,23.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу 4 приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Составить функцию распределения случайной величины и построить ее график.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$M(X)=1{,}2$; $D(X)=0{,}56$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in(-\infty;0], \\ \frac{1}{6} & \text{при } x\in(0;1], \\ \frac{2}{3} & \text{при } x\in(1;2], \\ \frac{29}{30} & \text{при } x\in(2;3], \\ 1 & \text{при } x\in(3;+\infty). \end{cases}$$

7.2. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из 4 наудачу взятых телевизоров. Найти функцию распределения и построить ее график.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in(-\infty;0], \\ \frac{1}{14} & \text{при } x\in(0;1], \\ \frac{1}{2} & \text{при } x\in(1;2], \\ \frac{13}{14} & \text{при } x\in(2;3], \\ 1 & \text{при } x\in(3;+\infty). \end{cases}$$

7.3. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения случайной величины X - числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

$$M(X) = 2{,}4;$$

$$D(X) = 0{,}46.$$

7.4. Поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа приходов на экзамен для лица, поступающего в институт. Найти математическое ожидание случайной величины.

Ответ:

X	1	2	3
P	0,1	0,18	0,72

$$M(X) = 2{,}62.$$

7.5. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10 %. Составить закон распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение года и найти числовые характеристики этого распределения.

Ответ:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

$$M(X) = 0{,}4;$$

$$D(X) = 0{,}36;$$

$$\sigma(X) = 0{,}6.$$

7.6. Вероятность поражения земляники вирусным заболеванием равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Ответ:

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

$$M(X) = 0{,}8;$$

$$D(X) = 0{,}64.$$

7.7. В урне находятся шары весом 3, 4 и 5 кг с соответствующими вероятностями 0,2; 0,3; 0,5. Извлекаются два шара с последующим возвращением обратно. Составить закон распределения суммарного веса двух извлеченных шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Ответ:

X	6	7	8	9	10
P	0,04	0,12	0,29	0,30	0,25

$$M(X) = 8{,}6;$$

$$D(X) = 1{,}22.$$

7.8. Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в 2 раза. Случайная величина X – число попаданий в цель при трех выстрелах. Составить закон распределения случайной величины X.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,096	0,472	0,368	0,064

7.9. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,06	0,29	0,44	0,21

$$M(X) = 1{,}8;$$

$$D(X) = 0{,}7.$$

7.10. В лотерее разыгрывается один автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., четыре телевизора – стоимостью 250 ден. ед. каждый, пять магнитофонов – стоимостью 200 ден. ед. каждый. Продано 1000 билетов стоимостью 7 ден. ед. каждый. Составить закон распределения случайной величины X – чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Ответ:

X	– 7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

7.11. В карточной игре игрок, который извлекает из колоды карт (52 карты) валет или даму, выигрывает 15 очков; тот, кто вытащит короля или туза, выигрывает 5 очков. Игрок, который достанет любую другую карту, проигрывает 4 очка. Если вы решили участвовать в этой игре, определите сумму очков ожидаемого выигрыша.

Ответ:

X	15	5	– 4
P	$\frac{8}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{36}{52}$

$M(X) \approx 0{,}3077$.

7.12. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}1$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X) = 3{,}9$ и дисперсия $D(X) = 0{,}09$. Найти закон распределения этой случайной величины.

Ответ:

X	3	4
P	0,1	0,9

7.13. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,5. Пусть случайная величина X – число попаданий в мишень первым стрелком, случайная величина Y– число попаданий в мишень вторым стрелком. Найти закон распределения случайной величины $Z = X - Y$ и найти $M(Z)$, $D(Z)$.

Ответ: $M(Z) = –0{,}2$; $D(Z) = 0{,}98$.

7.14. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих открываниях замка не участвует. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Ответ: $M(X) = \frac{7}{2}$; $D(X) = \frac{35}{12}$.

7.15. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2 : 3. Продано четыре пары обуви. Построить закон распределения числа проданных пар обуви, изготовленных первой фабрикой. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Ответ: $M(X) = 1{,}6$; $D(X) = 0{,}96$; $\sigma(X) = 0{,}9799$.

7.16. В партии из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить вынимают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое изделие проверяют. Построить закон распределения и найти математическое ожидание числа проверенных изделий.

Ответ: $M(X) = 5{,}5$.

7.17. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти $M(X)$ и $D(X)$ случайной величины, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Ответ: $M(X) = 10$; $D(X) = 90$.

7.18. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

Найти $M(X+Y)$, $M(X \cdot Y)$ и проверить, что $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$, $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Ответ: $M(X+Y) = 11{,}8$; $M(X \cdot Y) = 32{,}56$.

7.19. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	0	1	2	3
P	p_1	0,2	p_3	0,5

Найти вероятность $p_1 = P(X = 0)$, если известно, что p_1 в 2 раза больше, чем вероятность $p_3 = P(X = 2)$.

Ответ: $p_1 = 0{,}2$.

7.20. Найти дисперсию случайной величины $Y = 2X + 3$, если известно, что $D(X) = 3$.

Ответ: $D(Y) = 12$.

7.21. Найти дисперсию случайной величины $Y = -3X - 4$, если известно, что $D(X) = 4$.

Ответ: $D(Y) = 36$.

7.22. Даны две независимые случайные величины X и Y, дисперсии которых равны $D(X) = 7$, $D(Y) = 3$. Найти дисперсию $D(X + 2Y)$.

Ответ: $D(X + 2Y) = 19$.

7.23. Даны две независимые случайные величины X и Y, дисперсии которых равны $D(X) = 3$, $D(Y) = 4$. Найти дисперсию $D(3X - 2Y)$.

Ответ: $D(3X - 2Y) = 43$.

7.24. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y.

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	0	2	3
P	0,1	0,2	0,7

Найти вероятность того, что случайная величина $X + Y$ примет значение, равное 4.

Ответ: $P = 0{,}5$.

7.25. Даны все возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ и $M(X) = 3{,}2$. Найти $P(X = x_1)$.

Ответ: $P(X = x_1) = 0{,}4$.

7.26. Даны все возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $M(X) = 2{,}3$. Найти $P(X = x_1)$.

Ответ: $P(X = x_1) = 0{,}7$.

7.27. Случайную величину умножили на постоянный множитель k. Как изменится среднее квадратическое отклонение?

Ответ: Увеличится в $|k|$ раз.

7.28. Случайная величина X задана законом распределения

X	– 2	1	3
P	0,1	0,7	0,2

Вычислить начальный момент 1-го порядка и центральный момент 2-го порядка.

Ответ: $\nu_1 = 1{,}1$; $\mu_2 = 1{,}69$.

7.29. Вычислить центральный момент 2-го порядка случайной величины, заданной законом распределения

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

Ответ: $\mu_2 = 248{,}95$.

7.30. Проводится 4 независимые испытания прибора. Вероятность того, что прибор выдержит испытание в каждом проводимом испытании равна 0,4. Вычислить начальный момент 1-го порядка и центральный момент 2-го порядка случайной величины X – числа испытаний, в которых прибор выдержал испытание.

Ответ: $\nu_1 = 1{,}6$; $\mu_2 = 0{,}96$.

8. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Напомним, что *функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

Функцию $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения,* или *интегральным законом распределения*.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Примеры непрерывных случайных величин: диаметр детали, которую токарь обтачивает до заданного размера, рост человека, дальность полета снаряда и др.

Теорема. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю

$$P(X = x_1) = 0\,.$$

Следствие. Если X — непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т.е.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2).$$

Если непрерывная случайная величина X может принимать только значения в границах от a до b (где a и b — некоторые постоянные), то функция распределения ее равна нулю для всех значений $x \le a$ и единице для значений $x > b$.

Для непрерывной случайной величины

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Все свойства функции распределения дискретной случайной величины выполняются и для функции распределения непрерывной случайной величины.

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.

Плотностью вероятности (*плотностью распределения* или *плотностью*) $p(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$p(x) = F'(x).$$

Плотность вероятности $p(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она определена только для *непрерывных* случайных величин.

Плотность вероятности иногда называют *дифференциальной функцией или дифференциальным законом распределения*.

График плотности вероятности называется кривой распределения.

Свойства плотности вероятности непрерывной случайной величины:

1. $p(x) \ge 0$.
2. $P(a \le X \le b) = \int\limits_a^b p(x)\,dx$ (рис. 8.1).

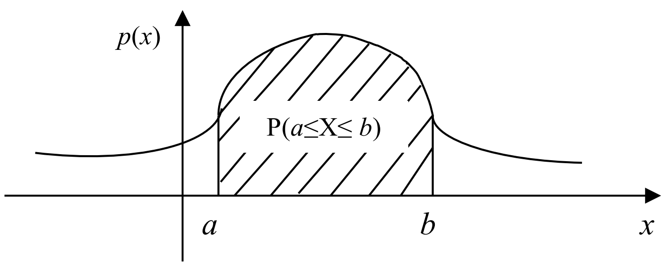

Рис. 8.1

3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$ (рис. 8.2).

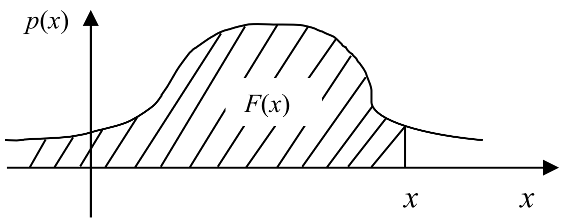

Рис. 8.2

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

Геометрически свойства плотности вероятности означают, что ее график – кривая распределения – лежит не ниже оси абсцисс и полная площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Пример 8.1. Минутная стрелка электрических часов передвигается скачками поминутно. Вы бросили взгляд на часы. Они показывают *a* минут. Тогда для вас истинное время в данный момент будет случайной величиной. Найти ее функцию распределения.

Решение. Очевидно, что функция распределения истинного времени равна 0 для всех $x \le a$ и единице для $x > a + 1$. Время течет равномерно. Поэтому вероятность того, что истинное время меньше *a* + 0,5 мин, равна 0,5, так как одинаково вероятно, прошло ли после *a* менее или более полминуты. Вероятность того, что истинное время меньше *a* + 0,25 мин, равна 0,25 (вероятность этого времени втрое меньше вероятности того, что истинное время больше *a* + 0,25 мин, а сумма их равна единице, как сумма вероятностей противоположных событий). Аналогично рассуждая, найдем, что вероятность того, что истинное время меньше *a* + 0,6 мин, равна 0,6. В общем случае вероятность того, что истинное время меньше *a* + + α мин $(0 < \alpha < 1)$, равна α. Следовательно, функция распределения истинного времени имеет следующее выражение:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ для } x \le a,\\ \alpha \text{ для } x = a+\alpha\ (0<\alpha\le 1),\\ 1 \text{ для } x > a+1.\end{cases}$$

Она непрерывна всюду, а производная ее непрерывна во всех точках, за исключением двух: $x = a$ и $x = a + 1$. График этой функции имеет вид (рис. 8.3):

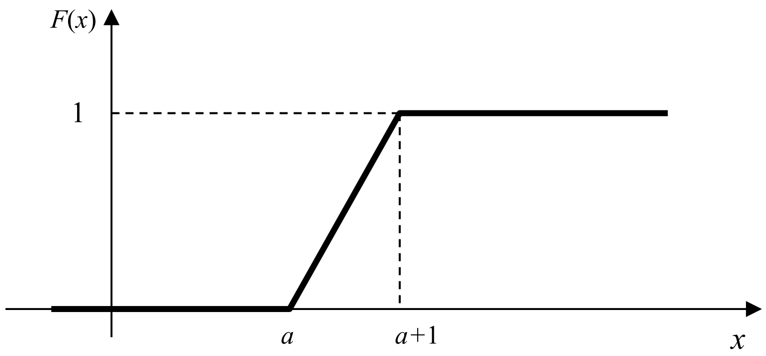

Рис. 8.3

Пример 8.2. Является ли функцией распределения некоторой случайной величины функция

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le 0,\\ x^3 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Решение.

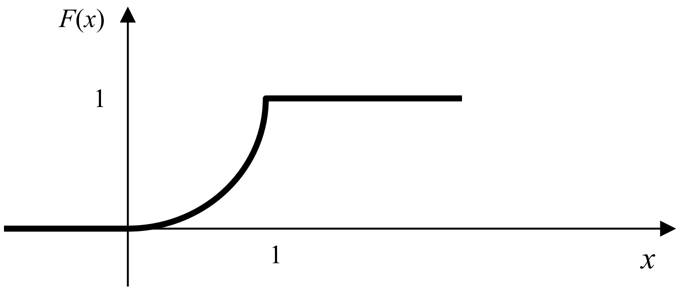

Рис. 8.4

Все значения этой функции принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е. $0 \le F(x) \le 1$. Функция $F(x)$ является неубывающей: в промежутке $(-\infty;0]$ она постоянна, равна нулю, в промежутке $(0;1]$ возрастает, в промежутке $(1;+\infty)$ также постоянна, равна единице (см. рис. 8.4). Функция непрерывна в каждой точке x_0 области ее определения – промежутка $(-\infty;+\infty)$, поэтому непрерывна слева, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), \ F(x_0 - 0) = F(x_0).$$

Выполняются и равенства:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет всем свойствам функции распределения. Значит данная функция $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины *X*.

Пример 8.3. Является ли функцией распределения некоторой случайной величины функция

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \pi/2, \\ 1 \text{ при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Решение. Данная функция не является функцией распределения случайной величины, так как на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ она убывает и не является непрерывной. График функции изображен на рис. 8.5.

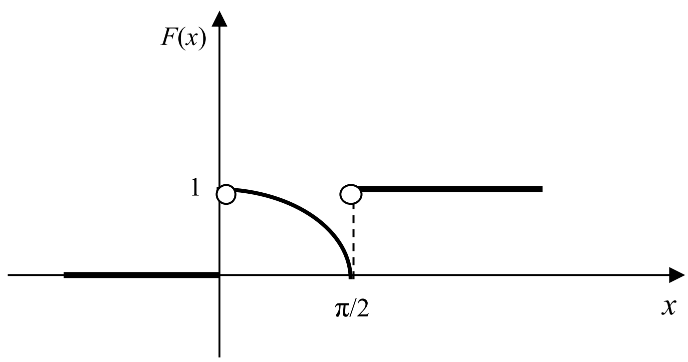

Рис. 8.5

Пример 8.4. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ ax^3 \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность вероятности случайной величины X. Определить вероятность неравенства $0 < X < 1$.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 3ax^2 \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Коэффициент a определяем с помощью равенства

$$\int_0^2 3ax^2 dx = 1,$$

отсюда

$$a = \frac{1}{3\int_0^2 x^2 dx} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2} = \frac{1}{8}.$$

Тот же результат можно было получить, используя непрерывность функции $F(x)$ в точке $x = 2$

$$\lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2-0} ax^3 = 8a, \quad \lim_{x \to 2+0} F(x) = 1.$$

Следовательно, $8a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$.

Поэтому плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{3}{8}x^2 \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Вероятность $P(0 < X < 1)$ попадания случайной величины X в заданный промежуток вычисляется по формуле

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}.$$

Пример 8.5. Случайная величина X имеет плотность вероятности (закон Коши)

$$p(x) = \frac{a}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти коэффициент a и вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение из интервала $(0;5)$. Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Найдем коэффициент a из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = a\operatorname{arctg}x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a[\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)] = a\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = a\pi,$

то, $a = \frac{1}{\pi}$.

Итак, $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение из интервала $(0;5)$, равна

$$P(0 < X < 5) = \int_0^5 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x \Big|_0^5 = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}5 - \operatorname{arctg}0) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}5 \approx 0{,}435.$$

Найдем функцию распределения данной случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}(-\infty)) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$$

Пример 8.6. График плотности вероятности случайной величины X изображен на рис. 8.6 (закон Симпсона). Записать выражение плотности вероятности и найти функцию распределения этой случайной величины.

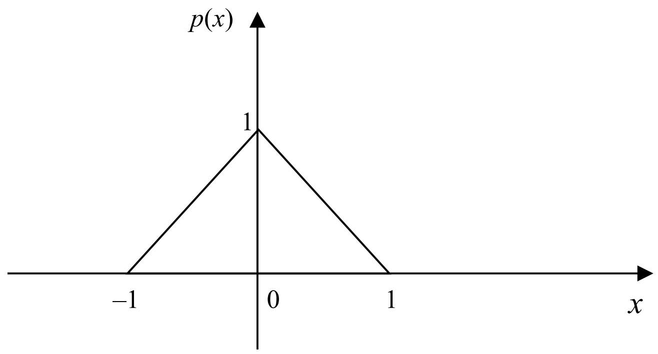

Рис. 8.6

Решение. Пользуясь графиком, записываем аналитическое выражение плотности распределения вероятностей данной случайной величины

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1 \text{ и } x>1,\\ x+1 \text{ при } -1<x\le 0,\\ -x+1 \text{ при } 0<x\le 1.\end{cases}$$

Найдем функцию распределения.

Если $x\le -1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$.

Если $-1<x\le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\cdot dx+\int\limits_{-1}^{x}(x+1)\,dx=\dfrac{(x+1)^2}{2}$.

Если $0<x\le 1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\cdot dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int\limits_{0}^{x}(1-x)\,dx=$

$$=\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{x}=\frac{1}{2}-\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{(1-x)^2}{2}.$$

Если $x>1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\cdot dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int\limits_{0}^{1}(1-x)\,dx+\int\limits_{1}^{x}0\cdot dx=$

$$=\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{2} \text{ при } -1<x\le 0,\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2} \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Дана функция

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1, \text{ если } x>0.\end{cases}$$

Показать, что данная функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

8.2. Дана функция

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ x^2, \text{если } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

Является ли она функцией распределения некоторой случайной величины?

Ответ: нет.

8.3. Является ли функцией распределения некоторой случайной величины функция

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<+\infty)?$$

Ответ: нет.

8.4. Является ли функцией распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}e^x \text{ при } x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$$

$$\text{б) } F(x)=\begin{cases}e^{-x} \text{ при } x\le 0,\\ e^x \text{ при } x>0.\end{cases}$$

Ответ: а) да; б) нет.

8.5. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности, а также вероятности $P(X=1)$, $P(X<1)$, $P(1\le X<2)$.

Ответ: $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0 \text{ и при } x>2,\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2.\end{cases}$

$$P(X=1)=0;\ P(X<1)=\frac{1}{4};\quad P(1\le X<2)=\frac{3}{4}.$$

8.6. Случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале $[-1;3]$, задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$. Найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $[0;2]$. Построить график функции $F(x)$.

Ответ: $P(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}$.

8.7. Случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале $[2;6]$, задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-4x+4\right)$. Найти вероятность того, что случайная величина *X* примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

Ответ: $P(2\le X<4)=\frac{1}{4}; P(2\le X<6)=1; P(3\le X\le 6)=\frac{15}{16}; P(6\le X\le 6)=0$.

8.8. Случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале $(1;4)$, задана квадратичной функцией $F(x)=ax^2+bx+c$, имеющей максимум при $x=4$. Найти параметры *a*, *b*, *c* и вычислить вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $[2;3]$.

Ответ: $a=-\frac{1}{9};\quad b=\frac{8}{9};\quad c=-\frac{7}{9};\quad P(2\le X\le 3)=\frac{1}{3}$.

8.9. Функция распределения случайной величины *X* имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ a+b\arcsin x \text{ при } -1\le x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти плотность вероятности случайной величины X и построить ее график.

Ответ: $a=\dfrac{1}{2}$; $\quad b=\dfrac{1}{\pi}$; $\quad p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \text{ при } |x|<1,\\ 0 \text{ при } |x|\geq 1.\end{cases}$

8.10. Плотность распределения вероятностей случайной величины X определяется функцией

$$p(x)=ax^2e^{-kx}\ (k>0,\quad 0\leq x<+\infty).$$

Найти значение коэффициента a. Найти функцию распределения $F(x)$ величины X.

Ответ: $a=\dfrac{k^3}{2}$; $\quad F(x)=1-\dfrac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}$.

8.11. Функция $p(x)$ задана в виде

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leq 1,\\ \dfrac{a}{x^4} \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти значение постоянной a, при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X; функцию распределения $F(x)$; вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение на отрезке $[2;3]$.

Ответ: $a=3$; $\quad F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leq 1,\\ 1-\dfrac{1}{x^3} \text{ при } x>1,\end{cases}\quad P(2\leq X\leq 3)=\dfrac{19}{216}$.

8.12. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leq \pi/6,\\ 3\sin 3x \text{ при } \pi/6<x\leq \pi/3,\\ 0 \text{ при } x>\pi/3.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leq \pi/6,\\ -\cos 3x \text{ при } \pi/6<x\leq \pi/3,\\ 1 \text{ при } x>\pi/3.\end{cases}$

8.13. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ равна $p(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$; вне этого интервала $p(x)=0$. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет два раза значение, заключенное в интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi+2}{4\pi}$; $\quad P_3(2)=C_3^2\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\frac{3\pi-2}{4\pi}$.

8.14. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x)=a-b\cdot arctgx$. Определить постоянные a, b и найти плотность распределения вероятностей $p(x)$.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{\pi}$; $p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

где $p(x)$ – плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу $(a;b)$, то $M(X)=\int_a^b xp(x)\,dx$.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox определяется равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 p(x)\,dx,$$

если интеграл сходится, или равносильным равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 p(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2\, p(x)\,dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 p(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин справедливы и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение (для которого плотность вероятности $p(x)$ достигает максимума).

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого

$$P(X<M_e(X))=P(X>M_e(X))=\frac{1}{2}.$$

Вертикальная прямая $x=M_e(X)$, проходящая через точку с абсциссой, равной $M_e(X)$, геометрически делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части (рис. 8.7).

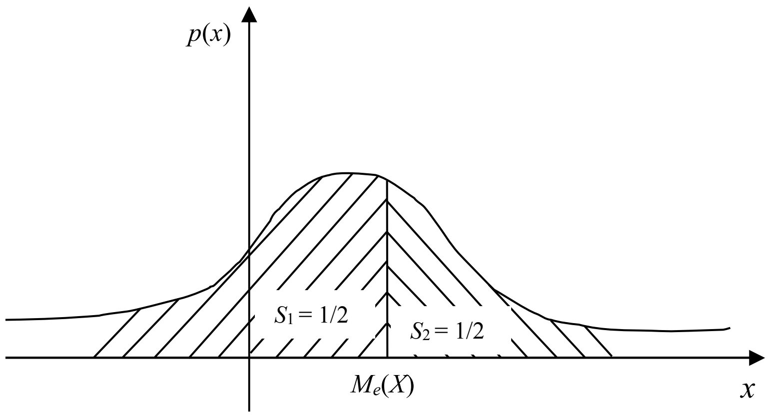

Рис. 8.7

Очевидно, что $F(M_e(X))=1/2$.

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\,dx.$$

Центральный момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k p(x)\,dx.$$

Если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$\nu_k = \int\limits_a^b x^k p(x)\,dx,\ \mu_k = \int\limits_a^b [x - M(X)]^k p(x)\,dx.$$

Очевидно, что $\nu_0 = 1$; $\mu_0 = 1$; $\nu_1 = M(X)$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = D(X)$. Центральные моменты можно вычислить через начальные моменты по формулам:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Математическое ожидание $M(X)$, или первый начальный момент, характеризует среднее значение распределения случайной величины X; второй центральный момент или дисперсия $D(X)$ – степень рассеяния распределения случайной величины X относительно $M(X)$.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения.

Величина $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется *коэффициентом асимметрии* случайной величины.

$A = 0$, если распределение симметрично относительно математического ожидания.

Четвертый центральный момент характеризует крутость распределения.

Эксцессом случайной величины называется число

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Пример 8.7. Дана функция

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ cxe^{-x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

При каком значении параметра c эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины X? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Для того чтобы $p(x)$ была плотностью вероятности некоторой случайной величины X, она должна быть неотрицательна, т.е. $cxe^{-x}\ge 0$, откуда $c\ge 0$, и она должна удовлетворять свойству 4 плотности вероятности.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{+\infty} cxe^{-x}\,dx=0+\lim_{b\to+\infty} c\cdot\int_0^b xe^{-x}\,dx=c\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx=1,$$

откуда

$$c=\frac{1}{\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}dx}.$$

Найдем интеграл $\int_0^b xe^{-x}dx$, применив метод интегрирования по частям

$$\int_0^b xe^{-x}dx=\left[u=x,\ dv=e^{-x}dx,\ du=dx,\ v=-e^{-x}\right]=-xe^{-x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-x}dx=$$

$$=-be^{-b}-e^{-x}\Big|_0^b=-be^{-b}-e^{-b}+1.$$

Таким образом,

$$c=\frac{1}{\lim\limits_{b\to+\infty}\left(1-\dfrac{b}{e^b}-\dfrac{1}{e^b}\right)}=1$$

и плотность распределения имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ xe^{-x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2e^{-x}\,dx.$$

$$\int_0^b x^2e^{-x}dx = \left[u = x^2,\, dv = e^{-x}dx,\, du = 2xdx,\, v = -e^{-x}\right] = -x^2e^{-x}\Big|_0^b + 2\int_0^b e^{-x}xdx =$$
$$-b^2e^{-b} + 2\left[-be^{-b} - e^{-b} + 1\right] = 2 - b^2e^{-b} - 2be^{-b} - 2e^{-b}.$$

Следовательно,

$$M(X) = \lim_{b\to+\infty}\left(2 - b^2e^{-b} - 2be^{-b} - 2e^{-b}\right) = 2.$$

Дисперсия $D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2$.

Вначале найдем

$$M\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2p(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^3e^{-x}dx =$$
$$= \left[u = x^3,\, v = e^{-x}dx,\, du = 3x^2dx,\, v = -e^{-x}\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-x^3e^{-x}\Big|_0^b + 3\int_0^b x^2e^{-x}dx\right] =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-b^3e^{-b} + 6 - 3b^2e^{-b} - 6be^{-b} - 6e^{-b}\right] = 6.$$

Тогда $D(X) = 6 - 2^2 = 2$.

Пример 8.8. Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале $(0, a)$ (рис. 8.8).

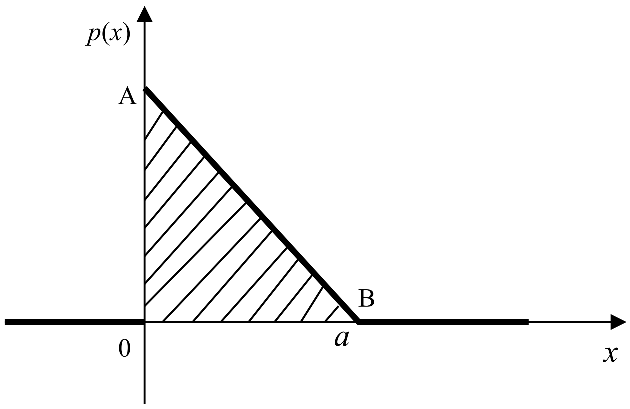

Рис. 8.8

1. Написать выражение плотности распределения.
2. Найти функцию распределения $F(x)$.
3. Найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток от $\frac{a}{2}$ до a.
4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $\mu_3(X)$.

Решение. Так как площадь прямоугольного треугольника есть площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, то она равна единице: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}p(0)\cdot a=1$ и, следовательно, $p(0)=\frac{2}{a}$. Уравнение прямой АВ в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{p(x)}{p(0)}=1$, откуда $p(x)=p(0)\left(1-\frac{x}{a}\right)=$ $=\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)$, то есть функция плотности распределения имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) \text{ при } x\in(0;a),\\ 0 \text{ при } x\notin(0;a).\end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x\le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0;$

если $0<x<a$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{-2}{a}a\int\limits_{0}^{x}\left(1-\frac{x}{a}\right)d\left(1-\frac{x}{a}\right)=-\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\Bigg|_0^x=$

$=-\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+1=\frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right);$

если $x>a$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{a}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+\int\limits_{a}^{x}0dx=-\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\Bigg|_0^a=1.$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right) \text{ при } 0<x\le a,\\ 1 \text{ при } x>a.\end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в промежуток от $\frac{a}{2}$ до a определяется по формуле

$$P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)=F(a)-F\left(\frac{a}{2}\right)=1(2-1)-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=\frac{2}{a}\int\limits_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3a}x^3\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3a}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{a^2}{6}=\frac{a}{3},$$

$$M\left(X^2\right)=\frac{2}{a}\int\limits_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{a}\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{a^3}{12}=\frac{a^2}{6}.$$

Следовательно,

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{18},$$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\frac{a}{3\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Так как $\mu_3=v_3-3v_1v_2+2v_1^3$, а $v_1=M(X)=\dfrac{a}{3}$, $v_2=M\left(X^2\right)=\dfrac{a^2}{6}$,

$$v_3=M\left(X^3\right)=\frac{2}{a}\int\limits_0^a x^3\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{a}\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{5}\right)=\frac{a^3}{10},$$

то
$$\mu_3=\frac{a^3}{10}-3\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a^2}{6}+2\cdot\frac{a^3}{27}=\frac{a^3}{135}.$$

Пример 8.9. По данным задачи 8.5 найти математическое ожидание *M*(*X*), дисперсию *D*(*X*), моду $M_0(X)$ и медиану $M_e(X)$.

Решение. Так как $p(x)=F'(X)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0 \text{ и при } x>2,\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2,\end{cases}$

то
$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=\int\limits_0^2\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{6}x^3\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$.

Вначале найдем

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)\,dx=\int\limits_0^2 x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}x^4\Bigg|_0^2=2.$$

Следовательно,

$$D(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

График плотности вероятности *p*(*x*) имеет вид (рис. 8.9)

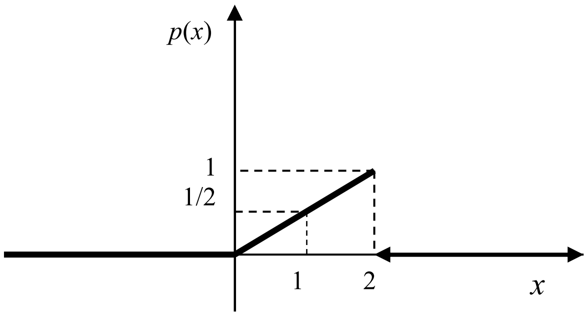

Рис. 8.9

Плотность вероятности $p(x)$ максимальна при $x = 2$, это означает, что $M_0(X) = 2$.

Из условия $F\left(M_e(X)\right) = \frac{1}{2}$ найдем медиану $M_e(X)$: $\frac{\left(M_e(X)\right)^2}{4} = \frac{1}{2}$; откуда $M_e(X) = \sqrt{2}$.

Пример 8.10. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{7}{9} \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины X.

Решение. Плотность распределения случайной величины X равна

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1 \text{ и при } x > 4, \\ -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9} \text{ при } 1 < x \le 4. \end{cases}$$

Так как асимметрия $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, эксцесс $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, то найдем начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$\nu_1 = \int_1^4 xp(x)\,dx = \int_1^4 \left(-\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x\right)dx = \left(-\frac{2}{27}x^3 + \frac{4}{9}x^2\right)\Bigg|_1^4 = 2,$$

$$\nu_2 = \int_1^4 x^2 p(x)\,dx = \int_1^4 \left(-\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2\right)dx = \left(-\frac{x^4}{18} + \frac{8x^3}{27}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2} = 4{,}5,$$

$$\nu_3 = \int_1^4 x^3\left(-\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}\right)dx = \left(-\frac{2x^5}{45} + \frac{2x^4}{9}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{56}{5} = 11{,}2,$$

$$v_4 = \int_1^4 x^4\left(-\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}\right)dx = \left(-\frac{x^6}{27} + \frac{8x^5}{45}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{151}{5} = 30{,}2.$$

Тогда

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = \frac{9}{2} - 4 = 0{,}5,$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 11{,}2 - 3\cdot 2\cdot 4{,}5 + 2\cdot 8 = 0{,}2,$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = 30{,}2 - 4\cdot 2\cdot 11{,}2 + 6\cdot 4\cdot 4{,}5 - 3\cdot 16 =$$
$$= 30{,}2 - 89{,}6 + 108 - 48 = 0{,}6.$$

Так как $D(X) = \mu_2 = 0{,}5$, то $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}707$; $\sigma^3 \approx 0{,}353$; $\sigma^4 \approx 0{,}25$. Следовательно,

$$A = \frac{0{,}2}{0{,}353} \approx 0{,}566;\ E = \frac{0{,}6}{0{,}25} - 3 \approx -0{,}6.$$

Пример 8.11. Плотность случайной величины X задана следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 3x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти моду, медиану и математическое ожидание X.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_0^1 3x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Так как плотность распределения достигает максимума при $x = 1$, то $M_0(X) = 1$. Медиану $M_e(X)$ найдем из условия $F(M_e(X)) = \frac{1}{2}$. Для этого вначале найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

если $0 < x \le 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x 3x^2dx = x^3\Big|_0^x = x^3$;

если $x > 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 3x^2dx + \int_1^x 0dx = x^3\Big|_0^1 = 1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \mathrm{x}^3 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Уравнение $F(M_e(X))=\frac{1}{2}$ равносильно уравнению $(M_e(X))^3=\frac{1}{2}$, откуда $M_e(X)=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Пример 8.12. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{4} \text{ при } x\in(0;1),\\ 0 \text{ при } x\notin(0;1).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание функции $Y=X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Решение. Так как математическое ожидание функции $\varphi(x)$

$$M[\varphi(x)]=\int_a^b \varphi(x)p(x)\,dx,$$

то

$$M(X^3)=\int_0^1 x^3\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{10}x^5+\frac{3}{16}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{3}{16}=\frac{23}{80}.$$

Пример 8.13. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4} \text{ при } x\in(3;5),\\ 0 \text{ при } x\notin(3;5).\end{cases}$$

Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

Решение. Так как $p(x)=-\frac{3}{4}(x-4)^2+\frac{3}{4}$, то отсюда видно, что при x = 4 плотность распределения достигает максимума и, следовательно, $M_0(X)$ = 4 (можно было найти максимум методами дифференциального исчисления).

Кривая распределения симметрична относительно прямой x = 4, поэтому $M(X)=M_e(X)=4$.

Задачи для самостоятельного решения

8.15. Случайная величина X имеет плотность

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{11}\left(x^2+x+1\right)\text{при } 0<x\le 1,\\ 0 \ \text{ при } \ x\le 0 \text{ и при } x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.
Ответ: $M(X)$ = 0,5909; $D(X)$ = 0,0781.

8.16. Случайная величина X имеет плотность

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 \text{x при } |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \ \text{ при } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ: $M(X)=0; \quad D(X)=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{1}{2}.$

8.17. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}\sin 2x \ \text{ при } \ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0 \ \text{ при } \ x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание функции $Y=X^2$(не находя предварительно плотности распределения Y).

Ответ: $\dfrac{\pi^2-4}{8}.$

8.18. Плотность случайной величины X имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}ae^{-x} \ \text{ при } \ x\ge 0,\\ 0 \ \text{ при } \ x<0.\end{cases}$$

Найти коэффициент a. Вычислить моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X.

Ответ: $a=1, \quad M_0(X)=0, \quad M_e(X)=\ln 2, \quad \nu_1=M(X)=1, \quad D(X)=\mu_2=1,$ $\nu_2=2, \quad \nu_3=6, \quad \mu_3=2.$

8.19. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{6}{x^7} \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти начальные моменты случайной величины X.

Ответ: $v_k=\dfrac{6}{6-k}$ при $\mathrm{k}\le 5$; не существуют при $k\ge 6$.

8.20. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } x<-\dfrac{\pi}{2} \text{ и при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=\sin 2X$.

Ответ: $M(Y)=0$; $D(Y)=\dfrac{8}{15}$.

8.21. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^4 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

Ответ: $M(Y)=\dfrac{10}{3}-4\ln 2$.

8.22. По данным задачи 8.9 (при $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\pi}$) найти моду и медиану распределения; вероятность того, что случайная величина X окажется в промежутке $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ: $P\left(-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$; $M_e(X)=0$; $M(X)=0$; $D(X)=\dfrac{1}{2}$, X моду не имеет.

8.23. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \text{ (распределение Лапласа).}$$

Ответ: $M(X)=0;\quad D(X)=2.$

8.24. Случайная величина X подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке от $-a$ до $+a$ (рис. 8.10). Написать выражение плотности распределения; построить график функции распределения; найти числовые характеристики случайной величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $\mu_3(X)$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{a}{2};a\right)$.

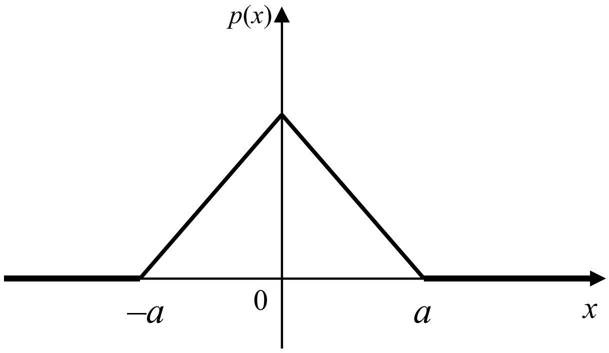

Рис. 8.10

Ответ: $P(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right) \text{ при } x\in(-a;a),\\ 0 \text{ при } x\notin(-a;a).\end{cases}$; $M(X)=0;\ D(X)=\frac{a^2}{6};\ \sigma(X)=\frac{a}{\sqrt{6}};$

$\mu_3(X)=0;\quad P\left(-\frac{a}{2}<X<a\right)=\frac{7}{8}.$

8.25. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью, которая задана формулой

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 2\mathrm{x} \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти коэффициент асимметрии распределения.

Ответ: $A = \frac{-2\sqrt{2}}{5}$.

8.26. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределнной по закону Лапласа с плотностью $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Ответ: $A = 0$; $E = 3$.

8.27. Случайная величина *X*, сосредоточенная на интервале $(1;4)$, задана функцией распределения $F(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{7}{9}$. Найти моду и медиану случайной величины X.

Ответ: $M_0(x) = 1$; $M_e(x) \approx 0{,}8$.

8.28. Найти значения $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$ для случайной величины *X*, функция распределения которой

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $M(X) = 1; D(X) = 0{,}2; \sigma(X) = 0{,}447$.

8.29. Кривая распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с полуосями a и *b*. Полуось a известна. Найти *b,* $M(X), D(X)$ и функцию распределения $F(x)$.

Ответ: $b = \frac{2}{\pi a}; M(X) = 0; D(X) = \frac{a^2}{4}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -a, \\ \frac{1}{\pi a^2}\left(x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2\pi}{2}\right) \text{при } -a < x \le a, \\ 1 \text{ при } x > a. \end{cases}$$

8.30. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le -2,\\ -\dfrac{1}{4}x^3 \text{ при } -2 < x \le 0,\\ 0 \text{ при } x > 0.\end{cases}$$

Найти коэффициент асимметрии и эксцесс.

Ответ: $A \approx -1{,}05$; $E \approx 0{,}7$.

Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон* распределения на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности $p(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b,\\ 0 \text{ при } x < a, \quad x > b.\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону, имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x \le b,\\ 1 \text{ при } x > b.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\dfrac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$.

Пример 8.14. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 3 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке $[0, 3]$ имеет равномерный закон распределения с $p(x)=\dfrac{1}{3}$. Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более минуты, равна $\frac{1}{3}$ от равной единице площади прямоугольника (рис. 8.11), т.е.

$$P(X \le 1) = \int_2^3 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3} x \Big|_2^3 = \frac{1}{3}.$$

$$M(X) = \frac{0+3}{2} = 1{,}5 \text{ мин},\ D(X) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86 \text{ мин}.$$

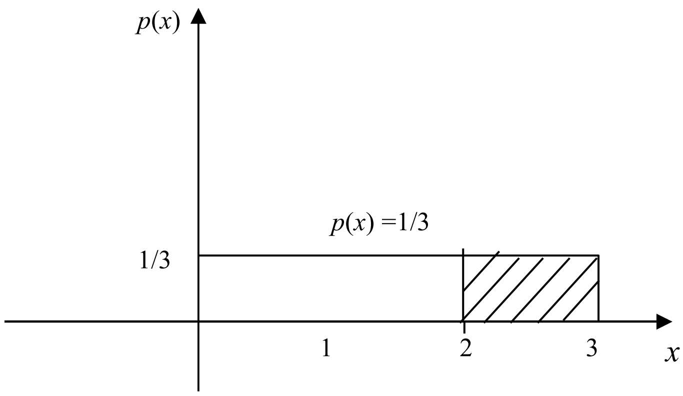

Рис. 8.11

Пример 8.15. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения двух независимых случайных величин ξ и η с равномерными законами распределения: ξ в интервале $[0; 1]$, η – в интервале $[1; 3]$.

Решение. Так как математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta) = \frac{0+1}{2} \cdot \frac{1+3}{2} = 1$. Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(\xi\eta) = M\left[(\xi\eta)^2\right] - [M(\xi\eta)]^2 = M\left(\xi^2\eta^2\right) - [M(\xi\eta)]^2 = M\left(\xi^2\right) \cdot M\left(\eta^2\right) - [M(\xi) \cdot M(\eta)]^2.$$

$M\left(\xi^2\right)$ найдем по формуле

$$M\left(\xi^2\right) = \int_0^1 \xi^2 p(\xi)\, d\xi = \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{1}{3}\xi^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Аналогично рассчитаем

$$M\left(\eta^2\right)=\int_1^3 \eta^2 p(\eta)\,d\eta=\frac{1}{2}\int_1^3 \eta^2 d\eta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\eta^3\Big|_1^3=\frac{13}{3}.$$

Следовательно,

$$D(\xi\eta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3}-1=\frac{4}{9}.$$

Пример 8.16. Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{vmatrix},$$

элементы которого ξ_{ij} – независимые случайные величины с $M\left(\xi_{ij}\right)=0$ и $D\left(\xi_{ij}\right)=\sigma^2$.

Решение. Вычислим математическое ожидание

$$M(\Delta_2)=M(\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21})=M(\xi_{11}\xi_{22})-M(\xi_{12}\xi_{21})=M(\xi_{11})M(\xi_{22})-M(\xi_{12})M(\xi_{21})=0.$$

Для нахождения дисперсии $D(\Delta_2)$ докажем, что если ξ и η – независимые случайные величины, то $D(\xi\eta)=D(\xi)D(\eta)+[M(\xi)]^2D(\eta)+[M(\eta)]^2D(\xi)$.

Действительно,

$$\begin{aligned}D(\xi\eta)&=M(\xi\eta)^2-[M(\xi\eta)]^2=M\left(\xi^2\right)M\left(\eta^2\right)-[M(\xi)]^2[M(\eta)]^2=\\&=\left(D(\xi)+[M(\xi)]^2\right)\left(D(\eta)+[M(\eta)]^2\right)-[M(\xi)]^2[M(\eta)]^2=\\&=D(\xi)D(\eta)+[M(\xi)]^2D(\eta)+[M(\eta)]^2D(\xi).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}D(\Delta_2)&=D(\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21})=D(\xi_{11}\xi_{22})+D(\xi_{12}\xi_{21})=\\&=D(\xi_{11})D(\xi_{22})+[M(\xi_{11})]^2D(\xi_{22})+[M(\xi_{22})]^2D(\xi_{11})+\\&+D(\xi_{12})D(\xi_{21})+[M(\xi_{12})]^2D(\xi_{21})+[M(\xi_{21})]^2D(\xi_{12})=\\&=\sigma^2\sigma^2+0\cdot\sigma^2+0\cdot\sigma^2+\sigma^2\sigma^2+0\cdot\sigma^2+0\cdot\sigma^2=2\sigma^4.\end{aligned}$$

Замечание. Для определителя n-го порядка $M(\Delta_n)=0$; $D(\Delta_n)=n!\sigma^{2n}$.

Пример 8.17. Автоматический светофор работает в двух режимах: 1 мин. горит зеленый свет и 0,5 мин — красный и т.д. Водитель подъезжает к перекрестку в случайный момент времени. 1. Найти вероятность того, что он проедет перекресток без остановки. 2. Составить закон распределения и вычислить числовые характеристики времени ожидания у перекрестка.

Решение. 1. Момент проезда автомобиля t через перекресток распределен равномерно в интервале, равном периоду смены цветов светофора. Этот период равен 1 + 0,5 = 1,5 мин. Для того чтобы машина проехала через перекресток не останавливаясь, достаточно того, чтобы момент проезда пришелся на интервал времени $(0;1)$. Тогда

$$P(t\in(0;1))=\int_0^1 p(\tau)\,d\tau=\int_0^1\frac{2}{3}\,d\tau=\frac{2}{3}.$$

2. Время ожидания t_0 является смешанной случайной величиной: с вероятностью $\frac{2}{3}$ она равна нулю, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ принимает с равномерной плотностью вероятностей любые значения между 0 и 0,5 мин; тогда график функции распределения случайной величины t_0 имеет вид, изображенный на рис. 8.12:

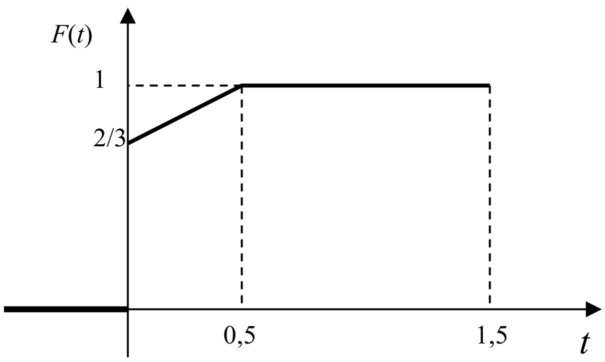

Рис. 8.12

То есть $F(t)=0$ при $t\le 0$; $F(t)=\frac{2}{3}+\frac{t}{1,5}$ при $t\in(0;0,5)$; $F(t)=1$ при $t\in[0,5;1,5)$. Среднее время ожидания у перекрестка

$$M(t_0)=\frac{1}{3}\int_0^{0,5} tp(t)\,dt+\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{0,5}=\frac{1}{3}\cdot 0,25\approx 0,083\,\text{мин}.$$

Дисперсия времени ожидания

$$D(t_0)=M(t_0^2)-[M(t_0^2)]=\frac{1}{3}\int_0^{0,5} t^2\frac{1}{0,5}\,dt-(0,083)^2\approx 0,0208\,\text{мин}^2;\ \sigma(t_0)\approx 0,144\,\text{мин}.$$

Задачи для самостоятельного решения

8.31. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти: 1) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины; 2) вероятность того, что ошибка округления: а) меньше 0,01; б) больше 0,03.

Ответ: 1) $M(X)=0{,}05;\quad D(X)=0{,}00083;\quad \sigma(X)=0{,}02887.$

2а) $P(0<X<0{,}01)+P(0{,}09<X<0{,}1)=0{,}2.$

2б) $P(0{,}03<X<0{,}07)=0{,}4.$

8.32. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 4 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 2 мин.

Ответ: $P(2<X<4)=0{,}5.$

8.33. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 10 с.

Ответ: $P\left(0<X<\dfrac{1}{6}\right)+P\left(\dfrac{5}{6}<X<1\right)=\dfrac{1}{3}.$

8.34. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X — в интервале $(a;b)$, Y — $(c;d)$. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения XY.

Ответ: $M(XY)=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{c+d}{2};\quad D(XY)=\dfrac{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(c^2+cd+d^2\right)}{9}-$

$-\dfrac{(a+b)^2(c+d)^2}{16}.$

8.35. Диаметр круга x измерен приближенно, причем $5\le x\le 6$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(5;6)$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Ответ: $M\left(\pi R^2\right)=\frac{91\pi}{12}$; $\quad D\left(\pi R^2\right)=\frac{227\pi^2}{360}$.

8.36. Ребро куба x измерено приближенно, причем $2 \le x \le 3$. Рассматривая длину ребра куба как случайную величину *X*, распределенную равномерно в интервале $(2;3)$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Ответ: $M\left(X^3\right)=16{,}25$; $\quad D\left(X^3\right)\approx 30{,}08$.

8.37. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1;1]$. Найти вероятность того, что $\min\limits_{i=1,2}|x_i| > \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

8.38. Случайная величина *X* равномерно распределена на отрезке $[-4;1]$. 1) Записать плотность распределения $p(x)$ этой случайной величины. 2) Найти функцию распределения $F(x)$. 3) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Ответ: 1) $p(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-4, \\ 0{,}2 \text{ при } -4 \le x \le 1, \\ 0 \text{ при } x>1; \end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-4, \\ 0{,}2(x+4) \text{ при } -4 \le x \le 1, \\ 1 \text{ при } x>1; \end{cases}$

3) $M(X)=-\frac{3}{2}$; $\quad D(X)=\frac{25}{12}$; $\quad \sigma(X)=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

8.39. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 мин. Найти: а) функцию распределения $F(x)$ для этого равномерного распределения; б) вероятность ожидания лифта более чем 3,5 мин; в) вероятность того, что лифт прибудет в течение первых 45 секунд; г) вероятность того, что ожидание лифта будет заключено в диапазоне от 1 до 3 мин. (между 1 и 3 минутами).

Ответ: а) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{5} \text{ при } 0 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } x > 5; \end{cases}$ б) 0,3; в) 0,15; г) 0,4.

8.40. Мастер, осуществляющий ремонт на дому, может появиться в любое время с 10 до 18 часов. Клиент, прождав до 14 часов, отлучился на 1 час. Какова вероятность, что мастер (приход его обязателен) не застанет его дома?

Ответ: 0,125.

8.41. Владелец антикварного аукциона полагает, что предложение цены за определенную картину будет равномерно распределенной случайной величиной в интервале от 500 тыс. до 2 млн. рублей. Найти: а) плотность вероятности; б) вероятность того, что картина будет продана за цену, меньшую чем 675 тыс.; в) вероятность того, что цена картины будет выше 2 млн. рублей.

Ответ: $p(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0{,}5, \\ \dfrac{2}{3} \text{ при } 0{,}5 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2; \end{cases}$ б) 0,1167; в) 0.

8.42. Очень наблюдательный, занимающийся кражей предметов искусства вор, который, вероятно, знает хорошо статистику, заметил, что частота, с которой охранники обходят музей, равномерно распрелена между 15 и 60 минутами. Пусть случайная величчина X – время (в минутах) до появления охраны. Найти: а) вероятность того, что охранник появится в течение 35 минут после появления вора; б) вероятность того, что охрана не появится в течение 30 минут; в) вероятность того, что охрана появится между 35 и 45 минутами после прихода вора; г) функцию распределения $F(x)$.

Ответ: а) 0,4444; б) 0,6667; в) 0,2222; г) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 15, \\ \dfrac{x}{45}-\dfrac{1}{3} \text{ при } 15 < x \le 60, \\ 1 \text{ при } x > 60. \end{cases}$

8.43. На перекрестке дорог движение регулируется автоматическим светофором, включающим зеленый свет через каждые 2 минуты. Время простоя у этого светофора автомобиля, остановившегося на красный свет, есть случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0; 2) минут. Найти среднее время простоя и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: $M(x)=1$; $\sigma(x)\approx 0{,}58$.

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный)* закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Кривая распределения $p(x)$ и график функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 8.13.

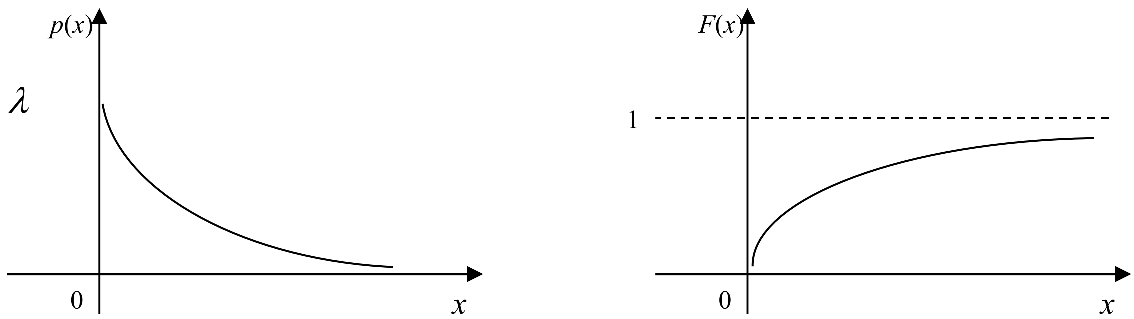

Рис. 8.13

Для случайной величины, распределенной по показательному закону

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}; \; D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность попадания в интервал $(a;b)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Замечание. Показательный закон распределения вероятностей встречается во многих задачах, связанных с простейшим потоком событий. Под *потоком событий* понимают последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Например, поток вызовов на телефонной станции, поток заявок в системе массового обслуживания и др.

Пример 8.18. Непрерывная величина X распределена по показательному закону

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 2e^{-2x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений величины X в интервал $(0{,}1;\,0{,}7)$.

Решение. Поскольку $\lambda = 2$, то $P(0{,}1 < X < 0{,}7) = e^{-2\cdot 0{,}1} - e^{-2\cdot 0{,}7} = e^{-0{,}2} - e^{-1{,}4} =$
$= 0\cdot 8187 - 0\cdot 2466 = 0{,}5721.$

Пример 8.19. Записать плотность распределения и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по этому закону.

Решение. Так как $\lambda = 6$, то плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 6e^{-6x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1-e^{-6x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Поскольку для показательного закона

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

а по условию $\lambda = 6$, то

$$D(X)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36};\ M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{6}.$$

Пример 8.20. Установлено, что время ремонта магнитофонов есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт магнитофона потребуется не менее 15 дней, если среднее время ремонта магнитофонов составляет 12 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{\lambda}=12$, откуда параметр $\lambda=\frac{1}{12}$. Тогда плотность вероятности и функция распределения имеют вид: $p(x)=\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}x}$; $F(x)=1-e^{-\frac{1}{12}x}\ (x\geq 0)$. Искомую вероятность $P(X\geq 15)$ можно найти, интегрируя плотность вероятности, т.е.

$$P(X\geq 15)=P(15\leq X<+\infty)=\int_{15}^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}x}dx,$$

но проще использовать функцию распределения

$$P(X\geq 15)=1-P(X<15)=1-F(15)=1-\left(1-e^{-\frac{15}{12}}\right)=e^{-\frac{15}{12}}=0{,}2865.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=M(X)=12$ дней.

Пример 8.21. Найти асимметрию показательного распределения.

Решение. Так как асимметрия $A=\frac{\mu_3}{\sigma_3}$, а $\sigma(X)=M(X)=\frac{1}{\lambda}$, то найдем вначале центральный момент третьего порядка

$$\mu_3=M[X-M(X)]^3:$$

$$\mu_3=M\left(X^3-3X^2M(X)+3XM^2(X)-M^3(X)\right)=M\left(X^3\right)-3M\left(X^2\right)M(X)+$$
$$+3M(X)M^2(X)-M^3(X)=M\left(X^3\right)-3M\left(X^2\right)\frac{1}{\lambda}+2\frac{1}{\lambda^3}.$$

Найдем $M\left(X^2\right)$

$$M\left(X^2\right)=\int_0^{+\infty}x^2p(x)\,dx=\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx.$$

Интегрируя дважды по частям, получим

$$\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Аналогично рассчитаем

$$M\left(X^3\right)=\lambda\int_0^{+\infty}x^3e^{-\lambda x}dx=\frac{6}{\lambda^3}.$$

Следовательно,

$$\mu_3=\frac{6}{\lambda^3}-3\frac{2}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^3}=\frac{2}{\lambda^3}.$$

Значит,

$$A = \frac{2}{\lambda^3} \Big/ \frac{1}{\lambda^3} = 2\,.$$

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$ определяет *вероятность отказа* элемента за время длительностью t. Здесь T – длительность времени безотказной работы элемента, λ – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Функция надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$ определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t.

Пример 8.22. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$; для второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,2t}$; для третьего элемента $F_3(t) = 1 - e^{-0,3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени $(0; 5)$ часов откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

Решение. а) Вероятность отказа первого элемента

$$P_1 = F_1(5) = 1 - e^{-0,1\cdot 5} = 1 - e^{-0,5} = 1 - 0,5957 = 0,4043;$$

второго элемента

$$P_2 = F_2(5) = 1 - e^{-0,2\cdot 5} = 1 - e^{-1} = 1 - 0,3779 = 0,6321;$$

третьего элемента

$$P_3 = F_3(5) = 1 - e^{-0,3\cdot 5} = 1 - e^{-1,5} = 1 - 0,2231 = 0,7769\,.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0,034 + 0,084 + 0,1749 = 0,2929\,.$$

б) $P = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0,057 + 0,1187 + 0,2925 = 0,4682\,.$

в) $P = p_1p_2p_3 = 0,1985\,.$

Задачи для самостоятельного решения

8.44. Случайная величина X распределена по показательному закону

$$p(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ x < 0, \\ 7e^{-7x} \ \text{при}\ x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(0{,}2;1{,}1)$.

Ответ: $M(X)=\frac{1}{7}$; $D(X)=\frac{1}{49}$; $\sigma(X)=\frac{1}{7}$; $F(x)=1-e^{-7x}$;

$$P(0{,}2<X<1{,}1)=\frac{1}{4{,}0552}-\frac{1}{2208{,}3}=0{,}24614.$$

8.45. Среднее время безотказной работы прибора равно 85 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: а) выражение его плотности вероятности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

Ответ: а) $p(x)=\left\{0 \text{ при } x<0;\quad \frac{1}{85}e^{-\frac{1}{85}x} \text{ при } x\geq 0\right\}$;

$$F(x)=\left\{0 \text{ при } x<0;\quad 1-e^{-\frac{1}{85}x} \text{ при } x\geq 0\right\};$$

б) $P(X\geq 100)=1-F(100)=0{,}31$.

8.46. Найти эксцесс показательного распределения.

Ответ: $E=6$.

8.47. Производится испытание трех элементов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $p_1(t)=0{,}1e^{-0{,}1t}$; для второго – $p_2(t)=0{,}2e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $p_3(t)=0{,}3e^{-0{,}3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени $(0;10)$ часов откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) хотя бы один элемент; г) все три элемента; д) не менее двух элементов.

Ответ: а) 0,069; б) 0,4172; в) 0,9975; г) 0,511; д) 0,928.

8.48. *P* %-м ресурсом элемента называется такое число *t*, что за время *t* элемент не выходит из строя с вероятностью *P*. Считается, что время *t* непрерывной работы электрической лампочки распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что лампочка будет гореть в течение 2 лет, если ее 90 %-й ресурс составляет 6 мес.

Ответ: $P = e^{-\left(-\frac{1}{6}\ln 0{,}9\right)\cdot 24} = 0{,}6561$.

8.49. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, подчиняющаяся экспоненциальному распределению со средней в 12 000 часов. Найти долю жестких дисков, срок службы которых превысит 20 000 часов.

Ответ: $P(T > 20000) = 0{,}1882$.

8.50. Срок службы батареек для слуховых аппаратов приблизительно подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda = 1/12$. Какова доля батареек со сроком службы больше чем 9 дней?

Ответ: $P(T > 9) = 0{,}47237$.

8.51. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda = 0{,}25$ дня. Найти долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней.

Ответ: $P(T > 7) = 0{,}17399$.

8.52. Компьютерный программист использует экспоненциальное распределение для оценки надежности своих программ. После того, как он нашел 10 ошибок, он убедился, что время (в днях) до нахождения следующей ошибки подчиняется экспоненциальному распределению с $\lambda = 0{,}25$. Найти среднее время, потраченное для нахождения первой ошибки; определить вероятность того, что для нахождения первой ошибки понадобится более 5 дней; найти вероятность того, что на нахождение одиннадцатой ошибки потребуется от 3 до 10 дней.

Ответ: $M(X) = 4$; $P(T > 5) = 0{,}8825$; $P(3 < T < 10) = 0{,}148955$.

8.53. Случайная величина X распределена по показательному закону: $p(x) = 0$ при $x < 0$, $p(x) = 6e^{-6x}$ при $x \geq 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0,2; 1,1).

Ответ: $M(X) = 1/6$; $D(X) = 1/36$; $\sigma(X) = 1/6$; $F(x) = 1 - e^{-6x}$;

$P(0{,}2 < T < 1{,}1) \approx 0{,}3$.

Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина *X* имеет *нормальный закон распределения (закон Гаусса)* с параметрами *a* и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Кривую нормального закона распределения называют *нормальной* или *гауссовой кривой*.

На рис. 8.14 приведены нормальная кривая *p*(*x*) с параметрами *a* и σ^2 и график функции распределения случайной величины *X*, имеющей нормальный закон распределения:

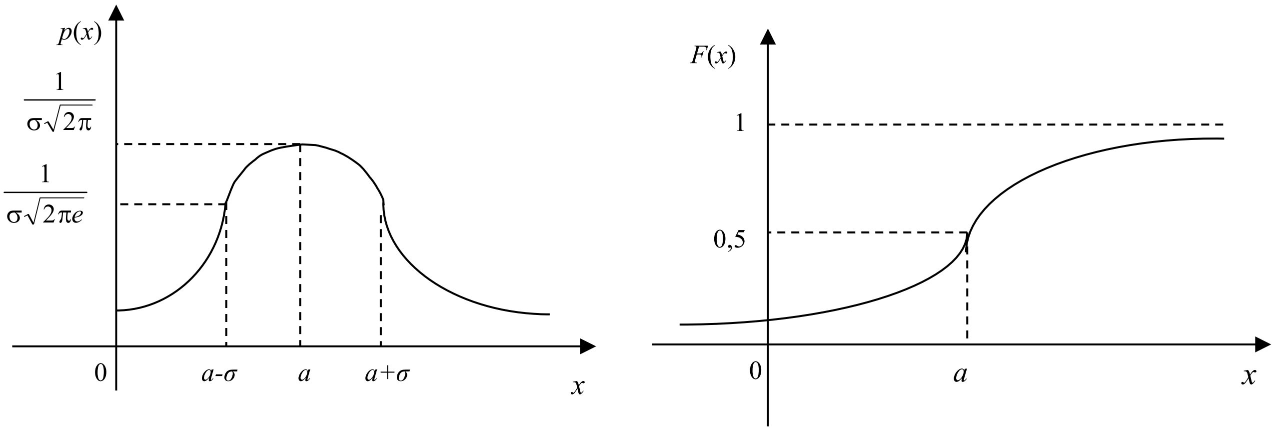

Рис. 8.14

Нормальная кривая симметрична относительно прямой *x* = *a*, имеет максимум в точке *x* = *a*, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, и две точки перегиба $x = a \pm \sigma$ с ординатой $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, e}}$.

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону, $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа *Ф*(*x*) по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где
$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал $[\alpha, \beta]$ определяется формулой

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right].$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину $\varepsilon > 0$ (по абсолютной величине), равна

$$P(|X - a| \le \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

«Правило трех сигм»: если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$

$$P(|X - a| \le 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973.$$

Асимметрия нормального распределения $A = 0$; эксцесс нормального распределения $E = 0$.

Пример 8.23. Определить закон распределения случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей задана функцией

$$p(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{72}}.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Сравнивая данную функцию $p(x)$ с функцией плотности вероятности для случайной величины, распределенной по нормальному закону, заключаем, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 1$ и $\sigma = 6$.

Тогда $M(X) = 1$, $\sigma(X) = 6$, $D(X) = 36$.

Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x - 1}{6}\right).$$

Пример 8.24. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.

Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. С помощью «правила трех сигм» найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

Решение. Так как $a = 15$ и $\sigma = 0{,}2$, то

$$P(X \le 15{,}3) = F(15{,}3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{15{,}3 - 15}{0{,}2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(1{,}5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8664 = 0{,}9332,$$

$$P(X \ge 15{,}4) = 1 - F(15{,}4) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{15{,}4 - 15}{0{,}2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(2) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}9545 = 0{,}0228,$$

$$P(14{,}9 \le X \le 15{,}3) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{15{,}3 - 15}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{14{,}9 - 15}{0{,}2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(1{,}5) + \Phi(0{,}5)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}8664 + 0{,}3829) = 0{,}6246.$$

По «правилу трех сигм» $P(|X - 15| \le 0{,}6) = 0{,}9973$ и, следовательно, $15 - 0{,}6 \le$ $\le X \le 15 + 0{,}6$. Окончательно $14{,}4 \le X \le 15{,}6$.

Пример 8.25. Автомат изготавливает детали, которые считаются годными, если отклонение X от контрольного размера по модулю не превышает 0,8 мм. Каково наиболее вероятное число годных деталей из 150, если случайная величина X распределена нормально с $\sigma = 0{,}4$ мм?

Решение. Найдем вероятность отклонения при $\sigma = 0{,}4$ и $\varepsilon = 0{,}8$:

$$P(|X - a| \le 0{,}8) = \Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}4}\right) = \Phi(2) = 0{,}9545.$$

Считая приближенно $p = 0{,}95$ и $q = 0{,}05$, в соответствии с формулой

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$

где m_0 – наивероятнейшее число, находим при $n = 150$

$$150 \cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le m_0 \le 150 \cdot 0{,}95 + 0{,}95,$$

откуда $m_0 = 143$.

Пример 8.26. Размер диаметра втулок, изготовленных заводом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием a = 2,5 см и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

Решение. По «правилу трех сигм» $P(|X - 2{,}5| \le 3 \cdot 0{,}01) = 0{,}9973$. Отсюда $2{,}5 - 0{,}03 \le X \le 2{,}5 + 0{,}03$, т.е. $2{,}47 \le X \le 2{,}53$.

Пример 8.27. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение – 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Решение. Найдем вероятность того, что рост мужчины будет принадлежать интервалу $(170; 180)$:

$$P(170 < X < 180) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}83) + \Phi(0{,}83)\right] =$$
$$= \Phi(0{,}83) = 0{,}5935 \approx 0{,}6.$$

Тогда вероятность того, что рост мужчины не будет принадлежать интервалу (170; 180) $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Вероятность того, что хотя бы один из 5 мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см равна

$$P = 1 - q^5 = 1 - 0{,}4^5 = 0{,}9898.$$

Пример 8.28. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика d есть случайная величина с характеристиками $M(X) = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$ и $\sigma(X) = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

Решение.

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{d_2 - M(X)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - M(X)}{\sigma}\right)\right] =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma}\right)\right].$$

Так как $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то $P = 1 - \Phi\left(\dfrac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455.$

Задачи для самостоятельного решения

8.54. Определить закон распределения случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей задана функцией

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{\frac{-(x+2)^2}{18}}.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X.

Ответ: $M(X) = -2;\quad D(X) = 9;\quad F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x+2}{3}\right).$

8.55. Независимые случайные величины X и Y распределены нормально, причем $M(X) = 2$, $D(X) = 4$, $M(Y) = -3$, $D(Y) = 5$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения их суммы.

Ответ: $p(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+1)^2}{18}};\quad F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x+1}{3}\right).$

8.56. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X) = 10$, $D(X) = 4$. Найти: а) $P(12 < X < 14)$; б) $P(8 < X < 12)$.

Ответ: а) 0,1359; б) 0,6827.

8.57. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеет массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) более 550 г; г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?

Ответ: а) $P(X \le 470) \approx 0{,}002$; б) $P(500 \le X \le 550) \approx 0{,}613$;
в) $P(X > 550) \approx 0{,}341$; г) $P(|X - 540| \le 30) \approx 0{,}781$.

8.58. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал $(10; 15)$ равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал: а) $(35; 40)$; б) $(30; 35)$ при $\sigma = 10$?

Ответ: а) $P(35 < X < 40) = 0{,}09$; б) $P(30 < X < 35) \approx 0{,}15$.

8.59. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами a = 375 г; $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

Ответ: а) 0,9759; б) 0,9987; в) 0,9987.

8.60. Случайная величина X имеет нормальное распределение с $a = 0$, $\sigma = 1$. Что больше

$$P(-0{,}5 \le X \le -0{,}1) \text{ или } P(1 \le X \le 2)?$$

Ответ: $P(-0{,}5 \le X \le -0{,}1) = 0{,}1516$; $P(1 \le X \le 2) = 0{,}1359$.

8.61. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Ответ: $P(|X| < 10) = 0{,}383$.

8.62. Случайная величина X – ошибки измерений – распределена нормально. Найти вероятность того, что X примет значение между -3σ и 3σ (предполагается, что систематические погрешности отсутствуют).

Ответ: $P(|X| < 3\sigma) = 0{,}9973$.

8.63. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически, их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратичное отклонение, если 5 % коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

Ответ: $\sigma = 0{,}0365$ кг.

8.64. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины X и Y (расстояния от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средними квадратическими отклонениями, соответственно равными 6 и 4 м, и математическими ожиданиями, равными нулю. Найти: а) вероятность попадания в мост одной бомбы; б) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.

Ответ: а) $P(|X| < 15)P(|Y| < 4) = 0{,}6741$; б) $P = 1 - (1 - 0{,}6741)^2 = 0{,}8938$.

8.65. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma = 150$ кг. Определите вероятность того, что вес случайно отобранной туши: а) окажется больше 1250 кг; б) окажется меньше 850 кг; в) будет находиться между 800 и 1300 кг; г) отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг.

Ответ: а) 0,02275; б) 0,25143; в) 0,83144; г) 0,2586.

8.66. По данным задачи 8.65 с вероятностью 0,899 определите границы, в которых будет находиться вес случайно отобранной туши.

Ответ: 704; 1196.

8.67. Процент протеина в пакете с сухим кормом для собак – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 11,2 % и средним квадратическим отклонением 0,6 %. Производителям корма необходимо, чтобы в 99 % продаваемого корма доля протеина составляла не менее x_1%, но не более x_2%. Найдите x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = 9{,}655\ \%$; $x_2 = 12{,}75\ \%$.

8.68. Вес товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, – нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65 % контейнеров имеют чистый вес больше чем 4,9 т и 25 % – имеют вес меньше 4,2 т. Найдите ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение чистого веса контейнера.

Ответ: $a = 5{,}8293$; $\sigma = 2{,}4138$.

8.69. В магазине 10 000 книг. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0,8. Какое максимальное число книг будет продано в течение дня с вероятностью 0,999, если предположить, что число проданных книг есть случайная величина, распределенная по нормальному закону.

Ответ: 8124.

8.70. Отклонение стрелки компаса из-за влияния магнитного поля в определенной области Заполярья есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с $a = 0$ и $\sigma = 1$. Чему равна вероятность того, что абсолютная величина отклонения в определенный момент времени будет больше, чем 2,4?

Ответ: 0,0164.

8.71. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону с a = 32 и $\sigma = 7$ найдите два значения x_1 и x_2, симметричные относительно a с $P(x_1 < X < x_2) = 0{,}99$.

Ответ: $x_1 = 13{,}975$; $x_2 = 50{,}025$.

8.72. Еженедельный выпуск продукции на заводе распределен приблизительно по нормальному закону со средним значением a = 134786 единиц продукции в неделю и $\sigma = 13000$ ед. Найти вероятность того, что еженедельный выпуск продукции: а) превысит 150000 единиц; б) окажется ниже 100000 единиц в данную неделю; в) предположим, что возникли трудовые споры и недельный выпуск продукции стал ниже 80000 единиц. Менеджеры обвиняют профсоюзы в беспрецендентном падении выпуска продукции, а профсоюзы утверждают, что выпуск продукции находится в пределах принятого уровня $(\pm 3\sigma)$. Доверяете ли Вы профсоюзам?

Ответ: а) 0,121; б) 0,00368; в) нет.

8.73. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma = 560$ и неизвестным математическим ожиданием a. В 90 % случаев число ежемесячных заказов превышает 12439. Найти среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

Ответ: a = 13158,6.

8.74. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma = 0{,}4$ мм?

Ответ: $m_0 = 95$.

8.75. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должна иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одной потери вызова?

Ответ: 130 каналов.

9. Закон больших чисел

Следующие утверждения и теоремы составляют содержание группы законов, объединенных общим названием *закон больших чисел.*

Лемма 1 (неравенство Маркова). Пусть X – неотрицательная случайная величина, т.е. $X \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon},$$

где $M(X)$ – математическое ожидание X.

Следствие 1. Так как события $X \geq \varepsilon$ и $X < \varepsilon$ противоположные, то неравенство Маркова можно записать в виде

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Пример 9.1. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте превысит 150 000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50 000 л.

Решение. Используя неравенство Маркова в виде $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$, получим $P(X \geq 150\,000) \leq \frac{50\,000}{150\,000} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $P(X \geq 150\,000) \leq \frac{1}{3}$.

Пример 9.2. Среднее число солнечных дней в году для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 240 солнечных дней.

Решение. Согласно неравенству $P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, имеем $P(X \leq 240) \geq$ $\geq 1 - \frac{90}{240} = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$.

Ответ: $P(X \leq 240) \geq 0{,}625$.

Лемма 2 (неравенство Чебышева). Для любой случайной величины X, имеющей конечную дисперсию и любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Следствие 2. Для любой случайной величины X с конечной дисперсией и любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 9.3. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднеквадратичное отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Решение. Для оценки вероятности используем неравенство Чебышева

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\left|X - 50\right| < 0{,}4\right) \geq 1 - \frac{0{,}2^2}{0{,}4^2} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Ответ: $P\left(\left|X - 50\right| < 0{,}4\right) \geq 0{,}75$.

Пример 9.4. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 кВт/ч, а среднеквадратичное отклонение — 200 кВт/ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева $P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq$ $\geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставим в правую часть неравенства вместо $D(X)$ величину $200^2 = 40\,000$, сделаем ее большей или равной 0,96:

$$1 - \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \geq 0{,}96 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \leq 0{,}04 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 \geq \frac{40\,000}{0{,}04}, \quad \varepsilon \geq 1000.$$

Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,96 потребление электроэнергии $20\,000 \pm 1000$, т.е. $X \in [19\,000; 21\,000]$.

Ответ: от 19 000 до 21 000.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)$ и дисперсиями $D(X_1), D(X_2), \ldots, D(X_n)$, ограниченными одной и той же постоянной $D(X_i) \le C \quad (i = \overline{1,n})$, то какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При доказательстве предельного равенства используется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

которое вытекает из неравенства Чебышева.

Пример 9.5. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднеквадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $n = 1000$, $\varepsilon = 0{,}5$, $C = 5^2 = 25$. Итак, искомая вероятность

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} M(X_i)\right| < 0{,}5\right) \ge 1 - \frac{25}{1000 \cdot 0{,}25} = 0{,}9.$$

Ответ: $P \ge 0{,}9$.

Частными случаями теоремы Чебышева являются теоремы Бернулли и Пуассона.

Теорема Бернулли. При неограниченном увеличении числа независимых опытов частость появления $\frac{m}{n}$ некоторого события A сходится по вероятности к его вероятности $p = P(A)$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

При доказательстве теоремы Бернулли получаем оценку $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq$ $\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$, которая применяется на практике.

Теорема Пуассона. Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в k-м опыте равна p_k, то при увеличинении n частость $\frac{m}{n}$ события A сходится по вероятности к среднеарифметическому вероятностей p_k:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right|<\varepsilon\right)=1,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число. При доказательстве этой теоремы используется неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p_k\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

имеющее практическое применение.

Пример 9.6. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 шт. из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $n=400$, $\varepsilon=0{,}05$. В качестве p возьмем величину, полученную при проверке для доли брака $p=\frac{15}{100}=0{,}15$.

Итак, $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{400\cdot 0{,}05^2}=0{,}8725$.

Ответ: $P\geq 0{,}8725$.

Пример 9.7. Вероятность того, что изделие является качественным, равна 0,9. Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $p=0{,}9$, $q=1-0{,}9=0{,}1$, $\varepsilon=0{,}01$. Подставим в правую часть вышеприведенного неравенства эти значения

$$1-\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{n\cdot 0{,}0001}\geq 0{,}95 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{900}{n}\leq 0{,}05 \quad\Leftrightarrow\quad n\geq 18\,000.$$

Ответ: $n\geq 18\,000$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Случайная величина X распределена по следующему закону:

X	2,1	2,3	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,0
P	0,05	0,09	0,10	0,12	0,14	0,20	0,16	0,10	0,04

Оценить вероятность того, что она примет значение, не превышающее 3,6, пользуясь законом распределения и неравенством Маркова.

Ответ: $P(X\leq 3{,}6)\geq 0{,}14;\quad M(X)=3{,}118.$

9.2. Средний вес клубня картофеля равен 150 г. Оценить вероятность того, что наудачу взятый клубень картофеля весит не более 500 г?

Ответ: $P\geq 0{,}7.$

9.3. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра (при одном наблюдении) не превысит 80 км/ч.

Ответ: $P(X\leq 80)\geq\dfrac{4}{5}$.

9.4. Среднее потребление электроэнергии за май населением одного из микрорайонов Минска равно 360 000 кВт/ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года превзойдет 1 000 000 кВт/ч.

Ответ: $P(X>1\,000\,000)\leq 0{,}36$.

9.5. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma=2^\circ$. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса самолета будет более 5°.

Ответ: $P(X > 5) \le 0{,}16$.

9.6. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения азимута равно $30'$ (математическое ожидание равно нулю). Оценить вероятность того, что ошибка среднего арифметического трех независимых измерений не превзойдет 1°.

Ответ: $P(|X| \le 60) \ge 0{,}917$.

9.7. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Ответ: $P \ge 0{,}75$.

9.8. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Ответ: $P \ge 0{,}9$.

9.9. Среднее квадратическое отклонение каждой из 450 000 независимых случайных величин не превосходит 10. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднеарифметической этих случайных величин от среднеарифметической их математических ожиданий не превзойдет 0,02.

Ответ: $P \ge \frac{4}{9}$.

9.10. Емкость изготовляемого заводом конденсатора по техническим условиям должна быть равной 2 мкф с разрешенным допуском ± 0,1 мкф. Завод добился средней емкости, равной 2 мкф, с дисперсией, равной 0,002 мкф^2. Какой процент составляет вероятный брак при изготовлении конденсаторов? Расчет произвести по неравенству Чебышева и формуле Лапласа.

Ответ: не более 20 %; ≈ 3 %.

9.11. Выборочным путем требуется определить средний рост мужчин двадцатилетнего возраста. Какое количество мужчин, отобранных случайным образом, нужно измерить, чтобы с вероятностью, превышающей 0,98, можно было утверждать, что средний рост у отобранной группы будет отличаться от среднего роста всех двадцатилетних мужчин по абсолютной величине не более чем на 1 см. Известно, что среднеквадратичное отклонение роста для каждого мужчины из отобранной группы не превышает 5 см.

Ответ: $n \geq 1250$.

9.12. Технический контролер проверяет партию однотипных приборов. С вероятностью 0,01 прибор имеет дефект A и, независимо от этого, с вероятностью 0,02 – дефект B. В каких границах будет заключено практически наверняка число бракованных изделий в партии из 1000 шт., если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

Ответ: $0 < m < 128$.

9.13. Оценить вероятность того, что в партии из 5000 изделий отклонение частости бракованных деталей от вероятности 0,02 быть бракованной деталью превысит 0,01.

Ответ: $P \leq 0{,}039$.

9.14. Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0,04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной радиолампы по абсолютной величине не более чем на 0,02?

Ответ: $n = 800$.

9.15. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75 % изделий имеет допуск ± 5 %. Какое число изделий из партии в 200 000 шт. с вероятностью 0,99 можно планировать с допуском ± 5 %?

Ответ: $150\,000 \pm 1936$.

9.16. Произведено 500 независимых испытаний; в 200 из них вероятность появления события A была равна 0,4, в 180 – 0,5 и в 120 – 0,6. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости от средней вероятности не превысит по абсолютной величине 0,05.

Ответ: $P \geq 0{,}807$.

9.17. Стрельба ведется поочередно из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из каждого орудия равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. Таким образом, произведено 600 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости от средней вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,05.

Ответ: $P \geq \frac{193}{225}$.

9.18. Из 5000 произведенных испытаний в 2000 вероятность появления события A равна 0,2, в 1400 – 0,5 и в 1600 – 0,6. Найти границы, в которых должна находиться частость появления события A, если это необходимо гарантировать с вероятностью 0,95.

Ответ: $0{,}382 \leq \frac{m}{n} \leq 0{,}443$.

10. Распределение функции одного и двух случайных аргументов

Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называется функцией случайного аргумента X и записывается $Y = \varphi(X)$.

Если X – дискретная случайная величина и функция $Y = \varphi(X)$ монотонна, то различным значениям X соответствуют различные значения Y, причем вероятности соответствующих значений X и Y одинаковы:

$$y_i = \varphi(x_i) \text{ и } P(Y = y_i) = P(X = x_i).$$

Если же $Y = \varphi(X)$ немонотонная функция, то различным значениям X могут соответствовать одинаковые значения Y. В этом случае для отыскания вероятностей возможных значений Y следует сложить вероятности тех возможных значений X, при которых Y принимает одинаковые значения.

Пример 10.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	5	7
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Найти закон распределения случайной величины Y, равной $2X$.

Решение. Находим возможные значения Y:

$Y_1 = 2x_1 = 2 \cdot 2 = 4$; $Y_2 = 2x_2 = 2 \cdot 3 = 6$; $Y_3 = 2x_3 = 2 \cdot 5 = 10$; $Y_4 = 2x_4 = 14$.

Так как функция $\varphi(x)$ монотонна, то вероятности $P(y_i) = P(x_i)$, т.е.

$$P(Y=4)=P(X=2)=0{,}3;\ P(Y=6)=P(X=3)=0{,}2;$$

$$P(Y=10)=P(X=5)=0{,}1;\ P(Y=14)=P(X=7)=0{,}4.$$

Запишем искомый закон распределения Y

Y	4	6	10	14
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Пример 10.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	–3	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Находим возможные значения случайной величины $Y=X^2$: $Y_1=(-3)^2=9$; $Y_2=(-2)^2=4$; $Y_3=(-1)^2=1$; $Y_4=0^2=0$; $Y_5=1^2=1$; $Y_6=2^2=4$. Значения $Y_1=9$ и $Y_4=0$ встречаются только по одному разу, а значения $Y_2=Y_6=4$ совпадают, поэтому вероятность того, что $Y=4$, будет равна сумме вероятностей 0,2 + 0,1 = 0,3. Аналогично, $Y_3=Y_5=1$, поэтому $P(Y=1)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.

Напишем искомый закон распределения Y, расположив значения Y в порядке возрастания

Y	0	1	4	9
P	0,1	0,5	0,3	0,1

Если X – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $p(x)$, и если $y=\varphi(x)$ – дифференцируемая строго монотонная функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $p(y)$ случайной величины Y находят из равенства

$$p(y)=p(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|.$$

Если функция $y=\varphi(x)$ в интервале возможных значений X не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределения $p_i(y)$ для каждого интервала монотонности, а затем представить $p(y)$ в виде суммы $p(y)=\sum p_i(y)$.

Пример 10.3. Задана плотность распределения $p(x)$ случайной величины *X*, возможные значения которой заключены в интервале (a, b). Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X$.

Решение. Так как функция $y = 3x$ дифференцируемая и строго возрастает, то применима формула $p(y) = p(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$, где $\psi(y)$ — функция, обратная функции $y = 3x$.

Находим $\psi(y)$: $\psi(y) = x = \frac{y}{3}$. Тогда $p(\psi(y)) = p\left(\frac{y}{3}\right)$, $|\psi'(y)| = \frac{1}{3}$. Искомая плотность распределения $p(y) = \frac{1}{3}p\left(\frac{y}{3}\right)$. Так как x изменяется в интервале (a, b) и $y = 3x$, то $3a < y < 3b$.

Ответ: $p(y) = \frac{1}{3}p\left(\frac{y}{3}\right)$, $y \in (3a, 3b)$.

Пример 10.4. Случайная величина *X* распределена по закону Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3 + 2$.

Решение. Функция $y = x^3 + 2$ монотонно возрастает при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Находим обратную функцию $\psi(y)$: $\psi(y) = x = \sqrt[3]{y-2}$. Тогда

$$p(\psi(y)) = \frac{1}{\pi\left(1 + \sqrt[3]{(y-2)^2}\right)}, \quad \psi'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}}, \quad |\psi'(y)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}}.$$

Следовательно,

$$p(y) = p(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi\left(1+\sqrt[3]{(y-2)^2}\right)} \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}} = \frac{1}{3\pi\left(\sqrt[3]{(y-2)^2} + \sqrt[3]{(y-2)^4}\right)}.$$

Ответ: $p(y) = \frac{1}{3\pi\left(\sqrt[3]{(y-2)^2} + \sqrt[3]{(y-2)^4}\right)}$.

Пример 10.5. Задана плотность $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ нормально распределенной случайной величины *X*. Найти плотность распределения $p(y)$ случайной величины $Y = X^2$.

Решение. Так как в интервале $(-\infty; +\infty)$ функция $y = x^2$ не монотонна, то разобъем этот интервал на интервалы $(-\infty; 0)$и $(0; +\infty)$, в которых она монотонна. В интервале $(-\infty; 0)$обратная функция $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$, в интервале $(0; +\infty)$ $\psi_2(y) = \sqrt{y}$, $\left|\psi_1'(y)\right| = \left|\psi_2'(y)\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $p(\psi_1(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$, $p(\psi_2(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$.

Искомую плотность распределения находим из равенства

$$p(y) = p(\psi_1(y)) \cdot \left|\psi_1'(y)\right| + p(\psi_2(y)) \cdot \left|\psi_2'(y)\right|,$$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

Так как $y = x^2$, причем $-\infty < x < +\infty$, то $0 < y < \infty$. Таким образом, в интервале $(0; +\infty)$ искомая плотность распределения $p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$, вне этого интервала $p(y) = 0$.

Ответ: $p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$ при $y \in (0; +\infty)$, $p(y) = 0$ при $y \in (-\infty; 0)$.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3	5
P	0,4	0,1	0,5

Найти закон распределения случайной величины $Y = 3X$.

Ответ:

Y	3	9	15
P	0,4	0,1	0,5

10.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X + 1$.

Ответ:

Y	7	13	21
P	0,2	0,1	0,7

10.3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	–1	–2	–1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

Ответ:

Y	1	4
P	0,5	0,5

10.4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

Ответ:

Y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
P	0,3	0,7

10.5. Задана плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале $(0; \infty)$. Найти плотность распределения $p(y)$ случайной величины Y, если а) $Y = e^{-X}$; б) $Y = \ln X$; в) $Y = X^3$; г) $Y = \dfrac{1}{X^2}$; д) $Y = \sqrt{X}$.

Ответ: а) $p(y) = \dfrac{1}{y} p\left(\ln\dfrac{1}{y}\right)$, $y \in (0; 1)$; б) $p(y) = e^y p\left(e^y\right)$, $y \in (-\infty; \infty)$;

в) $p(y)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\,p\left(\sqrt[3]{y}\right), y\in(0;+\infty)$; г) $p(y)=\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}\,p\left(\dfrac{1}{y}\right),\ y\in(0;+\infty)$;

д) $p(y)=2yp\left(y^2\right),\ y\in(0;+\infty)$.

10.6. Задана плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале $(-\infty;\infty)$. Найти плотность распределения $p(y)$ случайной величины Y, если а) $Y=X^2$; б) $Y=e^{-X^2}$; в) $Y=|X|$; г) $Y=\mathrm{arctg}X$; д) $Y=\dfrac{1}{1+X^2}$.

Ответ: а) $p(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(p\left(\sqrt{y}\right)+p\left(-\sqrt{y}\right)\right),\ y\in(0;+\infty)$;

$$б)\ p(y)=\frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}}\left(p\left(\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)+p\left(-\sqrt{\ln y}\right)\right),\ y\in(0;1);$$

$$в)\ p(y)=p(y)+p(-y),\ y\in(0;+\infty);$$

$$г)\ p(y)=\frac{1}{\cos^2 y}\,p(\mathrm{tg}y),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$д)\ p(y)=\frac{1}{2y^2\sqrt{\frac{1}{y}-1}}\,p\left(\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)+p\left(-\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right),\ y\in(0;1).$$

10.7. Задана плотность распределения $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ нормально распределенной случайной величины X. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\dfrac{1}{2}X^2$.

Ответ: $p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}$ в интервале $(0;\infty)$; вне этого интервала $p(y)=0$.

10.8. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F(y)$ случайной величины $Y=3X+2$.

Ответ: $F(y)=F\left(\dfrac{y-2}{3}\right)$.

10.9. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F(y)$ случайной величины $Y = -\frac{2}{3}X + 2$.

Ответ: $F(y) = 1 - F\left(\frac{3(2-y)}{2}\right)$.

10.10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F(y)$ случайной величины Y, если а) $Y = 4X + 6$; б) $Y = -5X + 1$; в) $Y = aX + b$.

Ответ: а) $F(y) = F\left(\frac{y-6}{4}\right)$; б) $F(y) = 1 - F\left(\frac{1-y}{5}\right)$;

в) $F(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$ при $a > 0$, $F(y) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)$ при $a < 0$.

Функция двух случайных аргументов

Если каждой паре возможных случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y и пишут

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Если X и Y – дискретные независимые случайные величины, то для нахождения распределения функции $Z = \varphi(X, Y)$, надо найти все возможные значения Z, для чего достаточно для каждого возможного значения X, равного x_i, и каждого возможного значения Y, равного y_j, вычислить значение Z, равное $z_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$. Вероятности найденных возможных значений Z равны произведениям вероятностей $P(X = x_i)$ и $P(Y = x_j)$.

Пример 10.6. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	–2	–1	3	4
P	0,3	0,1	0,5	0,1

Y	1	2	3
P	0,4	0,1	0,5

Найти распределения случайных величин: а) $Z = X + Y$; б) $Z = 2X - Y$; в) $Z = XY$; г) $Z = XY^2$.

Решение. Для того чтобы составить указанные распределения величины Z, надо найти все возможные значения Z и их вероятности. Все вычисления поместим в таблицу

X	Y	$Z = X + Y$	$Z = 2X - Y$	$Z = XY$	$Z = XY^2$	$P(Z) = P(X)P(Y)$
–2	1	–1	–5	–2	–2	0,3 · 0,4 = 0,12
–2	2	0	–6	–4	–8	0,3 · 0,1 = 0,03
–2	3	1	–7	–6	–18	0,3 · 0,5 = 0,15
–1	1	0	–3	–1	–1	0,1 · 0,4 = 0,04
–1	2	1	–4	–2	–4	0,1 · 0,1 = 0,01
–1	3	2	–5	–3	–9	0,1 · 0,5 = 0,05
3	1	4	5	3	3	0,5 · 0,4 = 0,20
3	2	5	4	6	12	0,5 · 0,1 = 0,05
3	3	6	3	9	27	0,5 · 0,5 = 0,25
4	1	5	7	4	4	0,1 · 0,4 = 0,04
4	2	6	6	8	16	0,1 · 0,1 = 0,01
4	3	7	5	12	36	0,1 · 0,5 = 0,05
						1,00

Объединив одинаковые значения Z и расположив их в порядке возрастания, получим следующие распределения:

а)

$Z = X + Y$	–1	0	1	2	4	5	6	7
P	0,12	0,07	0,16	0,05	0,20	0,09	0,26	0,05

б)

$Z = 2X - Y$	–7	–6	–5	–4	–3	3	4	5	6	7
P	0,15	0,03	0,17	0,01	0,04	0,25	0,05	0,25	0,01	0,04

в)

$Z = XY$	–6	–4	–3	–2	–1	3	4	6	8	9	12
P	0,15	0,03	0,05	0,13	0,04	0,20	0,04	0,05	0,01	0,25	0,05

г)

$Z = XY^2$	–18	–9	–8	–4	–2	–1	3	4	12	16	27	36
P	0,15	0,05	0,03	0,01	0,12	0,04	0,2	0,04	0,05	0,01	0,25	0,05

Если X и Y непрерывные независимые случайные величины, то плотность распределения $p(z)$ суммы $Z = X + Y$ (при условии, что плотность распределения хотя бы одного из аргументов задана в интервале $(-\infty; +\infty)$ одной формулой) может быть найдена по формуле

$$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(z-x)\,dx,$$

либо по равносильной формуле

$$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z-y)p_2(y)\,dy,$$

где p_1 и p_2 – плотности распределения аргументов.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то плотность распределения $p(z)$ величины $Z = X + Y$ находят по формуле

$$p(z)=\int_{0}^{z} p_1(x)p_2(z-x)\,dx,$$

либо по равносильной формуле

$$p(z)=\int_{0}^{z} p_1(z-y)p_2(y)\,dy.$$

В том случае, когда обе плотности $p_1(x)$ и $p_2(y)$ заданы на конечных интервалах, для отыскания плотности $p(z)$ величины $Z = X + Y$ целесообразно сначала найти функцию распределения $F(z)$, а затем продифференцировать ее по Z

$$p(z)=F'(z).$$

Если X и Y – независимые случайные величины, заданные соответствующими плотностями распределения $p_1(x)$ и $p_2(y)$, то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу по этой области от произведения плотностей распределения

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D p_1(x)p_2(y)\,dx\,dy.$$

Пример 10.7. Независимые нормально распределенные случайные величины X и Y заданы плотностями распределений $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $p_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. Найти композицию этих законов, т.е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Используем формулу $p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(z-x)\,dx$. Тогда

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2-xz\right)}dx=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2-xz+\frac{z^2}{4}\right)+\frac{z^2}{4}} dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} d\left(x-\frac{z}{2}\right)=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Ответ: $p(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$.

Пример 10.8. Заданы плотности распределения независимых равномерно распределенных случайных величин X и Y: $p_1(x)=\dfrac{1}{2}$ в интервале (0; 2), вне этого интервала $p_1(x)=0$, $p_2(y)=\dfrac{1}{3}$ в интервале (0; 3), вне этого интервала $p_2(y)=0$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$. Построить график распределения $p(z)$.

Решение. По условию, возможные значения X определяются неравенством $0<x<2$, Y — неравенством $0<y<3$. Отсюда следует, что возможные случайные точки $(X;Y)$ расположены в прямоугольнике $OABC$ (рис. 10.1).

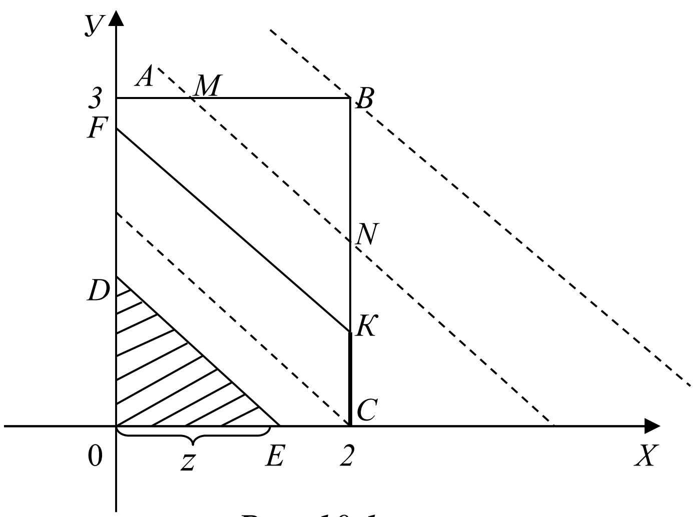

Рис. 10.1

Неравенству $x+y<z$ удовлетворяют те точки $(x;y)$ плоскости XOY, которые лежат ниже прямой $Z=X+Y$; если же брать только возможные значения x и y, то неравенство $x+y<z$ выполняется только для точек, лежащих в прямоугольнике $OABC$ ниже прямой $x+y=z$. С другой стороны, так как величины X и Y независимы, то

$$F(z)=\iint\limits_{(S)} p_1(x)p_2(y)\,dx\,dy=\frac{1}{6}\iint\limits_{(S)} dx\,dy=\frac{1}{6}S,$$

где S — величина той части площади прямоугольника $OABC$, которая лежит ниже прямой $x+y=z$. Величина этой площади зависит от значения z.

Если $z\le 0$, то $S=0$, т.е. $F(z)=0$.

Если $z\in(0;2]$, то $F(z)=\frac{1}{6}S_{\Delta ODE}=\frac{1}{6}\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{12}z^2$.

Если $z\in(2;3]$, то $F(z)=\frac{1}{6}S_{\eth\eth .OFK\tilde{N}}=\frac{1}{6}\left(\frac{OF+KC}{2}OC\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{z+z-2}{2}\cdot 2\right)=$

$=\frac{1}{3}(z-1)$.

Если $z\in(3;5]$, то $F(z)=\frac{1}{6}S_{OAMNC}=\frac{1}{6}(6-S_{MNB})=\frac{1}{6}\left(6-\frac{1}{2}(5-z)^2\right)=$

$=1-\frac{1}{12}(5-z)^2$.

Если $z>5$, то $F(z)=\frac{1}{6}\cdot 6=1$.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(z)=\begin{cases} 0 \text{ при } z\le 0, \\ \frac{1}{2}(z-1) \text{ при } z\in(0;2], \\ \frac{1}{3}(z-1) \text{ при } z\in(2;3], \\ 1-\frac{1}{12}(5-z)^2 \text{ при } z\in(3;5], \\ 1 \text{ при } z>5. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения

$$p(z)=\begin{cases}0 \text{ при } z\le 0,\\ \dfrac{z}{6} \text{ при } z\in(0;2],\\ \dfrac{1}{3} \text{ при } z\in(2;3],\\ \dfrac{1}{6}(5-z) \text{ при } z\in(3;5],\\ 0 \text{ при } z>5.\end{cases}$$

Построим график этой функции (рис. 10.2)

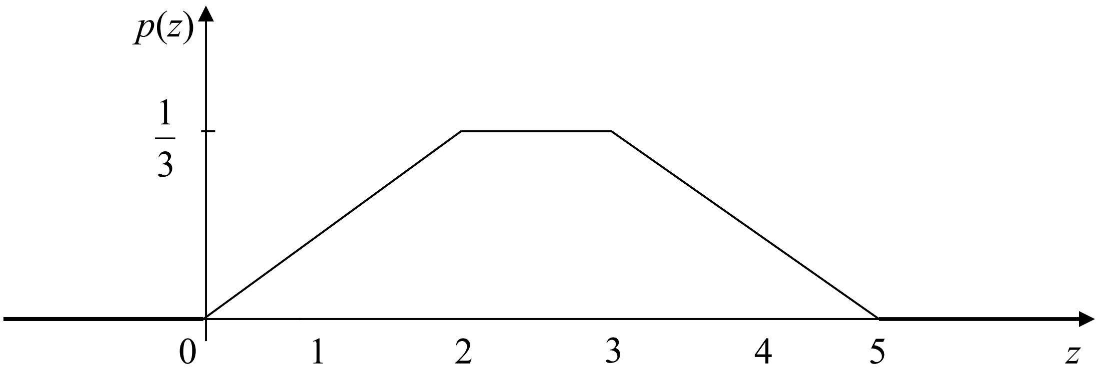

Рис. 10.2

Задачи для самостоятельного решения

10.11. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найти распределение случайной величины $Z=X+Y$.

Ответ:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

10.12. Дискретные случайные величины X и Y заданы распределениями:

а)

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

б)

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,8	0,2

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Ответ: а)

Z	11	12	13	14	17	18
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

б)

Z	5	11	17
P	0,56	0,38	0,06

10.13. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений: $p_1(x) = e^{-x}$ $\quad (0 \le x < \infty)$, $p_2(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2}$ $\quad (0 \le y < \infty)$. Найти композицию этих законов, т.е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Ответ: $p(z) = e^{-z/2}\left(1 - e^{-z/2}\right)$ при $z \ge 0$, 0 при $z < 0$.

10.14. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений: $p_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3}$ $\quad (0 \le x < \infty)$, $p_2(y) = \frac{1}{5} e^{-y/5}$ $\quad (0 \le y < \infty)$. Найти плотность случайной величины $Z = X + Y$.

Ответ: $p(z) = 0$ при $z < 0$, $p(z) = \frac{1}{2} e^{-z/5}\left(1 - e^{-2z/15}\right)$ при $z \ge 0$.

10.15. Заданы плотности равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y: $p_1(x) = 1$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $p_1(x) = 0$, $p_2(y) = 1$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $_2(y) = 0$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Z = X + Y$.

Ответ: $F(z) = \begin{cases} 0 \text{ при } z \le 0, \\ \dfrac{z^2}{2} \text{ при } z \in (0;1], \\ 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2} \text{ при } z \in (1;2], \\ 1 \text{ при } z > 2. \end{cases}$ $\quad p(z) = \begin{cases} 0 \text{ при } z \le 0, \\ z \text{ при } 0 < z \le 1, \\ 2 - \mathrm{z} \text{ при } 1 < z \le 2, \\ 0 \text{ при } z > 2. \end{cases}$

10.16. Заданы плотности распределения равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y: $p_1(x)=\frac{1}{2}$ в интервале $(1;3)$, вне этого интервала $p_1(x)=0$, $p_2(y)=\frac{1}{4}$ в интервале $(2;6)$, вне этого интервала $p_2(y)=0$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$. Построить график плотности распределения $p(z)$.

Ответ: $F(z)=\begin{cases} 0 \text{ при } z\le 3, \\ \frac{(z-3)^2}{16} \text{ при } 3<z\le 5, \\ \frac{z}{4}-1 \text{ при } 5<z\le 7, \\ 1-\frac{(9-z)^2}{16} \text{ при } 7<z\le 9, \\ 1 \text{ при } z>9. \end{cases}$ $p(z)=\begin{cases} 0 \text{ при } z\le 0, \\ \frac{z-3}{8} \text{ при } 3<z\le 5, \\ \frac{1}{4} \text{ при } 5<z\le 7, \\ \frac{9-z}{8} \text{ при } 7<z\le 9, \\ 0 \text{ при } z>9. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения* функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3980	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

* Все значения умножены на 10 000.

Значения* функции $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40387	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	85547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	87798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

* Все значения умножены на 100 000.

Приложение 3

Таблица значений функции Пуассона

$$P(X = m) = P_{n,\,m} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3596	0,3696
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	–	–	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	–	–	–	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	–	–	–	–	–	–	0,0001	0,0002	0,0003

m \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0055
3	0,0313	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1618	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0081	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1318
8	–	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	–	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,0318
10	–	–	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1180
11	–	–	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	–	–	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	–	–	–	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	–	–	–	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	–	–	–	–	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16	–	–	–	–	–	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17	–	–	–	–	–	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	–	–	–	–	–	–	0,0002	0,0009	0,0029
19	–	–	–	–	–	–	0,0001	0,0004	0,0014
20	–	–	–	–	–	–	–	0,0002	0,0006
21	–	–	–	–	–	–	–	0,0001	0,0003
22	–	–	–	–	–	–	–	–	0,0001

ЛИТЕРАТУРА

Герасимович А.И., Матвеева Я.И. Математическая статистика. Мн., 1978.

Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Мн., 1984.

Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике и математической статистике. Мн., 1976.

Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. задач по математике для вузов / Э.А. Вуколов, А.В. Ефимов, В.Н. Земсков и др.; Под ред. А.В. Ефимова. Мн., 1990.

Мацкевич И.П., Свирид Г.П., Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Мн., 1996.

Белько И.В., Свирид Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Мн., 2002.

Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов. Ростов-н/Д., 1999.