

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УО «Белорусский государственный экономический университет»

Конюх А.В., Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Рабцевич В.А.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть I

Минск 2014

Оглавление

Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.....	5
1.1. Матрицы. Операции над матрицами	5
1.2. Определители и их свойства. Правило Крамера решения системы линейных уравнений.....	10
1.3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.....	16
1.4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.....	20
1.5. Ранг матрицы. Теорема о совместности системы линейных уравнений	25
Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ	30
2.1. Векторы на плоскости и в пространстве	30
2.2. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов.....	37
2.3. Векторное и смешанное произведение векторов	41
2.4. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Ранг и базис системы векторов	46
Глава 3. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.....	52
3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости	52
3.2. Прямая линия на плоскости	60
3.3. Совместное исследование уравнений прямых.....	63
3.4. Кривые второго порядка, заданные каноническими уравнениями	74
3.4.1. Эллипс	74
3.4.2. Гипербола	87
3.4.3. Парабола	95
3.5. Прямая и плоскость в пространстве	100
3.5.1. Плоскость в пространстве	101
3.5.2. Уравнения прямой в пространстве	109
3.5.3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми в пространстве	111
3.5.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве ...	119
3.6. Понятие гиперплоскости. Выпуклые множества	126
Глава 4. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	131
4.1. Функциональная зависимость и способы ее представления.....	131
4.2. Элементарные функции. Преобразование графиков функций.....	139
Глава 5. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ.....	144
5.1. Числовая последовательность.....	144
5.2. Предел последовательности.....	148
5.3. Предел функции. Раскрытие простейших неопределенностей.....	156
5.4. Замечательные пределы.....	164
5.5. Сравнение бесконечно малых	168
5.6. Односторонние пределы	173
5.7. Непрерывность и точки разрыва функции	176

Глава 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	184
6.1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл	184
6.2. Дифференцирование функций	195
6.3. Дифференциал функции	208
6.4. Производные и дифференциалы высших порядков	214
6.5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталю	221
6.6. Основные свойства дифференцируемых функций	224
6.7. Исследование функций	232
6.8. Предельный анализ в экономике	246
Ответы	258
Литература	274

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время для решения теоретических и практических задач экономики требуется серьёзная математическая подготовка специалистов. Практикум включает следующие главы: линейная алгебра, элементы векторной алгебры, аналитическая геометрия, функция одной переменной, пределы и непрерывность, дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Особенностью данного практикума является наличие большого числа решенных типовых задач различных уровней сложности, что делает его полезным для студентов как дневной, так и заочной форм обучения.

Главы разбиты на параграфы, в которых приводятся основные теоретические положения, решения типовых примеров, математические модели, составленные на основе экономических задач, задачи для самостоятельного решения.

В написании практикума принимали участие следующие авторы: гл. 1–2 – А.В. Конюх, гл. 3 – О.Н. Поддубная, гл. 4–5 – С.В. Майоровская, гл. 6 – В.А. Рабцевич.

Большая часть задач, приведенных в пособии, составлена авторами, использовались также классические задачи из других источников.

Цветовое оформление издания призвано выделить в тексте определения основных понятий (**оттенки оранжевого цвета**), принципиальные положения теории (**оттенки зеленого цвета**) и формулы и алгоритмы (**оттенки голубого цвета**). Наиболее важные элементы дополнительно выделены цветной рамкой и фоновой заливкой. Двухцветное выделение указывает на присутствие в фрагменте информации двух типов.

Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, записываемая в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$. Для указания размеров матрицы используют запись $A_{m \times n}$. Например, матрица $A_{3 \times 4}$ имеет 3 строки и 4 столбца.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется *матрицей-строкой* или *матрицей-столбцом* соответственно.

Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Матрицу размером $m \times n$ с элементами a_{ij} обозначают также $(a_{ij})_{m \times n}$.

Две матрицы A и B одинаковых размеров называются *равными*, если равны все их элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Если число строк матрицы A равно числу ее столбцов, т.е. $m = n$, то матрицу называют *квадратной* порядка n и обозначают A_n . Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей*. Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется *единичной матрицей* и обозначается E .

Например, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, – единичная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется такое ее преобразование, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров и порядком следования элементов. Матрица, полученная транспонированием матрицы A , называется транспонированной и обозначается A^T . Таким образом, $A^T = (a'_{ij})_{n \times m}$, где $a'_{ji} = a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

$$\text{Например, } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

При транспонировании матрицы-столбца получается матрица-строка и наоборот.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$, т.е. при умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число.

$$\text{Например, } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$, т.е. при сложении двух матриц складываются их соответствующие элементы. Операция сложения определена только для матриц одинаковых размеров.

$$\text{Например, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Тогда } A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B определено только тогда, когда количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B (в этом случае матрица A называется согласованной с матрицей B).

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times l}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{l \times n}$ называется матрица $AB = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Иначе говоря, элемент i -й строки и j -го столбца матрицы AB равен сумме произведений всех элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B . Количество строк матрицы AB равно количеству строк матрицы A , а количество столбцов – количеству столбцов матрицы B .

Пример 1.1. Найти те из произведений AB и BA , которые определены, если

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица A содержит 2 столбца, а матрица B – 2 строки, поэтому матрица AB существует. Так как матрица A содержит 2 строки, а матрица B – 3 столбца, то матрица AB имеет размеры 2×3 :

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 \\ 11 & 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

Произведение BA не существует, поскольку количество столбцов матрицы B не совпадает с количеством строк матрицы A .

Пример 1.2. Найти произведения AA^T и $A^T A$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\text{Решение. } AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = [1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 5 \cdot 5] = [30],$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 5 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{bmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если

$$AB = BA.$$

Возведение матрицы в степень m , где m – целое положительное число, определяется так же, как и возведение в степень действительного числа, т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}.$$

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Пример 1.3. Найти A^2 , если $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.

Пусть $f(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_m$ есть многочлен с действительными коэффициентами. Многочленом от квадратной матрицы A называется матрица $f(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_m E$, порядок которой совпадает с порядком матрицы A .

Пример 1.4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. $f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Даны матрицы A и B . Найти $A + B$, $2A - B$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

1.2. Дана матрица A . Найти AA^T и $A^T A$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; д) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; е) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3. Даны матрицы A, B, C . Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB , которые имеют смысл:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1.4. При каком значении α матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} \alpha & 7 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}$ перестановочны?

1.5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

1.6. Найти $A^2 - 5A + 3E$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

1.7. Найти $2A^2 - A + 2E$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.8. При каких значениях α и β квадрат матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ равен нулевой матрице?

1.2. Определители и их свойства. Правило Крамера решения системы линейных уравнений

Определителем второго порядка, или определителем матрицы $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, называется число, обозначаемое $\det A_2$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, вычисляемое по правилу

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.1)$$

Определителем третьего порядка, или определителем матрицы $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, называется число, обозначаемое $\det A_3$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, вычисляемое по правилу

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Для обозначения определителей часто используют греческую букву Δ .

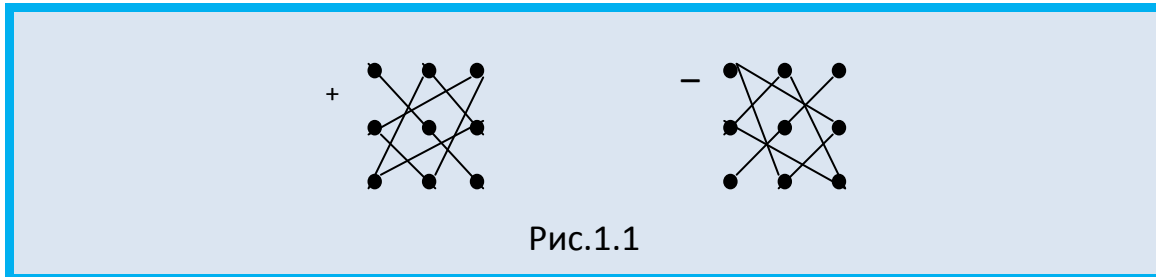
Элементы a_{11}, a_{22} и a_{11}, a_{22}, a_{33} определителей $\det A_2$ и $\det A_3$ соответственно образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{21}, a_{12} и a_{31}, a_{22}, a_{13} – побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2.$$

Правило (1.2) можно записать следующим образом:

$$\det A_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}). \quad (1.3)$$

Для запоминания формулы (1.3) удобно использовать *правило треугольников*, схема которого приведена на рис.1.1: первые три слагаемых представляют собой произведения элементов главной диагонали определителя, а также элементов, находящихся в вершинах треугольников, симметричных относительно побочной диагонали; остальные три слагаемых – взятые с противоположными знаками произведения элементов побочной диагонали, а также элементов, находящихся в вершинах треугольников, симметричных относительно главной диагонали.



Пример 1.5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. По правилу треугольников имеем

$$\Delta = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - ((-3) \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \cdot 1) = 71.$$

Основные свойства определителей.

1. Определитель матрицы не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\det A = \det A^T.$$
2. Если поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.
3. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то значение определителя умножится на это же число. Как следствие, общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
4. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.
5. Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
6. Если ко всем элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.
7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 11 = -88.$

Определитель второго порядка, который получается из определителя $\det A_3$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, называется *минором элемента* a_{ij} определителя $\det A_3$ и обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя $\det A_3$ называется минор M_{ij} , взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Учитывая эти определения, равенство (1.2) запишем в виде

$$\det A_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\det A_3 = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.4)$$

$$\det A_3 = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Равенство (1.4) называется разложением определителя по элементам i -й строки, а равенство (1.5) – разложением определителя по элементам j -го столбца.

Пример 1.6. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к третьему столбцу определителя второй столбец, а к первому – второй столбец, умноженный на 2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 10 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (16 - 8) = 8.$$

Определителем n -го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, а M_{ij} – определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i -й строки и j -го столбца (по аналогии с определителями третьего порядка, M_{ij} и A_{ij} называются соответственно минором и алгебраическим дополнением элемента a_{ij}).

Все свойства определителей 3-го порядка справедливы также для определителей любого порядка n .

Пример 1.7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & 3 \\ 7 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Прибавим к третьей строке определителя вторую, умноженную на 2, а к четвертой – вторую строку, умноженную на (-3) . Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее к третьему столбцу полученного определителя прибавим второй, умноженный на 5:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 14 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 2 \cdot (42 - 60) = -36.$$

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \quad (1.6)$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется определителем системы (1.6).

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по *формулам Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad (1.7)$$

где $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Пример 1.8. Решить систему $\begin{cases} 2x - y - 3z = 4, \\ x + 2y + 4z = 4, \\ 3x - y + 2z = 1. \end{cases}$

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27$. Так как $\Delta \neq 0$,

то система имеет единственное решение, которое мы найдем по формулам (1.7). Вычислим остальные три определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 81, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27.$$

Следовательно, $x = \frac{54}{27} = 2$, $y = \frac{81}{27} = 3$, $z = \frac{-27}{27} = -1$. Решение системы

можно также записать в виде упорядоченной тройки чисел $(2; 3; -1)$. Правильность решения проверяется подстановкой найденных значений x , y и z в уравнения системы.

Формулы (1.7) можно также обобщить для системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Задачи для самостоятельного решения

1.9. Вычислить определители второго порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

1.10. Вычислить определители с помощью правила треугольников:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha & 1 \\ \sin \beta & 1 & \cos \beta \\ 1 & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

1.11. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.12. Вычислить определители с помощью теоремы Лапласа:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 30 & 8 & 5 \\ -15 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.13. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.14. Решить уравнения:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x-2 & -x \\ 4 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -7 & -1 \\ x & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

1.15. Решить системы уравнений по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 9, \\ 2x + 3y - 2z = -5, \\ 3x - y - z = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + 3z = -9, \\ 8x + 3y + 5z = -13, \\ 2x + 5y - z = -5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x + 4y + 7z = -1, \\ -2x + 5y - 3z = 1, \\ 5x - 6y + 11z = -3. \end{cases}$$

1.3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель $\det A \neq 0$, и *вырожденной*, если $\det A = 0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица n -го порядка.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} .

Пример 1.9. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение. Находим $\det A = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Далее выписываем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 6 = -6,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-2) = -2.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,6 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим также $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Систему (1.9) теперь можно записать в виде *матричного уравнения*:

$$AX = B. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) называется *матричной формой* системы (1.9). Пусть матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножив обе части равенства (1.10) на A^{-1} слева, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

откуда, учитывая, что $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, имеем:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.11)$$

Равенство (1.11) называется *матричной записью решения* системы (1.9).

Пример 1.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Находим $\det A = -20$ и обратную матрицу

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & -15 \\ -11 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Далее по формуле (1.11) имеем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & -15 \\ -11 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -78 - 12 + 30 \\ -75 - 10 + 45 \\ -33 - 2 + 15 \end{bmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -60 \\ -40 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение данной системы $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Правильность решения проверяем подстановкой в уравнения системы.

Пример 1.12. Решить матричное уравнение

$$X \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Обозначим $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. Умножим обе части уравнения

справа на матрицу $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,6 & -0,2 \end{bmatrix}$ (см. пример 1.8). Получим

$$X = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,6 & -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-1 \\ 0,8+1,2 & 0,6+0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.16. Найти матрицу, обратную данной:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 \\ \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

1.17. При каком значении λ матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ не имеет обратной?

1.18. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -4, \\ x_2 - 6x_3 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.19. Решить матричное уравнение:

а) $X \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$;

г) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Переход от системы (1.12) к системе (1.13) или (1.14) называется *прямым ходом* метода Гаусса. *Обратный ход* метода Гаусса заключается в нахождении неизвестных $x_1, \dots, x_n$ из полученной системы.

В случае приведения к треугольному виду (1.13) из последнего уравнения находится неизвестная x_n , значение которой подставляется в предпоследнее уравнение, и так последовательно находятся остальные неизвестные. Система при этом имеет единственное решение.

В случае приведения к ступенчатому виду неизвестные $x_1, \dots, x_k$, называемые *базисными*, будут выражаться через *свободные* неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$; система при этом имеет бесконечно много решений.

Если в результате прямого хода метода Гаусса будет получено уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b'_l, b'_l \neq 0$, то система несовместна.

На практике прямой ход метода Гаусса удобнее выполнять, преобразуя не саму систему, а ее расширенную матрицу

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Пример 1.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right].$$

Прибавим ко второй строке матрицы первую, умноженную на (-2) , а к третьей – первую, умноженную на (-1) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

Далее прибавим к третьей строке вторую, умноженную на $\left(-\frac{2}{3}\right)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{array} \right].$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = 5, \\ \frac{5}{3}x_3 = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 1$, подставив во второе уравнение, получим $3x_2 = 5 + 1 = 6$, отсюда $x_2 = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 3 + 2 - 1 = 4$, т.е. решением системы является тройка чисел $(4; 2; 1)$.

Пример 1.14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы, предварительно для удобства вычислений поменяв местами первое и второе уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17, \end{cases}$$

откуда выражаем базисные неизвестные x_1, x_2 через свободные x_3, x_4 :

$$x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \text{ и } x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Система имеет бесконечное множество решений, которые можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3, \\ x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4, \\ x_3 \in \mathbb{R}, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Пример 1.15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 2, \\ 2x + y + z = 5, \\ 3x + 4y = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Прямой ход метода Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right].$$

Поскольку третье уравнение системы, соответствующей полученной матрице, имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -5$, делаем вывод, что система несовместна, так как $0 \neq -5$.

Задачи для самостоятельного решения

1.20. Методом Гаусса решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 22x_2 - 7x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -3x_1 + 8x_2 + 8x_3 = -10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$$

1.21. Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 = -13, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -9; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 16x_1 - 7x_2 + 16x_3 + 18x_4 = 20, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 29; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

1.5. Ранг матрицы. Теорема о совместности системы линейных уравнений

Пусть дана матрица $A_{m \times n}$. Выберем в матрице A любые k строк и k столбцов, где $k \leq \min(m, n)$. Определитель, составленный из элементов матрицы A , стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, называется минором k -го порядка матрицы A .

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы A обозначается $\text{rang } A$.

Отметим, что:

- 1) ранг матрицы не может превосходить количество строк или столбцов данной матрицы;
- 2) $\text{rang } A = 0$ тогда и только тогда, когда матрица A нулевая.

Пример 1.16. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как матрица A содержит 3 строки, то $\text{rang } A \leq 3$. Вычислим все миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры третьего порядка равны 0, поэтому $\text{rang } A \leq 2$. Минор второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, следовательно, $\text{rang } A = 2$.

В общем случае определение ранга матрицы путем перебора всех миноров достаточно трудоемко. Для упрощения данной задачи матрицу A с помощью элементарных преобразований, не изменяющих ранг матрицы, приводят к ступенчатому виду

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, r$.

Минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0$$

полученной ступенчатой матрицы (1.15) называется базисным. Его порядок равен r , следовательно, ранг матрицы (1.15), как и ранг матрицы A , равен r .

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- 1) отбрасывание нулевой строки (столбца);
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на отличное от нуля число;
- 3) перестановка местами любых двух строк (столбцов) матрицы;
- 4) прибавление к каждому элементу строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;
- 5) транспонирование матрицы.

Пример 1.17. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение. Отнимем от третьей строки матрицы A первую, а от второй – удвоенную первую строку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

затем прибавим к третьей строке вторую и отбросим полученную нулевую строку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Базисный минор полученной матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ имеет второй порядок, следовательно, ранг матрицы A равен 2.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Обозначим через A матрицу, а через $[A|B]$ – расширенную матрицу системы (1.16):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Теорема (Кронекера – Капелли). Для того чтобы система (1.16) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A равнялся рангу ее расширенной матрицы $[A|B]$, т.е. $\text{rang } A = \text{rang } [A|B] = r$. Если при этом $r = n$, то система (1.16) имеет единственное решение, если же $r < n$, то система (1.16) имеет бесконечно много решений.

Пример 1.18. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду (не переставляя последний столбец):

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -5 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right].$$

Базисный минор матрицы A системы $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$, а расширенной матрицы

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \text{ следовательно, } \text{rang } A = 2 \neq \text{rang } B = 3 \text{ и система несовместна.}$$

Пример 1.19. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Система совместна, так как $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$. Базисный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ содержит элементы первого и второго столбцов, следовательно, так как в ходе приведения к ступенчатому виду порядок столбцов не изменялся, базисными переменными являются x_1 и x_2 . Решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 9x_3, \\ x_2 = -1 - 14x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.22. Найти ранг матриц:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \\ -3 & 8 & -9 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & 7 & -16 \end{bmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.23. Исследовать на совместность систему уравнений. В случае совместности, определить количество решений системы:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -2, \\ x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - 13x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 11; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 8x_1 + x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 11; \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 8x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 11. \end{cases}$$

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом. При этом любые два направленных отрезка считаются равными, если они имеют одинаковые длину и направление. Таким образом, начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

Если начало вектора находится в точке A , а конец – в точке B , то вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$. Векторы также принято обозначать строчными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \dots$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB , обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна 0, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. Если при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными*.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал (рис.2.1), обозначается $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

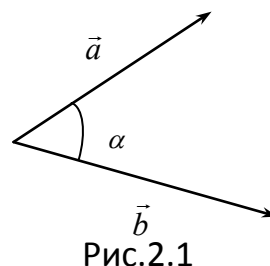


Рис.2.1

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны. Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны равенством $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число.

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис.2.2). Это определение называют *правилом треугольника* сложения векторов.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

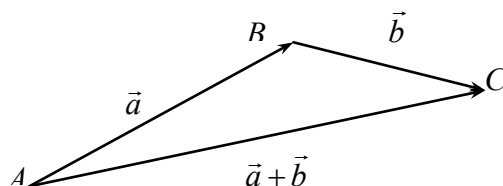


Рис.2.2

Сложение нескольких векторов выполняется по *правилу многоугольника*:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов применяют также правило параллелограмма: суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ является вектор $\overrightarrow{AC}$, где точка C – вершина параллелограмма ABCD (рис.2.3).

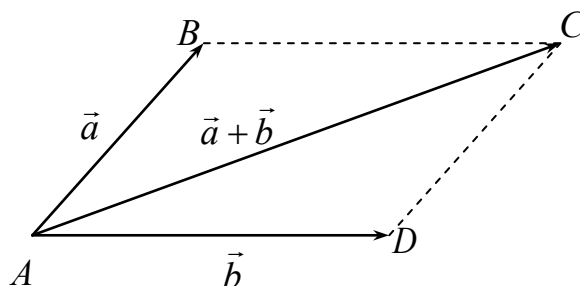


Рис.2.3

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 2$, $AC = 3$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Точка E – середина стороны BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -3\vec{b} + 2\vec{a}.$$

Для того чтобы выразить вектор $\overrightarrow{AE}$, построим параллелограмм ABDC (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (2\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + 1,5\vec{b}.$$

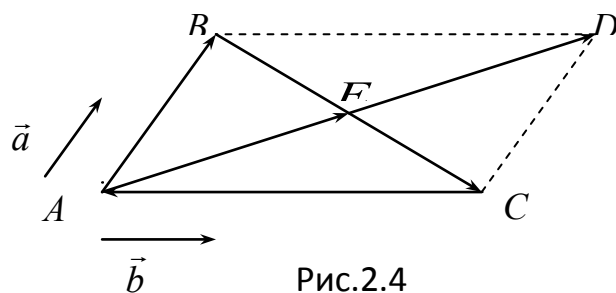


Рис.2.4

Если вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, т.е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n,$$

где $\lambda_i, i=1, \dots, n$, – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, взятые в определенном порядке. Любой компланарный с базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (2.1)$$

Числа x и y в правой части равенства (2.1) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad (2.2)$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Равенство (2.1) называется *разложением вектора $\vec{a}$ по базису на плоскости*, а равенство (2.2) – *разложением вектора $\vec{a}$ по базису в пространстве*.

Координаты вектора обычно записывают в круглых скобках после буквенного обозначения вектора. Например, запись $\vec{a}(2; -1; 3)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты 2, -1 и 3 в выбранном базисе.

Два вектора, заданные координатами в фиксированном базисе, равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.

Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3; -2; 5)$ и $\vec{b}(-6; y; -10)$ коллинеарны?

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ , что выполняется равенство $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Приравнявая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\lambda \vec{b}(-6\lambda; \lambda y; -10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3 = -6\lambda, \\ -2 = \lambda y, \\ 5 = -10\lambda, \end{cases}$$

отсюда находим, что $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $y = 4$.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают $\vec{i}, \vec{j}$, а в пространстве – $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Если при указании координат вектора не дается ссылка на конкретный базис, то по умолчанию считают базис ортонормированным.

Декартовой системой координат называется совокупность фиксированной точки O , называемой началом координат, и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной* (рис.2.5).

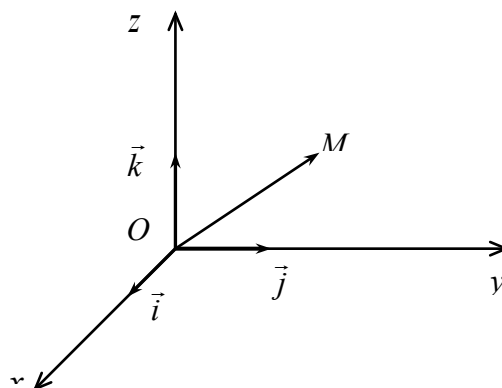


Рис.2.5

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy – *осью ординат*, прямая Oz – *осью аппликат*.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M . *Координатами* точки M в рассматриваемой системе координат называются координаты ее радиус-вектора. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ в соответствующем базисе имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, а расстояние между точками M_1 и M_2 (длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) находится по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.3)$$

Разделить отрезок M_1M_2 в отношении λ означает найти точку $M(x; y; z)$, принадлежащую данному отрезку, удовлетворяющую условию $|\overrightarrow{M_1M}| = \lambda |\overrightarrow{MM_2}|$. Координаты такой точки вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.4)$$

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок M_1M_2 пополам и формулы (2.4) определяют координаты середины отрезка:

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_{cp} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_{cp} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример 2.3. Даны вершины $A(1; -2), B(-2; 4), C(5; -6)$ треугольника ABC . Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A . Найти длину отрезка KC .

Решение. Так как $AK : KB = 2 : 1$, то координаты точки K найдем по формулам (2.4) при $\lambda = 2$:

$$x_K = \frac{1+2 \cdot (-2)}{1+2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+2 \cdot 4}{1+2} = 2,$$

т.е. $K(-1;2)$. Длину отрезка KC найдем по формуле (2.3)

$$|\overrightarrow{KC}| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-6-2)^2} = 10.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Изобразить два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и построить векторы:

а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $3\vec{a} - \vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

2.2. Дан параллелограмм $ABCD$ и два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ таких, что $\overrightarrow{AB} = 4\vec{p}$, а $\overrightarrow{AD} = 3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$: а) векторы $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$; б) векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN}$.

2.3. В треугольнике ABC отрезок AE – медиана, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Разложить геометрически и аналитически: а) вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

2.5. В трапеции $ABCD$ имеем $BC \parallel AD$ и $BC : AD = 1 : 3$. Выразить вектор $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

2.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Проверить справедливость равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1 C}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{B_1 D}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

- 2.9.** При каком значении x векторы $\vec{a}(x; 2; -4)$ и $\vec{b}(3; -6; 12)$ коллинеарны?
- 2.10.** Даны точки $M(0; 3)$, $N(2; 1)$, $P(5; -1)$, $Q(9; -3)$. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ является трапецией.
- 2.11.** Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $D(8; -1)$. Найти координаты вершины C .
- 2.12.** Даны координаты двух вершин треугольника ABC : $A(1; 2)$, $B(3; 4)$. Отрезок AE – медиана треугольника и $\vec{AE}(4; -1)$. Найти координаты вершины C .
- 2.13.** Найти положительное значение координаты x вектора $\vec{a}(x; -3; 4)$, если $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$.
- 2.14.** Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}(3; 4; -2)$ и $\vec{n}(-1; 2; 5)$.
- 2.15.** Найти длину стороны BC треугольника ABC , если $\vec{AB}(1; -1; 2)$, $\vec{AC}(7; 2; 4)$.
- 2.16.** Даны точки $A(2; 3; -1)$, $B(8; 12; -4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB ; б) точек, делящих отрезок AB на три равные части.
- 2.17.** Даны вершины $A(4; -1)$, $B(5; 5)$, $C(-3; 1)$ треугольника ABC . Найти медиану, проведенную из вершины A .
- 2.18.** На отрезке AB выбрана точка E так, что $AE : EB = 1 : 4$. Найти координаты точки B , если $A(1; -2; 5)$, $E(3; -1; 1)$.
- 2.19.** Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если:
- а) $\vec{a}(2; -5)$, $\vec{p}(1; 3)$, $\vec{q}(2; 5)$; б) $\vec{a}(4; 5)$, $\vec{p}(3; 2)$, $\vec{q}(2; 1)$.
- 2.20.** Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, если:
- а) $\vec{a}(6; 1; 4)$, $\vec{p}(4; 5; 1)$, $\vec{q}(3; 2; 1)$, $\vec{r}(2; 3; 2)$;
б) $\vec{a}(10; -1; 0)$, $\vec{p}(3; 1; -1)$, $\vec{q}(2; -1; 2)$, $\vec{r}(3; 2; 1)$.

2.2. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось Ox называется число, обозначаемое $\text{Пр}_{Ox} \vec{a}$ и определяемое формулой

$$\text{Пр}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью Ox .

Координаты вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе равны проекциям вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси:

$$x = \text{Пр}_{Ox} \vec{a}, \quad y = \text{Пр}_{Oy} \vec{a}, \quad z = \text{Пр}_{Oz} \vec{a}. \quad (2.5)$$

Косинусы углов $\alpha = (\vec{a}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{a}, \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{k})$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Формулы (2.5) можно переписать в виде

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (2.6)$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.7)$$

Пример 2.4. Вектор $\vec{a}$ образует углы $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ с осями Ox и Oy соответственно. Найти: а) угол γ , который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oz , если известно, что он острый; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 6$.

Решение: а) из формулы (2.7) находим

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как угол γ – острый, то $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и $\gamma = 45^\circ$;

б) координаты вектора $\vec{a}$ найдем по формулам (2.6):

$$x = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3, \quad y = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad z = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$ и определяемое формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (2.8)$$

Основные свойства скалярного произведения векторов:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$$

$$2) (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b});$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$$

$$4) \vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2;$$

$$5) (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ ортогональны (при условии } |\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|).$$

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (2.9)$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось, сонаправленную с вектором $\vec{b}$, может быть найдена по формуле

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}. \quad (2.10)$$

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2.11)$$

Пример 2.5. Найти угол между векторами $\vec{a}(4; -1; -1)$ и $\vec{b}(2; -2; 1)$.

Решение. Согласно формулам (2.9) и (2.11),

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{\sqrt{16+1+1} \sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

отсюда $(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{4}.$

Пример 2.6. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\hat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}.$

Решение. Используя свойство 4) скалярного произведения, имеем

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(2\vec{p} - 3\vec{q})^2}.$$

Применяя далее свойства 1) – 3), находим

$$\begin{aligned}(2\vec{p} - 3\vec{q})^2 &= 4\vec{p}^2 - 12(\vec{p}, \vec{q}) + 9\vec{q}^2 = 4|\vec{p}|^2 - 12|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\vec{p}, \vec{q}) + 9|\vec{q}|^2 = \\ &= 4 \cdot 9 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 4 = 36.\end{aligned}$$

Следовательно, $|\vec{a}| = 6$.

Пример 2.7. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{m}(2; -1; -2)$ и $\vec{n}(1; 1; -4)$.

Решение. По свойству 5) скалярного произведения для любого вектора $\vec{p}(x; y; z)$, ортогонального векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$, выполняются равенства $(\vec{p}, \vec{m}) = 0$ и $(\vec{p}, \vec{n}) = 0$. Кроме того, по условию $|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Выражая скалярные произведения векторов через их координаты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x + y - 4z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем два противоположно направленных вектора $\vec{p}_1\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\vec{p}_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, удовлетворяющих условию задачи.

Задачи для самостоятельного решения

- 2.21.** Построить радиус-вектор точки $M(4; -3; 5)$ и определить его длину и направление.
- 2.22.** Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор $\overrightarrow{AB}$, найти его проекции на оси координат и определить его направление.
- 2.23.** Разложить вектор $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если он образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ соответственно и $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$.
- 2.24.** Вектор $\vec{a}$ образует углы $\alpha = 60^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$ с осями Ox и Oz соответственно. Найти: а) угол β , который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oy , если известно, что он тупой; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.

- 2.25.** Найти координаты вектора $\vec{a}$, образующего равные острые углы с осями координат, если $\vec{a}^2 = 12$.
- 2.26.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
- 2.27.** Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти:
- а) $(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; в) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.
- 2.28.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные ортогональные векторы.
- 2.29.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
- 2.30.** Найти длину вектора $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.
- 2.31.** Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
- 2.32.** Найти угол между векторами $\vec{a}(-1; 4; 1)$ и $\vec{b}(1; 2; 2)$.
- 2.33.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(6; -1; 1)$ и $\vec{b}(2; 3; 1)$.
- 2.34.** Найти угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные ортогональные векторы.
- 2.35.** Найти угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.
- 2.36.** Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz .
- 2.37.** Из вершины квадрата проведены две прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.
- 2.38.** Найти угол между биссектрисами двух плоских углов треугольной пирамиды, имеющих общую вершину, если все ребра пирамиды равны.
- 2.39.** Даны точки $A(2; -3; 4)$, $B(5; -5; -2)$, $C(1; 2; 3)$, $D(7; 4; 6)$. Найти $\text{Pr}_{\overline{CD}} \overline{AB}$.

- 2.40. Даны векторы $\vec{a}(1;-1;4)$ и $\vec{b}(1;1;2)$. Вычислить $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ и $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.
- 2.41. Найти проекцию вектора $\vec{a}(2;-3;4)$ на ось, образующую равные углы с осями координат.
- 2.42. При каком значении λ векторы $\vec{p}(-\lambda;3;2)$ и $\vec{q}(1;2;-\lambda)$ ортогональны?
- 2.43. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные оси Ox и вектору $\vec{a}(5;-3;4)$.
- 2.44. Найти вектор единичной длины, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{a}(12;5;-13)$ и образующий острый угол с осью Ox .
- 2.45. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{a}(1;-3;0)$ и $\vec{b}(-3;3;4)$ и образующий тупой угол с осью Oy .
- 2.46. Найти все векторы, ортогональные векторам $\vec{a}(1;1;-1)$ и $\vec{b}(1;-5;1)$.

2.3. Векторное и смешанное произведение векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ как поворот против часовой стрелки (рис.2.6).

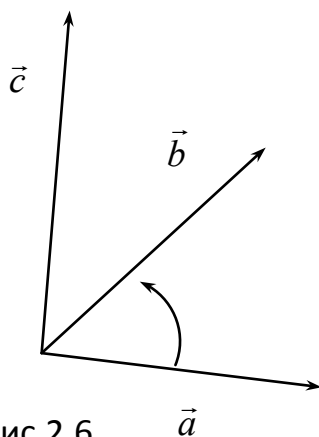


Рис.2.6

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;
- 2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Основные свойства векторного произведения:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$
- 2) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}];$
- 3) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}];$
- 4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ коллинеарны.}$

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (2.12)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть найдена по формуле

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad (2.13)$$

Пример 2.8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; -1; 4)$, $B(3; 1; 6)$, $C(6; 2; 9)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(1; 2; 2)$ и $\overrightarrow{AC}(4; 3; 5)$, поэтому согласно (2.13)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

По формуле (2.12)

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Основные свойства смешанного произведения:

- 1) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, может быть найден по формуле

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \quad (2.15)$$

Пример 2.9. Доказать, что точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 4; 1)$, $C(1; -3; 6)$ и $D(4; -2; 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}(1; 2; -2)$, $\overrightarrow{AC}(0; -5; 3)$ и $\overrightarrow{AD}(3; -4; 0)$ компланарны, а значит по свойству 3) смешанного произведения $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. По формуле (2.14) находим

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3;-1;5)$, $B(5;2;6)$, $C(-1;3;4)$ и $D(7;3;-1)$.

Р е ш е н и е. Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}(-4;4;-1)$, $\overrightarrow{AD}(4;4;-6)$, поэтому согласно (2.15)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Находим смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -156,$$

следовательно, $V_{ABCD} = \frac{156}{6} = 26$.

Задачи для самостоятельного решения

2.47. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.48. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 10$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 8$.

2.49. Найти и построить вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если:

а) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

2.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

2.51. Доказать равенство $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

2.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2.53. Известно, что $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 5$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$.

- 2.54.** Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{BD} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.
- 2.55.** Даны вершины $A(3; -1; 4)$, $B(2; 4; 5)$, $C(4; 4; 5)$ треугольника. Найти его площадь.
- 2.56.** Даны вершины $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B .
- 2.57.** Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.
- 2.58.** Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В случае некомпланарности определить, является тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой или левой:
- а) $\vec{a}(1; -1; 3)$, $\vec{b}(2; 3; -1)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;
- б) $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$, $\vec{c}(3; -2; 1)$;
- в) $\vec{a}(4; 1; 1)$, $\vec{b}(-6; 2; -4)$, $\vec{c}(2; 0; 3)$.
- 2.59.** При каком значении α векторы $\vec{a}(7; \alpha; -13)$, $\vec{b}(1; -2; 1)$ и $\vec{c}(3; 1; -2)$ компланарны?
- 2.60.** Определить, лежат ли следующие точки в одной плоскости:
- а) $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$;
- б) $K(4; 2; 3)$, $M(-2; 3; 1)$, $N(0; 1; -4)$, $P(5; -2; 2)$.
- 2.61.** Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1; 5; -1)$, $\vec{b}(3; 1; -2)$, $\vec{c}(-4; 0; 3)$.
- 2.62.** Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $S(3; 2; 4)$, $A(1; -2; 1)$, $B(7; 9; 4)$, $C(5; 4; 3)$.
- 2.63.** Даны вершины пирамиды: $S(0; 3; 7)$, $A(2; 0; 4)$, $B(0; 0; 6)$, $C(4; 3; 5)$. Найти длину ее высоты, проведенной из вершины S .

2.64. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен V . Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD_1}$.

2.65. Доказать, что какими бы ни были векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

2.66. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, компланарны.

2.4. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Ранг и базис системы векторов

Упорядоченный набор n действительных чисел $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется n -мерным вектором, а числа x_i , $i = 1, \dots, n$ — компонентами вектора $\vec{x}$.

Два вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ называются равными, если равны их соответствующие компоненты, т. е. $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Суммой двух n -мерных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x} + \vec{y}$, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых векторов, т.е. $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$.

Произведением вектора $\vec{x}$ на число λ называется вектор $\lambda \vec{x}$, компоненты которого равны произведению числа λ на соответствующие компоненты вектора $\vec{x}$, т.е. $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n)$.

Множество всех n -мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения называется векторным пространством $\mathbb{R}^n$.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}. \quad (2.16)$$

Если же равенство (2.16) имеет место лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ называется *линейно независимой*.

Отметим некоторые **свойства линейно зависимых систем векторов**.

1. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из векторов системы линейно выражается через другие.
2. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
3. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Пример 2.11. Выяснить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $\vec{x}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{x}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{x}_4 = (2; 3; 1; 0)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{x}_2 = (2; 1; 1)$, $\vec{x}_3 = (1, -1, 1)$;

в) $\vec{x}_1 = (1; 3; 1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 1; 1; 2)$, $\vec{x}_3 = (3; -1; 1; 1)$.

Р е ш е н и е : а) очевидно, вектор $\vec{x}_4$ выражается линейно через векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ следующим образом: $\vec{x}_4 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, следовательно, система линейно зависима;

б) приравняв компоненты векторов в левой и правой частях равенства $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 = \vec{0}$, получим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

следовательно, система (2.17) имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, и система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независима;

в) как и в пункте б) составим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Решая систему методом Гаусса, приведем ее к виду

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Система (2.18) имеет бесконечно много решений, которые можно записать в виде $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = -2\lambda_3$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Условие (2.16) выполняется для данной системы векторов при ненулевых значениях чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (в частности, при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ имеем $\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}$), следовательно, система линейно зависима.

Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов данной системы. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из компонент векторов системы.

Ранг векторного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *размерностью пространства* и равен n .

Базисом системы векторов называется упорядоченная совокупность r линейно независимых векторов данной системы, где r – ранг системы.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ – базис системы векторов. Каждый вектор $\vec{x}$ данной системы можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_r\vec{e}_r. \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) называется *разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$* , а числа $x_1, x_2, \dots, x_r$ – *координатами вектора $\vec{x}$ в данном базисе*.

Как и для геометрических векторов, координаты n -мерного вектора в фиксированном базисе будем записывать в круглых скобках после буквенного обозначения вектора: $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Пример 2.12. Найти базис системы векторов и определить координаты векторов системы в найденном базисе:

а) $\vec{x}_1 = (3; -1; 0)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 1)$, $\vec{x}_3 = (-1; 4; 3)$, $\vec{x}_4 = (2; 3; 7)$;

б) $\vec{y}_1 = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{y}_2 = (-1; 3; 2; 1)$, $\vec{y}_3 = (4; 3; 3; 5)$, $\vec{y}_4 = (2; -1; 0; 1)$.

Р е ш е н и е : а) ранг системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ не превышает 3, поэтому базис системы содержит не более трех векторов. Определитель, составленный из компонент векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

следовательно, эти векторы линейно независимы и образуют базис.

Поскольку

$$\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_3,$$

то в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ имеем: $\vec{x}_1(1; 0; 0)$, $\vec{x}_2(0; 1; 0)$, $\vec{x}_3(0; 0; 1)$.

Для того, чтобы найти координаты вектора $\vec{x}_4$ в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, распишем равенство $\vec{x}_4 = \alpha \cdot \vec{x}_1 + \beta \cdot \vec{x}_2 + \gamma \cdot \vec{x}_3$ по координатам:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \beta + 3\gamma = 7. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, т.е. $\vec{x}_4(3; -2; 3)$ в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$;

б) составим из компонент векторов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4$ системы матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A , а следовательно, и ранг системы векторов равен 3. Базис системы образуют векторы, соответствующие строкам полученной ступенчатой матрицы, т.е. $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_4$ (будем считать, что на последнем шаге преобразований мы вычеркнули третью строку, так как ее элементы пропорциональны соответствующим элементам четвертой строки).

В найденном базисе имеем: $\vec{y}_1(1;0;0), \vec{y}_2(0;1;0), \vec{y}_4(0;0;1)$. Пусть $\vec{y}_3 = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 + \gamma\vec{y}_4$. Как в пункте а) составим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 4, \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = 3, \\ \alpha + 2\beta = 3, \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 5, \end{cases}$$

решив которую, найдем $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2$, т.е. $\vec{y}_3(1;1;2)$ в базисе $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.67. Определить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $\vec{x}_1 = (1;0;0;0), \vec{x}_2 = (0;1;0;1), \vec{x}_3 = (1;1;0;1);$

б) $\vec{x}_1 = (1;3;2;-1), \vec{x}_2 = (3;4;3;0), \vec{x}_3 = (2;1;1;1);$

в) $\vec{x}_1 = (1;0;0;0), \vec{x}_2 = (0;1;0;0), \vec{x}_3 = (1;1;0;1);$

г) $\vec{x}_1 = (1;1;1;1), \vec{x}_2 = (0;0;1;1), \vec{x}_3 = (2;2;3;3);$

д) $\vec{x}_1 = (1;1;1;1), \vec{x}_2 = (0;1;1;1), \vec{x}_3 = (0;0;1;1), \vec{x}_4 = (-1;-1;0;0).$

2.68. Установить, существует ли линейная зависимость между векторами следующих систем:

а) $\vec{x}_1 = (1;3;-1), \vec{x}_2 = (0;2;1), \vec{x}_3 = (0;0;5);$

б) $\vec{x}_1 = (3;2;3), \vec{x}_2 = (2;0;2), \vec{x}_3 = (-1;-1;4);$

в) $\vec{x}_1 = (7;0;1), \vec{x}_2 = (5;2;-3), \vec{x}_3 = (1;-1;2);$

г) $\vec{x}_1 = (4;4;2;-1), \vec{x}_2 = (0;0;-3;7), \vec{x}_3 = (0;3;5;1);$

д) $\vec{x}_1 = (3;1;-2;1), \vec{x}_2 = (0;1;4;-1), \vec{x}_3 = (1;-3;5;1), \vec{x}_4 = (2;5;-3;-1).$

2.69. Найти ранг системы векторов:

а) $\vec{x}_1 = (-4; 6; 2)$, $\vec{x}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{x}_3 = (-6; 9; 3)$;

б) $\vec{x}_1 = (2; 3; 1)$, $\vec{x}_2 = (0; 2; 1)$, $\vec{x}_3 = (2; 5; 2)$;

в) $\vec{x}_1 = (5; -1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 4; 2)$, $\vec{x}_3 = (7; 3; 6)$;

г) $\vec{x}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 4; 5)$, $\vec{x}_3 = (3; 4; 5; 6)$, $\vec{x}_4 = (4; 5; 6; 7)$;

д) $\vec{x}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{x}_2 = (4; 1; 2; 3)$, $\vec{x}_3 = (3; 4; 1; 2)$, $\vec{x}_4 = (2; 3; 4; 1)$.

2.70. Найти базис системы векторов. Записать координаты векторов системы в найденном базисе:

а) $\vec{x}_1 = (1; -2; 5)$, $\vec{x}_2 = (-2; 4; -10)$, $\vec{x}_3 = (3; -6; 15)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 0; 2)$, $\vec{x}_2 = (1; 1; -2)$, $\vec{x}_3 = (1; -2; 10)$, $\vec{x}_4 = (3; 1; 2)$;

в) $\vec{x}_1 = (4; -1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 5)$, $\vec{x}_3 = (0; -7; -7)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; -4)$;

г) $\vec{x}_1 = (2; 1; -3)$, $\vec{x}_2 = (1; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (3; -4; 5)$, $\vec{x}_4 = (6; -11; 20)$;

д) $\vec{x}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (1; 2; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (2; 3; 5; 0)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; 4; -1)$.

2.71. Векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ образуют линейно независимую систему. Будет ли линейно независимой система $3\vec{x}_1$, $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_2$?

2.72. В базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ даны векторы $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$. При каких значениях α и β они линейно независимы?

2.73. Дан базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Проверить, образуют ли базис следующие системы векторов:

а) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$;

б) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$

Глава 3. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. В данном разделе будет использована декартова прямоугольная система координат.

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

К простейшим задачам аналитической геометрии относятся задачи о нахождении проекции отрезка, нахождении расстояния между двумя точками, делении отрезка в данном отношении, нахождении площади треугольника.

Проекция отрезка. Расстояние между двумя точками. Пусть дан произвольный отрезок M_1M_2 и некоторая ось u (рис. 3.1).

Проекцией точки M_1 на ось u называется основание P_1 перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на ось u .

Проекцией направленного отрезка M_1M_2 на ось u называется величина отрезка P_1P_2 оси u , началом и концом которого служат соответственно проекции точек M_1 и M_2 на эту ось, что символически записывается равенством $pr_u M_1M_2 = P_1P_2$.

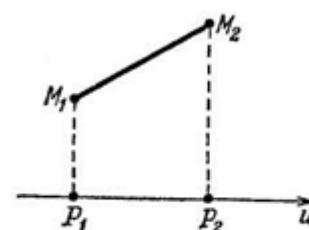
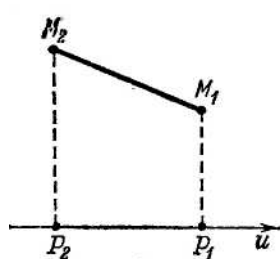
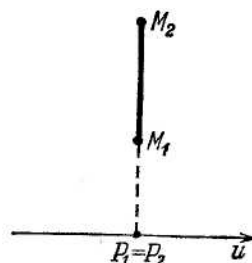


Рис. 3.1

Таким образом, проекция отрезка на ось есть *число*; оно может быть положительным (см. рис. 3.1), отрицательным (рис. 3.2, а) или равным нулю (рис. 3.2, б).



а)



б)

Рис. 3.2

Если на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат, то проекция отрезка на ось Ox обозначается символом X , его проекция на ось Oy – символом Y .

Проекции направленного отрезка M_1M_2 на оси координат Ox и Oy обозначаются соответственно через X и Y , причем, если известны координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то $X = x_2 - x_1$ и $Y = y_2 - y_1$.

Таким образом, чтобы найти проекции направленного отрезка на оси координат, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала (рис. 3.3).

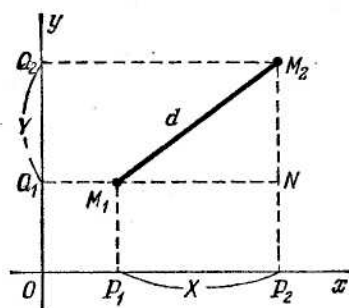


Рис. 3.3

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 на рис. 3.3 следует, что расстояние d между любыми двумя точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется формулой

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим отрезок M_1M_2 . Проведем через его начальную точку M_1 луч u , параллельный оси Ox и направленный в ту же сторону (рис. 3.4).

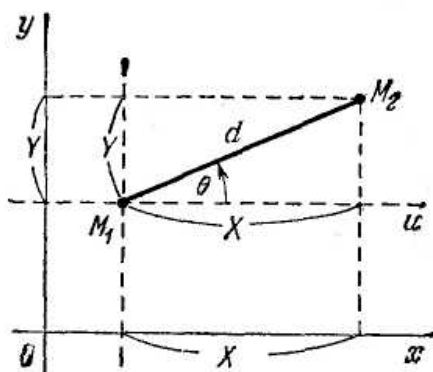


Рис. 3.4

Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч u против часовой стрелки около точки M_1 , чтобы направление луча и совпало с направлением отрезка M_1M_2 .

Угол θ будем называть полярным углом отрезка M_1M_2 относительно данных координатных осей. Примем теперь точку M_1 в качестве начала новой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси исходной системы координат (на рис. 3.4 новые оси показаны пунктиром). Проекция отрезка M_1M_2 на соответственные оси старой и новой системы одинаковы: обозначим их как и раньше через X , Y . Числа X , Y являются декартовыми координатами точки M_2 в новой системе. Из геометрических соображений очевидно, что

$$X = d \cos \theta, \quad Y = d \sin \theta. \quad (3.2)$$

В координатной форме соотношения (3.2) примут вид:

$$x_2 - x_1 = d \cos \theta, \quad y_2 - y_1 = d \sin \theta. \quad (3.3)$$

Во многих случаях удобной является также формула

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.4)$$

которая очевидным образом выводится из формул (3.3).

Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, и дано отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 (исключая совпадение с точкой M_2), то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3.5)$$

Замечание. Если точка M находится между точками M_1 и M_2 , то число λ положительное. Если точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2 , вне отрезка M_1M_2 , то λ есть число отрицательное.

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2 , то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (3.6)$$

Площадь треугольника. Каковы бы ни были три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, площадь S треугольника ABC определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \quad (3.7)$$

Пример 3.1. Даны точки $M_1(1; 1)$ и $M_2(7; 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в два раза ближе к M_1 чем к M_2 , и находится:

а) между точками M_1 и M_2 ;

б) вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2 .

Решение: а) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: $x=3, y=2$;

б) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -\frac{1}{2}$. Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: $x=-5, y=-2$.

Пример 3.2. Даны вершины треугольника $A(5; -1), B(-1; 7), C(1; 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A .

Решение. Обозначим через M точку пересечения указанной биссектрисы со стороной BC , через c и b – длины сторон AB и AC . Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная из какой-нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка M делит отрезок BC в отношении λ где $\lambda = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}$.

Пользуясь формулой (3.1), находим длины сторон AB и AC

$$c = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10, \quad b = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

Следовательно, $\lambda = 2$. Применяя формулы (3.5), находим координаты точки M :

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{11}{3}.$$

По формуле (3.1) получаем искомую длину биссектрисы AM

$$|AM| = \sqrt{\left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}.$$

Пример 3.3. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d=2\sqrt{2}$ и полярный угол $\theta=135^\circ$.

Решение. По формулам (3.2) находим

$$X = 2\sqrt{2} \cos 135^\circ = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2, \quad Y = 2\sqrt{2} \sin 135^\circ = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

Пример 3.4. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1(5; \sqrt{3})$ в точку $M_2(6; 2\sqrt{3})$.

Решение. По формуле (3.1) $d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = 2$.

Применяя формулы (3.2), найдем $\cos \theta = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\theta = 60^\circ$.

Пример 3.5. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$, $C(8; 2)$. Найти площадь треугольника ABC .

Решение. По формуле (3.7)

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = |-8| = S.$$

Следовательно, $S=8$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная их проекции на координатные оси:

1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y = -5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$; 4) $X = -5$, $Y = -1$.

3.2. Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; -1)$, зная их проекции на координатные оси:

а) $X = 4$, $Y = 3$; б) $X = 2$, $Y = 0$; в) $X = -4$, $Y = -2$; г) $X = 1$, $Y = -3$.

3.3. Даны точки $M_1(1; -2)$, $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 0)$, $M_3(-1; 4)$ и $M_4(0; -3)$.

Найти проекции на координатные оси следующих отрезков:

1) M_1M_2 ; 2) M_3M_2 ; 3) M_4M_5 ; 4) M_5M_3 .

3.4. Даны проекции отрезка M_1M_2 на оси координат: $X = 5$, $Y = -4$. Зная, что его начало лежит в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.

3.5. Даны проекции отрезка AB на оси координат: $X = 4$, $Y = -5$. Зная, что его конец есть точка $B(1; -3)$, найти координаты его начала.

3.6. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная длину d и полярный угол θ каждого из них:

1) $d = 5$, $\theta = \frac{\pi}{5}$; 2) $d = 3$, $\theta = \frac{5}{6}\pi$; 3) $d = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

3.7. Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; 3)$, зная длину и полярный угол каждого из них:

$$1) d = 2, \theta = -\frac{\pi}{10}; \quad 2) d = 1, \theta = \frac{\pi}{9}; \quad 3) d = 5, \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

3.8. Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину d и полярный угол θ каждого из них:

$$1) d = 12, \theta = \frac{2}{3}\pi; \quad 2) d = 6, \theta = -\frac{\pi}{6}; \quad 3) d = 2, \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

3.9. Даны проекции отрезков на координатные оси:

$$1) X = 1, Y = \sqrt{3}; \quad 2) X = 3\sqrt{2}, Y = -3\sqrt{2}; \quad 3) X = -2\sqrt{3}, Y = 2.$$

Вычислить длину d и полярный угол θ каждого из них.

3.10. Даны точки $M_1(2; -3)$, $M_2(1; -4)$, $M_3(-1; -7)$ и $M_4(-4; 8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) M_1M_2 ; 2) M_1M_3 ; 3) M_2M_4 ; 4) M_4M_3 .

3.11. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат: а) острый угол, б) тупой угол.

3.12. Длина отрезка MN равна 17, его конец есть точка $N(-7; 3)$, проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс: а) острый угол, б) тупой угол.

3.13. Зная проекции отрезка на координатные оси $X=1$, $Y=-\sqrt{3}$, найти его проекцию на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

3.14. Даны две точки $M_1(1; -5)$ и $M_2(4; -1)$. Найти проекцию отрезка M_1M_2 на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

3.15. Даны две точки $M_1(2; -2)$ и $M_2(7; -3)$. Найти проекцию отрезка M_1M_2 на ось, проходящую через точки $A(5; -4)$, $B(-7; 1)$ и направленную:

$$1) \text{ от } A \text{ к } B; \quad 2) \text{ от } B \text{ к } A.$$

3.16. Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние d между точками: 1) A и B ; 2) B и C ; 3) A и C ; 4) C и D ; 5) A и D ; 6) D и E .

3.17. Даны две смежные вершины квадрата $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.

- 3.18.** Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого находятся в точках $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.
- 3.19.** Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B . Определить длину диагоналей этого параллелограмма.
- 3.20.** Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины находятся в точках $P(4; 9)$ и $Q(-2; 1)$. Вычислить площадь этого ромба.
- 3.21.** Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины находятся в точках $P(3; -4)$ и $Q(1; 2)$. Вычислить длину высоты этого ромба.
- 3.22.** Доказать, что точки $A(3; -5)$, $B(-2; -7)$ и $C(18; 1)$ лежат на одной прямой.
- 3.23.** Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(1; 1)$, $A_2(2; 3)$ и $A_3(5; -1)$ прямоугольный.
- 3.24.** Доказать, что точки $A(2; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(-5; 3)$ и $D(-2; -1)$ являются вершинами квадрата.
- 3.25.** Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$ и $P(0; 4)$ острые.
- 3.26.** Точки $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ и $C(3; 3)$ являются вершинами треугольника. Вычислить его внутренние углы.
- 3.27.** Вершины треугольника находятся в точках $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$ и $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Вычислить его внешний угол при вершине A .
- 3.28.** На оси ординат найти такую точку M , расстояние которой до точки $N(-8; 13)$ равнялось бы 17.
- 3.29.** Даны две точки $M(2; 2)$ и $N(5; -2)$. На оси абсцисс найти такую точку P , чтобы угол MPN был прямым.
- 3.30.** Определить координаты точки M_2 , симметричной точке $M_1(1; 2)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1; 0)$ и $B(-1; -2)$.
- 3.31.** Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 0)$ и $C(-4; 1)$. Найти две его другие вершины.
- 3.32.** Даны две смежные вершины квадрата $A(2; -1)$ и $B(-1; 3)$. Определить две его другие вершины.
- 3.33.** Даны две точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Определить:
 1) координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B ;
 2) координаты точки N , симметричной точке B относительно точки A .

- 3.48.** Три вершины параллелограмма находятся в точках $A(3; 7)$, $B(2; -3)$ и $C(-1; 4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .
- 3.49.** Даны последовательные вершины однородной четырехугольной пластинки $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(-1; 7)$ и $D(-7; 5)$. Определить координаты ее центра тяжести (центр тяжести находится в точке пересечения медиан).
- 3.50.** Площадь треугольника $S=3$ кв. ед., две его вершины есть точки $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy , Определить координаты вершины C .
- 3.51.** Площадь параллелограмма $S=17$ кв. ед.; две его вершины есть точки $A(2; 1)$ и $B(5; -3)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси ординат.

3.2. Прямая линия на плоскости

Уравнением линии на плоскости называется уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Другими словами, линия, определенная данным уравнением (в некоторой системе координат), есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Прямая линия в векторной форме может быть задана уравнением

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad (3.8)$$

где $\vec{n} = (A; B)$ – вектор, перпендикулярный прямой; $\vec{r} = (x; y)$ – радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0 = (x_0; y_0)$ – радиус-вектор фиксированной точки прямой.

Любая прямая на плоскости может быть задана в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат уравнением первой степени. Обратно, любое уравнение первой степени относительно декартовых координат является уравнением прямой. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.9)$$

называется общим уравнением прямой. В уравнении (3.9) числа A, B, C – постоянные, причем A и B не равны нулю одновременно.

Если в общем уравнении прямой (3.9) один или два из трех коэффициентов (считая и свободный член) обращаются в нуль, то уравнение называется неполным.

Если ни один из коэффициентов уравнения (3.9) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.10)$$

где $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$ есть величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Каждый из этих отрезков отложен от начала координат.

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой «в отрезках».

Расстояние от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой (3.9) находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.11)$$

Угол α , определяемый, как показано на рис. 3.5, называется углом наклона прямой к оси Ox ($0 \leq \alpha < \pi$).



Рис. 3.5

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом прямой; обычно его обозначают буквой k :

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.12)$$

Уравнение вида

$$y = kx + b \quad (3.13)$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом;

k — угловой коэффициент, b — величина направленного отрезка, который отсекает прямая на оси Oy , считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то ее угловой коэффициент определяется по формуле $k=-\frac{A}{B}$, ($B \neq 0$).

Уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.14)$$

является уравнением прямой, которая проходит через точку $P(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k .

Если прямая, проходящая через заданную точку $Q(x_1; y_1)$, параллельна оси Oy , то ее уравнение имеет вид

$$x = x_1. \quad (3.15)$$

Если прямая, проходящая через заданную точку $Q(x_1; y_1)$, параллельна оси Ox , то ее уравнение имеет вид

$$y = y_1. \quad (3.16)$$

Если k – заданное число, то уравнение (3.14) представляет вполне определенную прямую, если же k – переменный параметр, то это уравнение определит *пучок прямых*, проходящих через точку $P(x_0; y_0)$ (рис. 3.6), при этом k называется *параметром пучка*.

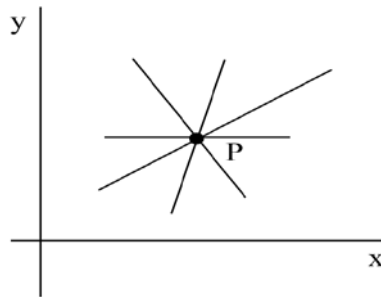


Рис. 3.6

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то из рис. 3.7 ее угловой коэффициент определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.17)$$

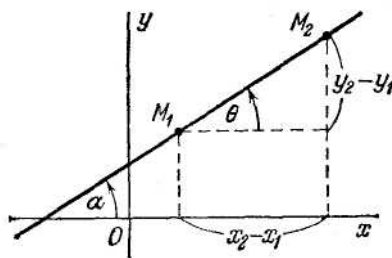


Рис. 3.7

Уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.18)$$

описывает прямую, проходящую через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

3.3. Совместное исследование уравнений прямых

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Каждое уравнение системы (3.19) определяет некоторую прямую. Вопрос о существовании и количестве вещественных решений системы (3.19) равносителен вопросу о существовании и количестве общих точек этих прямых. Возможны три случая.

1. Прямые пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку – система (3.19) имеет единственное решение. Критерием пересечения двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.
2. Прямые совпадают, т.е. оба уравнения системы определяют одну и ту же прямую – система (3.19) имеет бесконечное множество решений. Критерием совпадения двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
3. Прямые параллельны – система (3.19) не имеет решений. Критерием параллельности двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

В случае если две прямые (3.19) пересекаются, то один из двух смежных углов φ , образованных при пересечении этих прямых, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \quad (3.20)$$

Если известны угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2 , то угол φ от первой прямой до второй, отсчитываемый против хода часовой стрелки определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (3.21)$$

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов

$$k_1 = k_2. \quad (3.22)$$

Условием перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (3.23)$$

Если три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке, то выполняется условие

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Обратно, если имеет место (3.24), то три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке или параллельны.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ параллельно прямой $Ax + By + C = 0$, может быть записано в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (3.25)$$

Пример 3.6. Определить острый угол между прямыми $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. $k_1 = -3$; $k_2 = 2$. По формуле (3.21) с учетом того, что угол между прямыми должен быть острым, имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + (-3)2} \right| = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4.$$

Пример 3.7. Исследовать расположение на плоскости двух прямых:

- 1) $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$;
- 2) $2x + 3y + 1 = 0$ и $4x + 6y + 3 = 0$;
- 3) $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$.

Решение: 1) прямые $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$ пересекаются, так как $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$. Координаты точки пересечения $x = -1$, $y = 1$ найдены из решения системы двух линейных уравнений, задающих каждую прямую;

2) Прямые $2x + 3y + 1 = 0$ и $4x + 6y + 3 = 0$ параллельны, так как $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$

(система данных уравнений, очевидно, несовместна, так как умножая первое из них на 2 и отнимая от второго, получим противоречивое равенство $1=0$);

3) Прямые $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$ совпадают друг с другом, так как $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (данные уравнения равносильны).

Пример 3.8. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины C .

Решение. Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6 \text{ или } 2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Ищем уравнение высоты в виде: $y - y_1 = k(x - x_1)$ или, с учетом того, что она опущена из вершины $C(12; -1)$: $y - 12 = k(x + 1)$. Коэффициент k определим из условия (3.23) $\frac{2}{3}k = -1$ или $k = -\frac{3}{2}$. Таким образом, искомое уравнение высоты имеет вид $y - 12 = -1,5(x + 1)$ или $y = -1,5x + 10,5$.

Для записи уравнения медианы, найдем координаты середины стороны AB по формулам (3.6): $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$.

Уравнение медианы CM запишем, используя уравнение (3.18): $\frac{x-3}{12-3} = \frac{y-3}{-1-3}$ или $-4(x-3) = 9(y-3)$. Окончательно имеем $y = -\frac{4}{9}x + 4\frac{1}{3}$ – искомое уравнение медианы.

Пример 3.9. Найти проекцию точки $P(4; 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; 1)$ и $B(5; 2)$.

Решение. Искомая точка есть точка пересечения прямой AB с перпендикуляром, опущенным на эту прямую из точки P . Прежде всего, составим уравнение прямой AB . Применяя соотношение (3.18), получаем $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1}$ или $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Чтобы составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AB , напомним уравнение произвольной прямой, проходящей через

точку P ; согласно соотношению (3.14), получаем $y - 9 = k(x - 4)$, где k — пока еще не определенный угловой коэффициент. Нам нужно, чтобы искомая прямая прошла перпендикулярно к AB ; следовательно, ее угловой коэффициент должен удовлетворять условию перпендикулярности с прямой AB . Так как угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{1}{2}$, то, согласно формуле (3.23), находим $k = -2$. Подставляя найденное значение k в уравнение, получаем $y - 9 = -2(x - 4)$ или $y = -2x + 17$.

Решив систему уравнений $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $y = -2x + 17$, найдем координаты искомой проекции: $x = 7, y = 3$.

Пример 3.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -3)$ и начало координат.

Решение. Подставляя в (3.18) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$, имеем $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}$ или $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}$. Преобразовывая последнее равенство, получаем общее уравнение искомой прямой $3x - 2y = 0$.

Пример 3.11. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

Решение. Уравнение прямой имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. По условию $a=b>0$ и $ab/2=8$. Значит, $a=4$. Таким образом, искомое уравнение прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или в общем виде $x+y-4=0$.

Пример 3.12. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми $4x - 3y - 8 = 0$ и $4x - 3y + 7 = 0$.

Решение. Для решения задачи достаточно найти расстояние от любой точки на одной из прямых до другой прямой. Возьмем точку на прямой $4x - 3y - 8 = 0$. Пусть $y = 0$, тогда $x = 2$. По формуле (3.11) найдем расстояние от точки $(2; 0)$ до прямой $4x - 3y + 7 = 0$. Получим $d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$.

Пример 3.13. Определить линейную зависимость $y=kx+b$ между полными издержками y производства предприятия, изготавливающего однородную продукцию, и объемом x производства, если:

- 1) постоянные издержки (например, затраты на содержание административных зданий, их отопление и т.д.), не зависящие от объема продукции, составляют b (денежных единиц);
- 2) переменные издержки (например, материальные затраты) прямо пропорциональны с коэффициентом k объему x изготавливаемой продукции.

Записать эту зависимость для $b = 4$ (млн руб.) и $k = 0,5$ (млн руб. на одну единицу продукции).

Решение. В данном случае между полными издержками y некоторого производства и количеством x произведенной продукции имеет место линейная зависимость вида $y=kx+b$, где k – удельные переменные издержки (издержки на одну условную единицу продукции), а b – постоянные издержки производства. В случае $b=4$ (млн руб.) и $k=0,5$ (млн на одну условную единицу продукции) имеем уравнение $y = 0,5x + 4$.

Пример 3.14. Полные издержки y по производству x единиц продукции на двух предприятиях выражаются соответственно формулами:

$$L_1: y = 0,7x + 2 \quad \text{и} \quad L_2: y = 0,5x + 4,$$

где x – объем продукции (усл. ед.), а y – соответствующие полные издержки (млн руб.). Требуется выяснить, начиная с какого объема продукции более экономичным становится второе предприятие.

Решение. Построим прямые L_1 и L_2 (рис. 3.8)

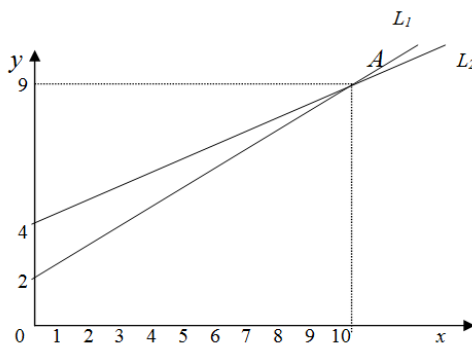


Рис. 3.8

Найдем координаты точки их пересечения, решив следующую систему

уравнений:

$$\begin{cases} y = 0,7x + 2, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x + 2 = 0,5x + 4, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x = 2, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 9. \end{cases}$$

Следовательно, точка A пересечения прямых имеет координаты $x=10$ и $y=9$. Это значит, что при объеме продукции $x=10$ усл.ед. полные издержки по производству этого объема на обоих предприятиях одинаковы и составляют 9 млн руб.

Из рис.3.8 видно, что при объеме $x>10$ более экономичным (издержки меньше) становится второе предприятие. Это можно установить и без помощи графика (аналитически).

Действительно, если обозначить $y_1 = 0,7x + 2$ и $y_2 = 0,5x + 4$, то, решая относительно x неравенство $y_2 < y_1$, получаем: $0,5x + 4 < 0,7x + 2 \Leftrightarrow 0,2x > 2 \Leftrightarrow x > 10$.

Пример 3.15. Между пунктами $A(5;5)$ и $B(8;4)$ (на плане местности размеры даны в километрах) проложен прямолинейно провод телефонной связи. Необходимо подключить к этому проводу пункт $C(2;1)$ по кратчайшему расстоянию. Найти точку подключения D и длину необходимого для этого провода.

Решение. Наикратчайшим расстоянием от пункта $C(2;1)$ до прямой AB является длина перпендикуляра CD , опущенного на AB из точки C . Следовательно, необходимо найти уравнение прямой CD , перпендикулярной AB и установить длину отрезка CD .

По формуле (3.18) запишем уравнение прямой AB $\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-5}{4-5}$.

Приводя подобные, получаем уравнение прямой в общем виде $x+3y-20=0$.

Так как угловой коэффициент прямой AB $k_{AB} = -\frac{1}{3}$, то угловой коэффициент прямой CD $k_{CD} = 3$. Тогда по формуле (3.14) уравнение прямой CD имеет вид $3(x-2)=(y-1)$ или в общем виде $3x-y-5=0$.

Найдем координаты точки D .

$$D: \begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ x + 3y - 20 = 0. \end{cases} \Rightarrow D(3,5; 5,5).$$

Обозначим через d расстояние от точки C до прямой AB , тогда

$$d = \frac{|2 + 3 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{2} \sqrt{10} \approx 4,7 \text{ (км)}.$$

Следовательно, точка подключения к телефонному проводу будет иметь на плане местности координаты $(3,5; 5,5)$, а длина требуемого провода составит 4,7 км.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.52.** Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат на ней.
- 3.53.** Точки P_1 , P_2 , P_3 , P_4 и P_5 расположены на прямой $3x - 2y - 6 = 0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2 и -6. Определить ординаты этих точек.
- 3.54.** Точки Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 и Q_5 расположены на прямой $x - 3y + 2 = 0$; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, -1, 3. Определить абсциссы этих точек.
- 3.55.** Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.
- 3.56.** Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$ и $2x + 5y + 19 = 0$.
- 3.57.** Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.
- 3.58.** Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.
- 3.59.** Стороны треугольника лежат на прямых $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь S .
- 3.60.** Площадь треугольника $S = 8$ кв. ед.; две его вершины находятся в точках $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определить координаты вершины C .
- 3.61.** Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная ее угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый ею на оси Oy :
- 1) $k = \frac{2}{3}$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -2$;
- 4) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

- 3.62.** Определить угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый на оси Oy , для каждой из прямых:
- 1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.
- 3.63.** Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой:
- 1) параллельной данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.
- 3.64.** Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:
- 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.
- 3.65.** Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.
- 3.66.** Найти проекцию точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.
- 3.67.** Найти точку Q , симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.
- 3.68.** В каждом из следующих случаев составить уравнение прямой, параллельной двум данным прямым и находящейся на равном расстоянии от каждой прямой:
- 1) $5x + y + 3 = 0$ и $5x + y - 17 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$ и $4x + 6y + 17 = 0$;
 3) $5x + 7y + 15 = 0$ и $5x + 7y + 3 = 0$; 4) $3x - 15y - 1 = 0$ и $x - 5y - 2 = 0$.
- 3.69.** Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки:
- а) $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; б) $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; в) $A(5; -3)$, $B(-1; 6)$.
- 3.70.** Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.
- 3.71.** Даны середины сторон треугольника: $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ и $M_3(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.
- 3.72.** Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ .
- 3.73.** Составить уравнение прямой, если точка $P(2; 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.
- 3.74.** Стороны треугольника даны уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Определить точку пересечения его высот.

- 3.75.** Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A .
- 3.76.** Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 0)$.
- 3.77.** Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.
- 3.78.** Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x+1y-7=0$, $5x+2y-36=0$ и уравнение его диагонали $3x+7y-0=0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.
- 3.79.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7; 3)$ и $B(11; -15)$.
- 3.80.** Найти точку M_1 , симметричную точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.
- 3.81.** На прямой $2x-y-5=0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-7; 1)$, $B(-5; 5)$ была бы наименьшей.
- 3.82.** На прямой $3x-y-1=0$ найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $A(4; 1)$ и $B(0; 4)$ была бы наибольшей.
- 3.83.** Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ под углом 45° к данной прямой.
- 3.84.** Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.
- 3.85.** Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$ и $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.
- 3.86.** Точка $E(1; -1)$ является центром квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y+12=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.
- 3.87.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -3)$ параллельно прямой:
- 1) $16x-24y-7=0$; 2) $2x+3=0$; 3) $3y-1=0$.

- 3.88.** Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:
- 1) $3x-4y+1=0$ и $4x-3y+7=0$; 2) $6x-15y+7=0$ и $10x+4y-3=0$;
 3) $9x-12y+5=0$ и $8x+6y-13=0$; 4) $7x-2y+1=0$ и $4x+6y+17=0$.
- 3.89.** Даны две вершины $A(3; -1)$ и $B(5; 7)$ треугольника ABC и точка $N(4; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.
- 3.90.** В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB : $5x-3y+2=0$, уравнения высот AN : $4x-3y+1=0$ и BN : $7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.
- 3.91.** Составить уравнения сторон треугольника ABC , если даны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.
- 3.92.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -1)$, а также уравнения высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведенных из различных вершин.
- 3.93.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(3; -1)$, а также уравнения биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.
- 3.94.** Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и вместе с прямыми $x-y+12=0$, $2x+y+9=0$ образует треугольник с площадью, равной 1,5 кв.ед.
- 3.95.** Среди прямых, проходящих через точку $P(3; 0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $2x-y-2=0$, $x+y+3=0$, делится в точке P пополам.
- 3.96.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-5; 4)$, зная, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $x+2y+1=0$, $x+2y-1=0$, равна 5.
- 3.97.** Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$
- 1) параллельна оси абсцисс; 2) параллельна оси ординат;
 3) проходит через начало координат.
- В каждом случае написать уравнение прямой.
- 3.98.** Определить, при каких значениях m и n прямая $(2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0$ параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 5 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

3.99. Доказать, что две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

1) $x+5y-35=0$ и $3x+2y-27=0$;

2) $12x+15y-8=0$ и $16x+9y-7=0$;

3) $8x-33y-19=0$ и $12x+55y-19=0$;

4) $3x+5=0$ и $y-2=0$.

3.100. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y+7=0$;

2) $2x-1=0$, $x+3=0$;

3) $y+3=0$, $5y-7=0$.

3.101. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые совпадают:

1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y-8=0$;

2) $x-y\sqrt{2}=0$, $x\sqrt{2}-2y=0$;

3) $x\sqrt{3}-1=0$, $3x-\sqrt{3}=0$.

3.102. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+8y+n=0$ и $2x+my-1=0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

3.103. Определить, при каком значении m две прямые $(m-1)x+my-5=0$ и $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

3.104. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые в следующих случаях:

1) $2x+3y-1=0$, $4x-5y+5=0$, $3x-y+2=0$.

2) $2x-y+1=0$, $x+2y-17=0$, $x+2y-3=0$.

3.105. Определить, при каком значении a три прямые $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$, $ax+y-13=0$ будут пересекаться в одной точке.

3.4. Кривые второго порядка, заданные каноническими уравнениями

Линия L на плоскости Oxy называется кривой второго порядка, если она определяется уравнением второй степени относительно x и y , т.е. уравнением вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.26)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю.

Замечание. Под термином «кривая» понимается «изогнутая линия». Это замечание позволяет исключить из уравнения (3.26) ряд ситуаций:

- ✚ уравнению (3.26) может вообще не соответствовать на плоскости никакого геометрического образа. Таково, например, уравнение $3x^2 + 2y^2 = -4$.
- ✚ Возможен также случай, когда уравнению (3.26) соответствует не линия, а точка, например, $3x^2 + 2y^2 = 0$.
- ✚ уравнению $9x^2 - 4y^2 = 0$ соответствует не изогнутая линия, а пара пересекающихся прямых: $3x - 2y = 0$, $3x + 2y = 0$.
- ✚ уравнению $4x^2 = 0$ соответствует прямая $x = 0$.
- ✚ уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$ соответствует пара прямых: $x = 1$, $x = 2$.

Кривыми второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола. Уравнения этих линий рассматриваются в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат. Основной целью этого раздела является ознакомление с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

3.4.1. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами. Постоянную сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2 , расстояние между ними — через $2c$. По определению эллипса $2a > 2c$ или $a > c$.

Пусть дан эллипс. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данного эллипса располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.27)$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; очевидно, что $a > b$. Уравнение вида (3.27) называется каноническим уравнением эллипса.

При указанном выборе системы координат оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — его центром симметрии (рис. 3.9). Оси симметрии эллипса называются его осями, центр симметрии — просто центром.

Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его вершинами. На рис. 3.9 вершины эллипса обозначены буквами A' , A , B' и B . Часто осями эллипса называются также отрезки $A'A=2a$ и $B'B=2b$; вместе с тем отрезок $OA=a$ называют большой полуосью эллипса, отрезок $OB=b$ — малой полуосью.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей эллипса и касающийся его в вершинах, называется основным прямоугольником эллипса.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy (симметрично относительно начала координат), то уравнение эллипса имеет тот же вид (3.27), в этом случае $b > a$; следовательно, если мы желаем буквой a обозначать большую полуось, то в уравнении (3.27) нужно буквы a и b поменять местами. Однако для удобства формулировок задач мы условимся буквой a всегда обозначать полуось, расположенную на оси Ox , буквой b — полуось, расположенную на оси Oy , независимо от того, что больше, a или b . Если $a=b$, то уравнение (3.27) определяет окружность, рассматриваемую как частный случай эллипса. Ее уравнение в этом случае имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (3.28)$$

где символом R обозначен радиус окружности.

Если центр окружности поместить в точку $C(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение примет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.29)$$

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a – большая полуось, называется эксцентриситетом

эллипса. Очевидно, что $\varepsilon < 1$ (для окружности $\varepsilon=0$). Если $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса, то отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ (рис. 3.9) называются фокальными радиусами точки M . Фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$.

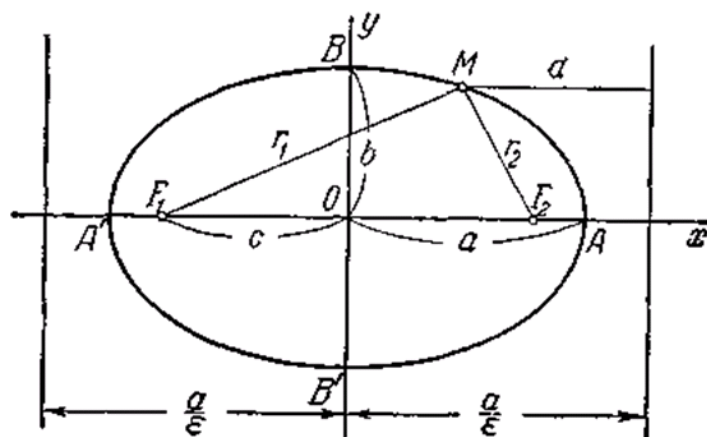


Рис. 3.9

Если эллипс определен уравнением (3.27) и $a > b$, то прямые $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$ (см. рис. 3.9) называются директрисами эллипса (если $b > a$, то директрисы определяются уравнениями $y = -\frac{b}{\varepsilon}$ и $y = \frac{b}{\varepsilon}$).

Каждая директриса обладает следующим свойством: если r – расстояние от произвольной точки эллипса до некоторого фокуса, d – расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Эллипс с центром симметрии в точке $C(x_0; y_0)$ описывается уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.30)$$

Пример 3.16. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Нижняя вершина имеет абсциссу $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в уравнение эллипса, найдем ординату вершины $y^2 = 16$; $y = -4$. Таким образом, координаты нижней вершины $(0; -4)$.

Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки (3.18):

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \quad 4x = -3y - 12.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $4x + 3y + 12 = 0$.

Пример 3.17. Показать, что $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Выделим полные квадраты для переменных x и y .

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 4 - 9 - 3 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (3.29), делаем вывод, что центр окружности находится в точке $A(-2; 3)$, радиус равен 4.

Пример 3.18. Составить каноническое уравнение эллипса, зная:

а) малую полуось $b = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$;

б) сумму полуосей $a + b = 12$ и расстояние между фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

Решение: а) так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$, то $c = 0,6a$. Подставляя в соотношение $a^2 - c^2 = b^2$ известные величины $b = 8$ и $c = 0,6a$, получим $a^2 - 0,36a^2 = 64$, отсюда $a^2 = 100$. Уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

б) для определения уравнения эллипса по известным соотношениям $a + b = 12$ и $2c = 6\sqrt{2}$ необходимо определить a и b . Из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ имеем $a^2 - b^2 = 18$. Поэтому $(a-b)(a+b) = 18$. Подставляя сюда

$a + b = 12$, найдем, что $a - b = 1,5$. Решая систему уравнений $\begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 1,5 \end{cases}$ получим $a = 6,75$ и $b = 5,25$. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{6,75^2} + \frac{y^2}{5,25^2} = 1$.

Пример 3.19. Два предприятия A и B , расстояние между которыми равно 200 км, производят некоторое изделие, заводская цена p которого одинаковая для обоих предприятий. Транспортные расходы на перевозку единицы изделия от предприятия A до потребителя P составляют 9 руб/км, а от предприятия B – 3 руб/км. Как следует разделить рынок сбыта, чтобы расходы потребителей были одинаковыми? Какому потребителю изделия какого предприятия выгоднее покупать?

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в середине отрезка AB и направив оси координат по лучу AB и перпендикуляр к нему (рис.3.10). Определим геометрическое место точек, в которых расходы потребителей на приобретение продукции предприятий A и B будут одинаковыми. Пусть потребитель находится в точке $P(x; y)$. Обозначим расстояния: $|AP| = S_1$ (км), $|BP| = S_2$ (км).

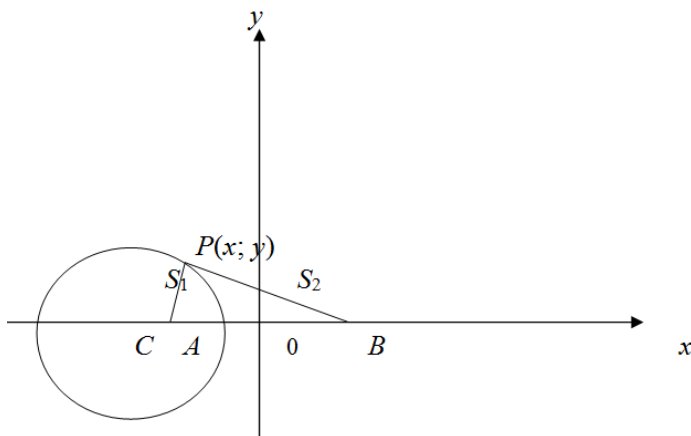


Рис. 3.10

Тогда расходы на приобретение единицы изделия предприятия A составят $p + 9S_1$, а предприятия B составят $p + 3S_2$. Так как расходы потребителей должны быть одинаковы, то

$$p + 9S_1 = p + 3S_2 \text{ или } 3S_1 = S_2. (*)$$

Используя координаты точек $A(-100; 0)$, $B(100; 0)$ и $P(x; y)$, вычислим значения $S_1 = |AP| = \sqrt{(x+100)^2 + y^2}$, $S_2 = |BP| = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$ и подставим их в равенство (*), тогда $3\sqrt{(x+100)^2 + y^2} = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$.

Отсюда получаем уравнение

$$9(x^2 + 200x + 10\,000 + y^2) = x^2 - 200x + 10\,000 + y^2$$

$$\text{или } 8x^2 + 2\,000x + 8y^2 + 80\,000 = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив сначала обе его части на 8, и затем выделив полные квадраты в левой части, тогда

$$x^2 + 250x + y^2 + 10\,000 = 0 \text{ или } (x + 125)^2 + y^2 + 10\,000 - 25 \cdot 625 = 0$$

$$\text{или } (x + 125)^2 + y^2 = (75)^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $C(-125; 0)$ и радиусом $R = 75$ (рис. 3.10).

Для потребителей, находящихся на этой окружности, выполняется равенство $3S_1 = S_2$, следовательно, $p + 9S_1 = p + 3S_2$, поэтому расходы на приобретение изделия как одного, так и другого предприятия, одинаковы. Для потребителей, находящихся внутри ограниченного этой окружностью круга выполняется неравенство $3S_1 < S_2$, следовательно, $p + 9S_1 < p + 3S_2$, поэтому расходы на приобретение изделий предприятия A ниже. Аналогично можно установить, что для потребителей, находящихся вне этого круга, расходы на приобретение изделий предприятия B ниже.

Следовательно, рынок сбыта можно выгодно (экономично) поделить так: а) потребителям, находящимся на окружности, безразлично, изделия какого предприятия (A или B) покупать; б) потребители, находящиеся внутри указанного круга, покупают изделия предприятия A ; в) потребители, находящиеся вне круга, покупают изделия предприятия B .

Задачи для самостоятельного решения

3.106. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

- 1) его полуоси равны 5 и 2;
- 2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;
- 3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$;
- 4) расстояние между его фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c=4$;

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;

9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

10) расстояние между его директрисами равно 32 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

3.107. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$; 6) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

3.108. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

3.109. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами малой оси эллипса.

3.110. На эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ найти точки, абсцисса которых равна -3 .

3.111. Определить, какие из точек $A_1(-2; 3)$, $A_2(2; -2)$, $A_3(2; -4)$, $A_4(-1; 3)$, $A_5(-4; -3)$, $A_6(3; -1)$, $A_7(3; -2)$, $A_8(2; 1)$, $A_9(0; 15)$ и $A_{10}(0; -16)$ лежат на эллипсе $8x^2 + 5y^2 = 77$, какие внутри эллипса и какие вне эллипса.

3.112. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; 2) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$;

3) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$; 4) $y = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

- 3.113.** Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $F(-2; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.
- 3.114.** Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{2}$, его центр совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной -4 , до фокуса, одностороннего с данной директрисой.
- 3.115.** Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.
- 3.116.** Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны:
- 1) точка $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ эллипса и его малая полуось $b=3$;
 - 2) точка $M_2(2; -2)$ эллипса и его большая полуось $a=4$;
 - 3) точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ эллипса;
 - 4) точка $M_1(\sqrt{15}; -1)$ эллипса и расстояние между его фокусами $2c=8$;
 - 5) точка $M_1(2; -\frac{5}{3})$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$;
 - 6) точка $M_1(8; 12)$ эллипса и расстояние $r_1=20$ от нее до левого фокуса;
 - 7) точка $M_1(-\sqrt{5}; 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами равно 10.
- 3.117.** Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(3; 0)$ и оси ординат в точке $B(0; -4)$. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.
- 3.118.** Точка $C(-3; 2)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.
- 3.119.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:
- 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
 - 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
 - 3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.120. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$;

2) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;

3) $x = -2\sqrt{-5 - yx - y^2}$;

4) $y = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.121. Составить уравнение эллипса, зная, что:

1) его большая ось равна 26 и фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;

2) его малая ось равна 2 и фокусы $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;

3) его фокусы $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) его фокусы $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

3.122. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$,

фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x-5=0$.

3.123. Точка $A(-3; -5)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(-1; -4)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x-2=0$. Составить уравнение этого эллипса.

3.124. Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

3.125. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает ли, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы следующими уравнениями:

1) $2x-y-3=0$,

2) $2x+y-10=0$,

3) $3x+2y-20=0$,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

3.126. Определить, при каких значениях m прямая $y = -x+m$:

1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;

2) касается его;

3) проходит вне этого эллипса.

- 3.127.** Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y + 7 = 0$.
- 3.128.** Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярных к прямой $2x - 2y - 13 = 0$.
- 3.129.** На эллипсе $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти точку M_1 , ближайшую к прямой $2x - 3y + 25 = 0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.
- 3.130.** Из точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Составить их уравнения.
- 3.131.** Из точки $C(10; -8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
- 3.132.** Эллипс проходит через точку $A(4; -1)$ и касается прямой $x + 4y - 10 = 0$. Составить уравнение этого эллипса при условии, что его оси совпадают с осями координат.
- 3.133.** Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $3x - 2y - 20 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$, при условии, что его оси совпадают с осями координат.
- 3.134.** Прямая $x - y - 5 = 0$ касается эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Составить уравнение этого эллипса.
- 3.135.** Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к эллипсу $3x + 10y - 25 = 0$ и его малая полуось $b = 2$.
- 3.136.** Определить точки пересечения эллипсов $x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ и $x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$.
- 3.137.** Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:
- 1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 3$;
 - 2) центр окружности совпадает с точкой $C(2; -3)$ и ее радиус $R = 7$;
 - 3) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6; -8)$;
 - 4) окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$;

5) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

6) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x-4y+20=0$ является касательной к окружности;

7) центр окружности совпадает с точкой $C(1; -1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;

8) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;

9) окружность проходит через три точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$;

10) окружность проходит через три точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$ и $M_3(5; 5)$.

3.138. Через точку $A(4; 2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр C и радиус R .

3.139. Через точку $M_1(1; -2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси Ox . Определить центр C окружности.

3.140. Написать уравнения окружностей радиуса $R=\sqrt{5}$, касающихся прямой $x-2y-1=0$ в точке $M_1(3; 1)$.

3.141. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых: $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них — в точке $A(2; 1)$.

3.142. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1; 0)$ и касаются двух параллельных прямых: $2x+y+2=0$ и $2x+y-18=0$.

3.143. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x+y=0$, касается прямых $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$.

3.144. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: $x+2y-9=0$, $2x-y+2=0$.

3.145. Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$;

2) $(x+2)^2 + y^2 = 64$;

3) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$;

4) $x^2 + (y-5)^2 = 5$;

5) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

6) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$;

8) $x^2+y^2+x=0$,

9) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$;

10) $x^2+y^2+y=0$

3.146. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +\sqrt{9 - x^2}$;

6) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$;

2) $y = -\sqrt{25 - x^2}$;

7) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;

3) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;

8) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$;

4) $x = +\sqrt{16 - y^2}$;

9) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;

5) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$;

10) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.147. Установить, как расположена точка $A(1; -2)$ относительно каждой из следующих окружностей – внутри, вне или на контуре окружности:

1) $x^2 + y^2 = 1$

2) $x^2 + y^2 = 5$;

3) $x^2 + y^2 = 9$;

4) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

3.148. Составить уравнение диаметра окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного к прямой $5x + 2y - 13 = 0$.

3.149. Определить координаты точек пересечения прямой $7x - y + 12 = 0$ и окружности $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

3.150. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

1) $y = 2x - 3$ и $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

3) $y = x + 10$ и $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3.151. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx$:

1) пересекает окружность $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;

2) касается этой окружности;

3) проходит вне этой окружности.

- 3.152.** Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается окружности $x^2+y^2=R^2$.
- 3.153.** Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; -1)$ и точки пересечения двух окружностей:
- $$x^2+y^2+2x-2y-23=0, \quad x^2+y^2-6x+12y-35=0.$$
- 3.154.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей: $x^2+y^2+3x-y=0$, $3x^2+3y^2+2x+y=0$.
- 3.155.** Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(-1; 2)$.
- 3.156.** Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на окружности $x^2+y^2=R^2$. Составить уравнение касательной к этой окружности в точке M_1 .
- 3.157.** Определить острый угол, образованный при пересечении прямой $3x-y-1=0$ и окружности $(x-2)^2+y^2=5$ (углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к окружности, проведенной в точке их пересечения).
- 3.158.** Определить, под каким углом пересекаются две окружности: $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ (углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке пересечения).
- 3.159.** Из точки $A(4; 2)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=10$. Определить угол, образованный этими касательными.
- 3.160.** Из точки $P(2; -3)$ проведены касательные к окружности $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
- 3.161.** Из точки $C(6; -8)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=25$.
Вычислить расстояние d от точки C до хорды, соединяющей точки касания.
- 3.162.** Вычислить длину касательной, проведенной из точки $A(1; -2)$ к окружности $x^2+y^2+6x+2y+5=0$.
- 3.163.** Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+10x+2y+6=0$, параллельных прямой $2x+y-7=0$.

3.4.2. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается через $2a$. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 , расстояние между ними — через $2c$. По определению гиперболы $2a < 2c$ или $a < c$.

Пусть дана гипербола. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данной гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (3.31)$$

Уравнение вида (3.31) называется каноническим уравнением гиперболы. При указанном выборе системы координат оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — ее центром симметрии (рис. 3.11). Оси симметрии гиперболы называются осями, центр симметрии — центром гиперболы. Гипербола пересекает одну из своих осей; точки пересечения называются вершинами гиперболы. На рис. 3.9 вершины гиперболы находятся в точках A' и A .

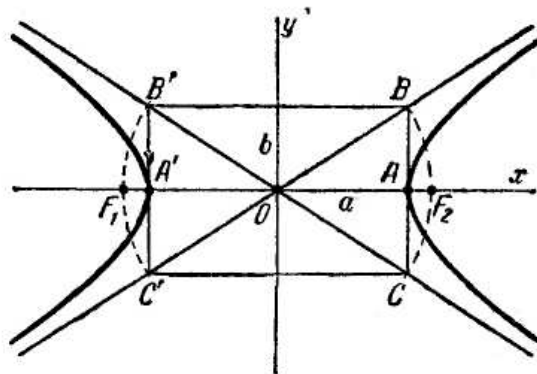


Рис. 3.11

Прямоугольник $CC'B'B$ со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется основным прямоугольником гиперболы.

Отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины сторон основного прямоугольника гиперболы, также называют ее осями. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) являются асимптотами гиперболы; их уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (3.32)$$

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.33)$$

определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей с фокусами на оси ординат (рис. 3.12); уравнение (3.33), как и уравнение (3.31), называется каноническим уравнением гиперболы; в этом случае постоянная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов равна $2b$. Две гиперболы, которые определяются уравнениями (3.31) и (3.33) в одной и той же системе координат, называются сопряженными.

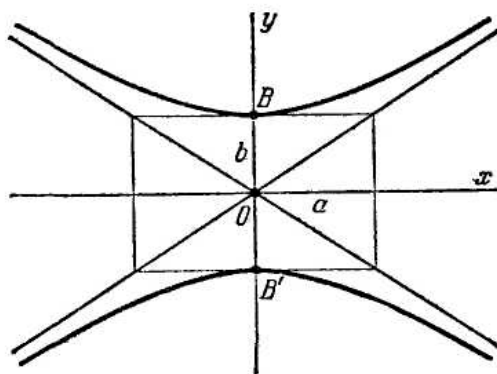


Рис. 3.12

Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется равносторонней; ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ или } -x^2 + y^2 = a^2. \quad (3.34)$$

Число $\varepsilon = \frac{a}{c}$, где a — расстояние от центра гиперболы до ее вершины, называется эксцентриситетом гиперболы. Очевидно, для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Если $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M (рис. 3.13) называются фокальными радиусами точки M . Фокальные радиусы точек правой ветви гиперболы вычисляются по формулам

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a,$$

фокальные радиусы точек левой ветви — по формулам

$$r_1 = -\varepsilon x + a, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Если гипербола задана уравнением (3.31), то прямые, определяемые уравнениями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, называются ее директрисами (рис. 3.13). Если

гипербола задана уравнением (3.33), то директрисы определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \quad y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

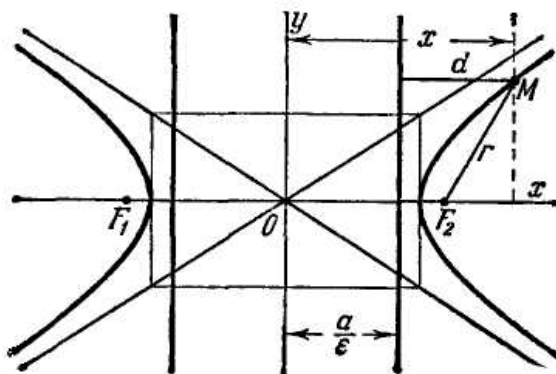


Рис. 3.13

Каждая директриса обладает следующим свойством: если r — расстояние от произвольной точки гиперболы до некоторого фокуса, d — расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $C(x_0; y_0)$, а прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $y = y_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3.35)$$

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $C(x_0; y_0)$, а прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $x = x_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1. \quad (3.36)$$

Пример 3.16. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Решение. Разделив обе части уравнения гиперболы на 6, получим

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, откуда $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$. Таким образом, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ — искомые уравнения асимптот гиперболы.

Пример 3.17. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Решение. Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{ – искомое уравнение гиперболы.}$$

Пример 3.18. На железной дороге расположены две станции A и B (рис. 3.14). Пусть из различных пунктов местности, по которой проходит железная дорога, нужно отправлять грузы в конечный пункт дороги C . Станцию B мы считаем находящейся к пункту C ближе, чем станция A . Перед грузоотправителем, находящемся в некотором пункте местности M , возникает задача: на какую из станций A или B выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге.

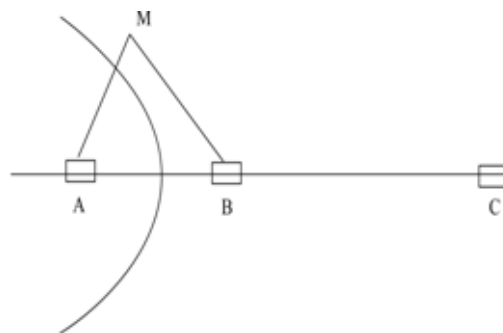


Рис. 3.14

Решение. Пусть стоимость провоза груза равна p руб. за 1 км при перевозке автотранспортом и q руб. за 1 км при перевозке по железной дороге.

Тогда грузоотправитель производит следующий расчет.

Стоимость перевозки при доставке груза в A равна $(p \cdot MA + q \cdot AB + q \cdot BC)$ руб.

Стоимость перевозки при доставке груза в B равна $(p \cdot MB + q \cdot BC)$ руб.

Отсюда следует, что в B выгоднее возить грузы, находящиеся в точках M , для которых $p \cdot MA + q \cdot AB > p \cdot MB$ или, что то же самое,

$$MA - MB > -\frac{q}{p} \cdot AB. \quad (*)$$

Те точки M , для которых безразлично, куда возить груз, удовлетворяют соотношению

$$MA - MB = -\frac{q}{p} \cdot AB. \quad (**)$$

Те точки M , для которых справедливо (**), лежат на гиперболе с фокусами A и B и осью $2a = \frac{q}{p} AB$. Точнее говоря, точки M , удовлетворяющие соотношению (**), расположены на той ветви гиперболы, которая прилежит к

фокусу A . Стало быть точки M , для которых справедливо (*) лежат в той части плоскости, которая отделена этой ветвью от точки A .

Вывод. На станцию B выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге из различных пунктов местности, которые расположены в той части плоскости, которая отделена ветвью гиперболы от точки A . На станцию A выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге из тех пунктов местности, которые расположены в той же части плоскости относительно ветви гиперболы, в которой расположена и точка A .

Задачи для самостоятельного решения

3.164. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

- 1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
- 2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;
- 3) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 4) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
- 5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;
- 6) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$;
- 7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;
- 8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 9) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

3.165. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

- 1) ее полуоси $a = 6$, $b = 18$ (буквой a мы обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);

2) расстояние между фокусами $2c=10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$, расстояние между вершинами равно 48;

4) расстояние между директрисами равно $7\frac{1}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $6\frac{2}{5}$.

3.166. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$;

4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 6) $25x^2 - 16y^2 = 1$.

3.167. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:

1) полуоси a и b ; 2) фокусы; 3) эксцентриситет;

4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

3.168. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами

гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

3.169. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$,

3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 9}$, 4) $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.170. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

3.171. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=2$, центр ее лежит в начале координат, один из фокусов $F(12; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

3.172. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

3.173. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

- 1) точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;
- 2) точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;
- 3) точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;
- 4) точка $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $y = \pm \frac{4}{3}$;
- 5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm \frac{16}{5}$.

3.174. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

3.175. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

3.176. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

- 1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
- 2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
- 3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3.177. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

- 1) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$;
- 2) $y = 7 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;
- 3) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;
- 4) $x = 5 - \frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.178. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

- 1) расстояние между ее вершинами равно 24 и фокусы $F_1(-10; 2)$, $F_2(16; 2)$;
- 2) фокусы $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;
- 3) угол между асимптотами равен 90° и фокусы $F_1(4; -4)$, $F_2(-2; 2)$.

3.179. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5; 0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x - 16 = 0$.

3.180. Установив, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти для каждой из них центр, полуоси, уравнения асимптот и построить их на чертеже:

1) $xy=18$; 2) $2xy-9=0$; 3) $2xy+25=0$.

3.181. Найти точки пересечения прямой $4x-3y-16=0$ и гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

3.182. В следующих случаях определить, как расположена прямая относительно гиперболы — пересекает ли, касается или проходит вне ее:

1) $x-y-3=0$, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$; 2) $x-2y+1=0$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

3) $7x-5y=0$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

3.183. Определить, при каких значениях m прямая $y=\frac{5}{2}x+m$:

1) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; 2) касается ее;

3) проходит вне этой гиперболы.

3.184. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3.185. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных к прямой $4x+3y-7=0$.

3.186. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2-y^2=16$, проведенных из точки $A(-1; -7)$.

3.187. Из точки $C(1; -10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

3.188. Из точки $P(1; -5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

3.189. Гипербола проходит через точку $A(\sqrt{6}; 3)$ и касается прямой $9x+2y-15=0$. Составить уравнение этой гиперболы при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

3.190. Составить уравнение гиперболы, касающейся двух прямых: $5x-6y-16=0$, $13x-10y-48=0$, при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

3.191. Убедившись, что точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и гиперболы $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ являются вершинами прямоугольника, составить уравнения его сторон.

3.192. Прямая $2x-y-4=0$ касается гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Составить уравнение этой гиперболы.

3.193. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к гиперболе $15x+16y-36=0$ и расстояние между ее вершинами $2a=8$.

3.4.3. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой. Фокус параболы обозначается буквой F , расстояние от фокуса до директрисы — буквой p . Число p называется параметром параболы.

Пусть дана некоторая парабола. Введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус данной параболы перпендикулярно к директрисе и была направлена от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 3.15а). В этой системе координат данная парабола будет определяться уравнением

$$y^2 = 2px. \quad (3.37)$$

Уравнение (3.37) называется каноническим уравнением параболы. В этой же системе координат директриса данной параболы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Фокальный радиус произвольной точки $M(x; y)$ параболы (т.е. длина отрезка FM) может быть вычислен по формуле $r = x + \frac{p}{2}$.

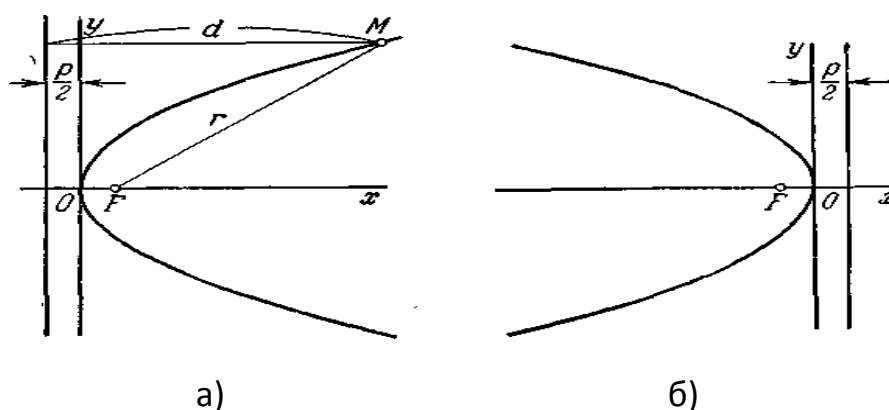


рис. 3.15

Парабола имеет одну ось симметрии, называемую осью параболы, с которой она пересекается в единственной точке. Точка пересечения параболы с осью называется ее вершиной. При указанном выше выборе координатной системы ось параболы совмещена с осью абсцисс, вершина находится в начале координат, вся парабола лежит в правой полуплоскости.

Если координатная система выбрана так, что ось абсцисс совмещена с осью параболы, начало координат — с вершиной, но парабола лежит в левой полуплоскости (рис. 3.15б), то ее уравнение будет иметь вид

$$y^2 = -2px. \quad (3.38)$$

В случае, когда начало координат находится в вершине, а с осью совмещена ось ординат, парабола будет иметь уравнение

$$x^2 = 2py, \quad (3.39)$$

если она лежит в верхней полуплоскости (рис. 3.16а), и

$$x^2 = -2py \quad (3.40)$$

— если в нижней полуплоскости (рис. 3.16б).

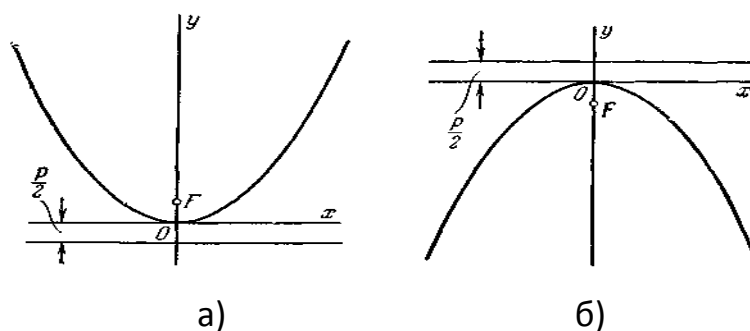


Рис. 3.16

Каждое из уравнений параболы (3.38), (3.39), (3.40), как и уравнение (3.37), называется каноническим.

Если ось симметрии параболы параллельна оси Oy , а ее вершина находится в точке $C(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (3.41)$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox , а ее вершина находится в точке $C(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \quad (3.42)$$

Геометрический смысл параметра p состоит в том, что, чем больше его величина, тем ближе к оси симметрии лежат ветви параболы.

Пример 3.19. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение. Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$. По условию, $r = 4$. Следовательно, $r = x + p/2 = 4$; поэтому: $x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$.

Таким образом, искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример 3.20. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы $y = -x^2 + 4x - 5$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат.

$y = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 5 - 4) = -(x - 2)^2 - 1$ или $y + 1 = -(x - 2)^2$. Сравнивая с (3.41), заключаем, что координаты вершины имеют вид $A(2; -1)$, уравнение оси симметрии $x = 2$, ветви направлены вниз, уравнение директрисы $y = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

Пример 3.21. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox , проходит через точку $A(4; -1)$, а вершина ее лежит в начале координат.

Решение. Так как парабола проходит через точку $A(4; -1)$ с положительной абсциссой, а ее осью служит ось Ox , то уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = 2px$. Подставляя в это уравнение координаты точки A , будем иметь $1 = 8p$ или $2p = \frac{1}{4}$. Таким образом, искомым уравнением параболы будет $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Задачи для самостоятельного решения

3.194. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

- 1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p=3$;
- 2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p=0,5$;
- 3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p=\frac{1}{4}$;
- 4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p=3$.

3.195. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

- 1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

3.196. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

- 1) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(9; 6)$;
- 2) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1; 3)$;
- 3) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$;
- 4) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $D(4; -8)$.

3.197. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0; -3)$ и проходит через начало координат, зная, что ее осью служит ось Oy .

3.198. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

- 1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$; 3) $y=-3\sqrt{-2x}$;
- 4) $y=-2\sqrt{x}$; 5) $x=\sqrt{5y}$; 6) $x=-5\sqrt{-y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

- 3.199.** Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.
- 3.200.** Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.
- 3.201.** Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7; 0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$.
- 3.202.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A , величину параметра p и уравнение директрисы:
- 1) $y^2=4x-8$; 2) $y^2=4-6x$; 3) $x^2=6y+2$; 4) $x^2=2-y$.
- 3.203.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :
- 1) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$; 2) $y=4x^2-8x+7$; 3) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$.
- 3.204.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :
- 1) $x=2y^2-12y+14$; 2) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$; 3) $x=-y^2+2y-1$.
- 3.205.** Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:
- 1) $y=3-4\sqrt{x-1}$; 2) $x=-4+3\sqrt{y+5}$;
 3) $x=2-\sqrt{6-2y}$; 4) $y=-5-\sqrt{-3x-21}$.
- Изобразить эти линии на чертеже.
- 3.206.** Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7; 2)$ и директриса $x-5=0$.
- 3.207.** Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x-y-1=0$.
- 3.208.** Дана вершина параболы $A(6; -3)$ и уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус F этой параболы.
- 3.209.** Определить точки пересечения прямой $3x+4y-12=0$ и параболы $y^2=-9x$.
- 3.210.** В следующих случаях определить, как расположена данная прямая относительно данной параболы — пересекает ли, касается или проходит вне ее:
- 1) $x-y+2=0$, $y^2=8x$; 2) $8x+3y-15=0$, $x^2=-3y$; 3) $5x-y-15=0$, $y^2=-5x$.

- 3.211.** Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx + 2$:
- 1) пересекает параболу $y^2 = 4x$; 2) касается ее;
 - 3) проходит вне этой параболы.
- 3.212.** Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.
- 3.213.** Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.
- 3.214.** Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.
- 3.215.** Провести касательную к параболе $y^2=12x$ параллельно прямой $3x-2y+30=0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.
- 3.216.** Составить уравнения касательных к параболе $y^2=36x$, проведенных из точки $A(2; 9)$.
- 3.217.** Из точки $A(5; 9)$ проведены касательные к параболе $y^2=5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
- 3.218.** Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ и параболы $y^2=24x$.
- 3.219.** Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ и параболы $y^2=3x$.
- 3.220.** Определить точки пересечения двух парабол: $y=x^2-2x+1$, $x=y^2-6y+7$.

3.5. Прямая и плоскость в пространстве

Уравнением данной поверхности (в выбранной системе координат) называется такое уравнение с тремя переменными $P(x, y, z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Линия в пространстве определяется как пересечение двух данных поверхностей. Точка $M(x; y; z)$, лежащая на линии, принадлежит как одной, так и другой поверхности, и следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям обеих поверхностей. Поэтому *уравнение линии* в пространстве

описывается совокупностью уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Если $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ есть уравнения трех поверхностей, то для нахождения точек их пересечения нужно решить систему:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Каждое решение x, y, z этой системы представляет собой координаты одной из точек пересечения данных поверхностей.

3.5.1. Плоскость в пространстве

В декартовых координатах каждая плоскость определяется линейным уравнением первой степени и каждое линейное уравнение первой степени определяет плоскость.

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее *нормальным вектором*. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (3.43)$$

определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}=(A; B; C)$.

Раскрывая в уравнении (3.43) скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D , получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (3.44)$$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Уравнением плоскости в векторной форме называется уравнение

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0, \quad (3.45)$$

где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости; $\vec{r} = (x; y; z)$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости.

Если в уравнении (3.44) отсутствует свободный член ($D=0$), то плоскость проходит через начало координат. Если отсутствует член с одной из текущих координат (т.е. какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю), то плоскость параллельна одной из координатных осей, именно той, которая одноименна с отсутствующей координатой; если, кроме того, отсутствует свободный член, то

плоскость проходит через эту ось. Если в уравнении отсутствуют два члена с текущими координатами (какие-либо два из коэффициентов A, B, C равны нулю), то плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, именно той, которая проходит через оси, одноименные с отсутствующими координатами; если, кроме того, отсутствует свободный член, то плоскость совпадает с этой координатной плоскостью.

Если в уравнении плоскости (3.44) ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю, то это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (3.46)$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ есть величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая каждый от начала координат). Уравнение (3.46) называется **уравнением плоскости в «отрезках»**.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_1 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.47)$$

Углом φ между двумя плоскостями называется угол между нормальными к этим плоскостям. Такое определение позволяет в качестве угла между плоскостями рассматривать либо острый, либо тупой угол, дополняющие друг друга до π .

Если заданы плоскости $\vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, где $\vec{n}_1 (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 (A_2; B_2; C_2)$, то угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения, т.е. $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.48)$$

Если две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ коллинеарны (рис. 3.17), т.е. из условия коллинеарности двух векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вытекает условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.49)$$

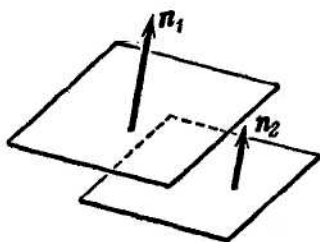


Рис. 3.17

Если две плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны (рис. 3.18), т.е. из условия ортогональности двух векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вытекает условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.50)$$

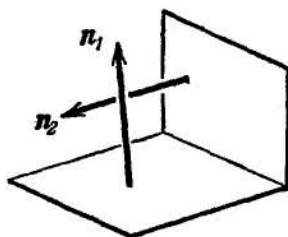


Рис. 3.18

Расстояние от точки $P(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости (3.44) находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.51)$$

Пример 3.22. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2; 3; -1)$ и $B(-1; 2; 4)$.

Решение. Так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz , то в ее общем уравнении (3.44) отсутствует координата z , т.е. искомое уравнение имеет вид $Ax + By + D = 0$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение $Ax + By + D = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B + D = -2A, \\ 2B + D = A. \end{cases}.$$

Решая систему, находим $B = -3A$, $D = 7A$. Таким образом, уравнение плоскости имеет вид $Ax - 3Ay + 7A = 0$. После сокращения на A уравнение искомой плоскости примет вид $x - 3y + 7 = 0$.

Пример 3.23. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3; 7; -1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox , то она параллельна плоскости Oyz и потому ее уравнение имеет вид $Ax + D = 0$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A(3; 7; -1)$, получаем, что $D = -3A$. Значение $D = -3A$ подставим в уравнение плоскости и, сокращая на A , получаем уравнение искомой плоскости в общем виде $x - 3 = 0$.

Пример 3.24. Через точку $A(2; 3; -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Решение. Используя уравнение (3.43), имеем $A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0$. Из условия (3.49) параллельности двух плоскостей получаем $\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} = k$. Таким образом, уравнение искомой плоскости примет вид $2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k(z+1) = 0$, или после сокращения на k , $2(x-2) - 3(y-3) + 5(z+1) = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, имеем общее уравнение искомой плоскости $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Пример 3.25. Через точки $A(1; 2; 3)$ и $B(-2; -1; 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$ имеет координаты $\vec{n} = (1; 4; -2)$. Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка искомой плоскости. Рассмотрим два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$, принадлежащие искомой плоскости. Используя условие компланарности трех векторов $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ и $\vec{n}$,

$$\text{запишем уравнение искомой плоскости } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & -1-2 & 3-3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ по правилу

«треугольника», имеем $6x - 6 - 12z + 36 + 3z - 9 - 6y + 12 = 0$ или $6x - 6y - 9z + 33 = 0$ – общее уравнение искомой плоскости.

Пример 3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -2; 6)$, $M_2(5; -4; -2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy .

Решение. Уравнение плоскости ищем в виде (3.46). По условию $a = b$, поэтому искомое уравнение можно записать так: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$. Подставляя координаты точек $M_1(1; -2; 6)$ и $M_2(5; -4; -2)$ в последнее уравнение, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{-2}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{5}{a} + \frac{-4}{a} + \frac{-2}{c} = 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{1}{a} - \frac{2}{c} = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c = 2$, $a = \frac{1}{2}$. Следовательно,

искомое уравнение имеет вид $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{2} = 1$ или в общем виде

$$4x + 4y + z - 2 = 0.$$

Пример 3.27. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9; -2; 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Поскольку искомая точка $M(x; y; z)$ лежит на оси Ox , то $y = 0$ и $z = 0$. Расстояние от данной точки $M(x; 0; 0)$ до плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$ найдем по формуле (3.51):

$$d_1 = \frac{|3x - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7}.$$

Найдем расстояние между двумя точками $M(x; 0; 0)$ и $A(9; -2; 2)$

$$d_2 = \sqrt{(x - 9)^2 + (0 + 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{(x - 9)^2 + 8}.$$

Согласно условию $d_1 = d_2$, т.е. $\frac{|3x-3|}{7} = \sqrt{(x-9)^2 + 8}$. Возводя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получаем $5x^2 - 108x + 544 = 0$, откуда находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13\frac{3}{5}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(8; 0; 0)$ и $M_1(13\frac{3}{5}; 0; 0)$.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.221.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
- 3.222.** Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.
- 3.223.** Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.
- 3.224.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$ и $\vec{a}_2 = (1; -2; 1)$.
- 3.225.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; -4)$.
- 3.226.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.
- 3.227.** Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей и записать выражение координат произвольного нормального вектора:
- | | | |
|----------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $2x - y - 2z + 5 = 0$; | 2) $x + 5y - z = 0$; | 3) $3x - 2y - 7 = 0$; |
| 4) $5y - 3z = 0$; | 5) $x + 2 = 0$; | 6) $y - 3 = 0$. |
- 3.228.** Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:
- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, | $2x - 3y + 5z + 3 = 0$; |
| 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, | $2x + y + 2z - 1 = 0$; |
| 3) $x - 3z + 2 = 0$, | $2x - 6z - 7 = 0$. |

3.229. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

3.230. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

3.231. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

3.232. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

2) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

3) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

3.233. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

3.234. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

3.235. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

3.236. Установить, что три плоскости $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

- 3.237.** Доказать, что три плоскости $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходят через одну прямую.
- 3.238.** Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.
- 3.239.** Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$:
- 1) имеют одну общую точку;
 - 2) проходят через одну прямую;
 - 3) пересекаются по трем различным параллельным прямым.
- 3.240.** Составить уравнение плоскости, которая проходит:
- 1) через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости Oxy ;
 - 2) через точку $M_2(1; -2; 4)$ параллельно плоскости Oxz ;
 - 3) через точку $M_3(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости Oyz .
- 3.241.** Составить уравнение плоскости, которая проходит:
- 1) через ось Ox и точку $M_1(4; -1; 2)$;
 - 2) через ось Oy и точку $M_2(1; 4; -3)$;
 - 3) через ось Oz и точку $M_3(3; -4; 7)$.
- 3.242.** Составить уравнение плоскости, которая проходит:
- 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox ;
 - 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy ;
 - 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz .
- 3.243.** Найти точки пересечения плоскости $2x-3y-4z-24=0$ с осями координат.
- 3.244.** Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.
- 3.245.** Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy .
- 3.246.** Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.
- 3.247.** Плоскость проходит через точку $M_1(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$ и на оси аппликат отрезок $c = 2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

- 3.248.** Плоскость проходит через точки $M_1(1; 2; -1)$ и $M_2(-3; 2; 1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».
- 3.249.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным из начала координат).
- 3.250.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликат отличные от нуля отрезки одинаковой длины.
- 3.251.** Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $M_1(4; 3; 2)$ и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.
- 3.252.** Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c = -5$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.
- 3.253.** Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{s} = (2; 1; -1)$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$.
- 3.254.** Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = -2$ и $b = \frac{2}{3}$ соответственно.

3.5.2. Уравнения прямой в пространстве

Прямая как пересечение двух плоскостей (рис. 3.19) определяется совместным заданием двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 первого из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 второго (в противном случае эти уравнения будут определять параллельные или совпавшие плоскости).

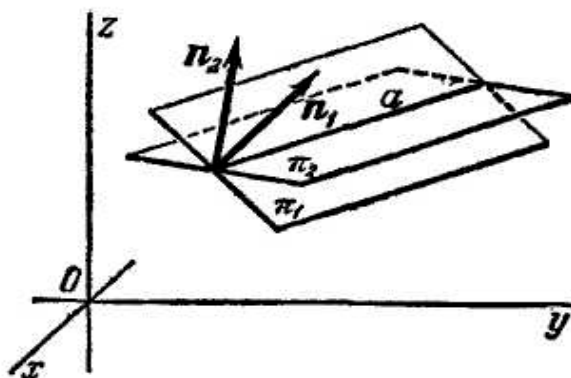


Рис. 3.19

Каждый ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется *направляющим вектором* этой прямой и обозначается $\vec{s} = (l; m; n)$.

Если известна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s} = (l; m; n)$, то прямая может быть определена соотношениями вида:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.53)$$

В таком виде уравнения прямой называются каноническими.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}. \quad (3.54)$$

Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях (3.53), получаем $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$. Выражая x, y, z , получаем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (l; m; n)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3.55)$$

В уравнениях (3.55) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр; x, y, z — как функции от t . При изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой.

Числа l, m, n называются *направляющими коэффициентами* прямой.

Если прямая задана уравнениями (3.52), то ее направляющие коэффициенты находятся по формулам:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (3.56)$$

Уравнения (3.55) можно записать в виде одного векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} t, \quad (3.57)$$

где символами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ обозначены радиус-векторы точек M_0 и M соответственно.

3.5.3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве две прямые L_1 и L_2 заданы параметрическими (3.55) или каноническими (3.53) уравнениями:

$$L_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t \quad \text{и} \quad L_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t,$$

где $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$, $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ или

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Рассмотрим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \quad (3.58)$

I. Равенство $\Delta = 0$ является необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых одной плоскости. При этом:

I.a. Если в определителе $\Delta = 0$ все строки пропорциональны, то прямые совпадают.

I.6. Если в определителе $\Delta = 0$ пропорциональны только первые две строки

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3.59)$$

(направляющие векторы прямых коллинеарны), то прямые параллельны.

I.в. Если $\Delta = 0$, но условие (3.59) не выполнено, то прямые пересекаются.

II. Если $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются.

Угол φ между двумя прямыми есть угол между направляющими векторами этих прямых, который находится с помощью их скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.60)$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых является ортогональность направляющих векторов этих прямых:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.61)$$

Пример 3.28. Уравнение прямой $\begin{cases} x - 4y + 5z - 1 = 0, \\ 2x + 3y + z + 9 = 0. \end{cases}$ преобразовать к

каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

Решение. Для записи уравнения прямой в каноническом виде (3.53) необходимо знать ее направляющие коэффициенты l , m , n и точку $M(x_0; y_0; z_0)$, через которую она проходит. Направляющие коэффициенты l , m , n найдем по формулам (3.56):

$$l = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad \text{Отсюда, раскрывая определители,}$$

получаем $l = -19$, $m = 9$, $n = 11$.

Для нахождения координат точки M полагаем, например, что $z_0 = 0$.

Остальные координаты найдем из системы $\begin{cases} x_0 - 4y_0 - 1 = 0, \\ 2x_0 + 3y_0 + 9 = 0. \end{cases}$ Тогда

$x_0 = -3, y_0 = -1$. Таким образом, прямая проходит через точку $M(-3; -1; 0)$, а ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{11}$.

Углы, образованные этой прямой с координатными осями, определяем из направляющих косинусов вектора $\vec{s}$:

$$\cos \alpha = \frac{-19}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{-19}{\sqrt{563}}; \quad \cos \beta = \frac{9}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{9}{\sqrt{563}};$$

$$\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{11}{\sqrt{563}}.$$

По известным косинусам углов находим углы:

$$\alpha = \arccos \frac{-19}{\sqrt{563}} \approx 143^\circ, \quad \beta = \arccos \frac{9}{\sqrt{563}} \approx 67^\circ, \quad \gamma = \arccos \frac{11}{\sqrt{563}} \approx 62^\circ.$$

Пример 3.29. Через точку $M(1; -1; 2)$ провести прямую, параллельно:

а) прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$; б) оси Oz .

Решение: а) канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ имеют вид $\frac{x-1}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-2}{n}$. Из условия (3.59) параллельности двух прямых искомые значения l, m, n должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 1, 3, 2, т.е. $l = k, m = 3k, n = 2k$. Таким образом,

канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{3k} = \frac{z-2}{2k}$ или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2};$$

б) из условия параллельности двух прямых искомые значения l, m, n должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 0, 0, 1, т.е. $l = 0, m = 0, n = k$. Таким образом, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{k} \text{ или } \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

Это уравнение можно переписать в виде пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x-1=0, \\ y+1=0. \end{cases}$

Пример 3.30. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, -2, 5)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}$ и $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}$.

Решение. Уравнения прямой ищем в виде $\frac{x-2}{l} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-5}{n}$. Направляющие коэффициенты l, m, n , определяемые с точностью до постоянного множителя, в силу условия (3.61) должны удовлетворять системе двух уравнений $\begin{cases} -l + 2m + 2n = 0, \\ 6l + 3m - 2n = 0. \end{cases}$ Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим $\begin{cases} 5l + 5m = 0, \\ 3l - 2n = 0 \end{cases}$, отсюда $m = -l, n = \frac{3}{2}l$. Полагая, например, $l = 2$, получим $m = -2, n = 3$.

Таким образом, уравнения искомой прямой имеют вид $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{3}$.

Пример 3.31. Составить параметрические уравнения диагоналей параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(2; 4; 6), B(-3; 5; 4), C(8; -6; 2)$.

Решение. Запишем канонические уравнения диагонали AC по формуле (3.54): $\frac{x-2}{8-2} = \frac{y-4}{-6-4} = \frac{z-6}{2-6}$ или $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}$. Для записи уравнения диагонали BD необходимо найти координаты точки пересечения диагоналей. Так как точка пересечения диагоналей M является серединой отрезка AC , то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат концов, т.е. $M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{4-6}{2}; \frac{6+2}{2}\right)$ или $M(5; -1; 4)$. Тогда канонические уравнения диагонали BD имеет вид $\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-5}{-1-5} = \frac{z-4}{4-4}$ или $\frac{x+3}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-4}{0}$. Параметрические уравнения диагоналей AC и BD имеют соответственно вид $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 4 - 5t, \\ z = 6 - 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -3 + 8s, \\ y = 5 - 6s, \\ z = 4. \end{cases}$

Пример 3.32. Исследовать взаимное расположение двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

Решение. По формуле (3.58) составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 5 - 96 + 40 + 16 + 15 = 0.$$

Так как две первые строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

По формуле (3.60) найдем угол между этими прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{21} \sqrt{14}} = \frac{8}{7\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{42} = \frac{4\sqrt{6}}{21}.$$

$$\text{Отсюда } \varphi \approx \arccos \frac{4\sqrt{6}}{21} \approx 58^\circ.$$

Найдем точку $M(x; y; z)$ пересечения указанных прямых. Запишем уравнение второй прямой в виде $x = 6 + 3p, y = -1 - 2p, z = -2 + p$, где p – параметр. Приравнявая соответствующие координаты двух прямых, получим $1 + 2t = 6 + 3p, 7 + t = -1 - 2p, 3 + 4t = -2 + p$. Исключая t из первых двух уравнений, получим $7p = -21$, отсюда $p = -3$. Из первого уравнения находим $t = -2$. Третье уравнение системы при найденных значениях t и p обращается в тождество. Подставляя значение $t = -2$ в уравнения первой прямой или значение $p = -3$ в уравнения второй прямой, получим точку пересечения прямых: $M(-3; 5; -5)$.

Окончательно имеем, что прямые пересекаются в точке $M(-3; 5; -5)$ под углом $\varphi \approx 58^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.255.** Составить уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $5x-7y+2z-3=0$ с координатными плоскостями.
- 3.256.** Составить уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $E(3; 2; -5)$.
- 3.257.** Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.
- 3.258.** Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0, \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ пересекает ось Oy .
- 3.259.** Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x+3y-z+D=0, \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ пересекает: 1) ось Ox ; 2) ось Oy ; 3) ось Oz .
- 3.260.** Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y-C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z-D_2=0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) оси Oz .
- 3.261.** Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y-C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z-D_2=0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая:
- 1) пересекала ось абсцисс; 2) пересекала ось ординат;
 - 3) пересекала ось аппликат; 4) совпадала с осью абсцисс;
 - 5) совпадала с осью ординат; 6) совпадала с осью аппликат.
- 3.262.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:
- 1) вектору $\vec{a} = (2; -3; 5)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
 - 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .
- 3.263.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:
- 1) $(1; -2; 1)$ и $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$ и $(1; 0; -3)$;

3) $(0; -2; 3)$ и $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$ и $(-1; 2; -4)$.

3.264. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно

1) вектору $\vec{a} = (2; -3; 4)$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{0}$;

3) прямой $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

3.265. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) $(3; -1; 2)$ и $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$ и $(3; -1; 0)$; 3) $(0; 0; 1)$ и $(0; 1; -2)$.

3.266. Через точки $M_1(-6; 6; -5)$ и $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

3.267. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины C .

3.268. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

3.269. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

3.270. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

3.271. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; 3; -5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

3.272. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

3.273. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

3.274. Доказать параллельность прямых:

$$1) \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$$

$$2) x-2t+5, y=-t+2, z=t-7 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$$

3.275. Доказать перпендикулярность прямых:

$$1) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$$

$$2) x-2t+1, y=-3t-2, z=-6t+1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

3.276. Найти острый угол между прямыми: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

3.277. Найти тупой угол между прямыми: $x=3t-2, y=0, z=-t+3$ и $x=2t-1, y=0, z=t-3$.

3.278. Определить косинус угла между прямыми: $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

3.279. Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x=2t-3, y=3t-2, z=-4t+6$ и $x=t+5, y=4t-1, z=t-4$ пересекаются.

3.280. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-7}{2}$. При каком значении a они пересекаются?

3.281. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a}=(6; -2; -3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

3.282. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

3.5.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Углом φ между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть плоскость задана уравнением $\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$, а прямая – $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$. Из геометрических соображений (рис. 3.20)

видно, что искомый угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где α – угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{s}$. Этот угол может быть найден по формуле

$$\sin \varphi = |\cos \alpha| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} \quad (3.62)$$

или в координатной форме

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.63)$$

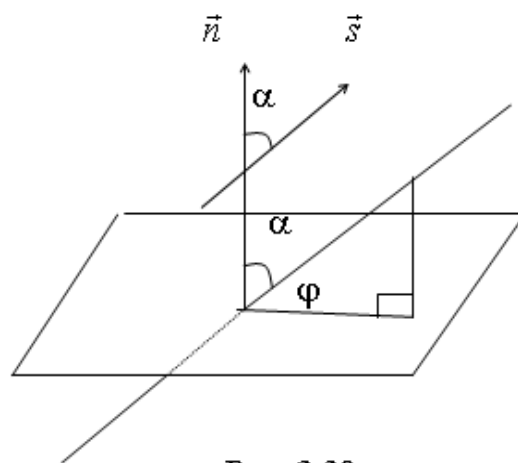


Рис. 3.20

Для того чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, что равносильно условию

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (3.64)$$

Для того чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (3.65)$$

Пусть некоторая прямая определена как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ и α и β — какие угодно числа, одновременно не равные нулю, тогда уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3.66)$$

определяет плоскость, проходящую через данную прямую (3.52).

Уравнением вида (3.66) (при соответствующем выборе чисел α , β) можно определить любую плоскость, проходящую через данную прямую (3.52).

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей. Уравнение вида (3.66) называется уравнением пучка плоскостей.

Если $\alpha \neq 0$ то, полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, уравнение (3.66) можно привести к виду

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (3.67)$$

В таком виде уравнение пучка плоскостей более употребительно, чем уравнение (3.66), однако уравнением (3.67) можно определить все плоскости пучка, за исключением той, которой соответствует $\alpha = 0$, т. е. за исключением плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Прямая $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, если выполняются условия:

$$\begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Пример 3.33. Найти точку пересечения плоскости $3x - 4y + 5z + 16 = 0$ и прямой $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{-3}$.

Решение. Для решения задачи уравнение прямой удобно записать в параметрическом виде $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{-3} = t$, откуда $\begin{cases} x = -6 + 2t, \\ y = 7 - t, \\ z = 8 - 3t. \end{cases}$ Подставим

выражения для x, y, z в уравнение плоскости $3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 5(8 - 3t) + 16 = 0$, откуда $t = 2$. Из уравнения прямой при $t = 2$

находим координаты точки пересечения $x = -2, y = 5, z = 2$. Искомой точкой пересечения является точка $N(-2; 5; 2)$.

Пример 3.34. Найти проекцию точки $P(5; -6; 7)$ на прямую $x = 7 - 2t, y = 1 + 3t, z = 4 + t$.

Решение. Искомая проекция является точкой пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку $P(5; -6; 7)$ перпендикулярно этой прямой. Составим уравнение указанной плоскости, выбирая в качестве вектора нормали $\vec{n}$ направляющий вектор прямой $\vec{s} = (-2; 3; 1)$: $-2(x - 5) + 3(y + 6) + (z - 7) = 0$ или $2x - 3y - z - 21 = 0$.

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости: $2(7 - 2t) - 3(1 + 3t) - (4 + t) - 21 = 0$ или $t = -1$. Из уравнения прямой при $t = -1$ находим координаты искомой точки $x = 9, y = -2, z = 3$.

Таким образом, точка $Q(9; -2; 3)$ является проекцией точки $P(5; -6; 7)$ на указанную прямую.

Пример 3.35. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и параллельно оси Ox .

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку, определяемому плоскостями $2x - y + z - 3 = 0$ и $x + y + z + 1 = 0$ и, следовательно, задается уравнением $\alpha(2x - y + z - 3) + \beta(x + y + z + 1) = 0$ или $(2\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta)z - 3\alpha + \beta = 0$. Так как искомая плоскость параллельна оси Ox , то коэффициент при x должен быть равен 0, отсюда $\beta = -2\alpha$. Таким образом, $\alpha(2x - y + z - 3) - 2\alpha(x + y + z + 1) = 0$ или $-3y - z - 5 = 0$ — общее уравнение искомой плоскости.

Пример 3.36. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

Решение. При решении задачи будем использовать формулу (3.63). Для этого необходимо найти направляющие коэффициенты l, m, n прямой по

формулам (3.56): $l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, m = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2, n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Подставляя найденные значения $l = 5$, $m = -2$, $n = -3$ и координаты вектора нормали $\vec{n} = (1; 1; 3)$ плоскости $x + y + 3z - 1 = 0$ в формулу (3.63), имеем

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{418}} \approx 0,29, \text{ откуда искомый угол } \varphi \approx 17^\circ.$$

Пример 3.37. Показать, что прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ лежит в плоскости $x + y - z - 6 = 0$.

Решение. Необходимо проверить выполнение условий (3.68) для $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$, $D = -6$, $l = 2$, $m = 1$, $n = 3$, $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$. Действительно, $Aa + Bb + Cc + D = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) - 6 = 0$ и $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$.

Так как условия (3.68) выполнены, то прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ лежит в плоскости $x + y - z - 6 = 0$.

Пример 3.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ и точку $M(1; -1; 2)$.

Решение. На основании (3.67) уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, может быть записано в виде $3x + y - 4z + 5 + \lambda(x - y + 2z - 1) = 0$. Из этого пучка плоскостей нам необходимо выбрать ту, которая проходит через точку $M(1; -1; 2)$.

Если плоскость проходит через заданную точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение плоскости координаты точки M , получим уравнение для нахождения λ : $5\lambda - 1 = 0$, откуда $\lambda = \frac{1}{5}$. Таким образом, из пучка плоскостей при $\lambda = \frac{1}{5}$ определяем искомую плоскость $3x + y - 4z + 5 + \frac{1}{5}(x - y + 2z - 1) = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем общее уравнение искомой плоскости: $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

3.283. В пучке плоскостей $2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$ найти плоскость, которая:

- 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$;
- 2) параллельна оси Ox ;
- 3) параллельна оси Oy ;
- 4) параллельна оси Oz .

3.284. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$:

- 1) через точку $M_1(4; -2; -3)$;
- 2) параллельно оси Ox ;
- 3) параллельно оси Oy ;
- 4) параллельно оси Oz .

3.285. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ параллельно вектору $\vec{l}=(2; -1; -2)$.

3.286. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ перпендикулярно плоскости $x-2y+z+5=0$.

3.287. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$
 перпендикулярно плоскости $x+19y-7z-11=0$.

3.288. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x+y-z+1=0$, $x+y+2z+1=0$ параллельно отрезку, ограниченному точками $M_1(2; 5; -3)$, $M_2(3; -2; 2)$.

3.289. Определить, принадлежит ли плоскость $4x-8y+17z-8=0$ пучку плоскостей $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$.

3.290. Определить, при каких значениях l и m плоскость $5x+ly+4z+m=0$ принадлежит пучку плоскостей $\alpha(3x-7y+z-3)+\beta(x-9y-2z+5)=0$.

3.291. Найти уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0$ и отсекает от координатного угла Oxy треугольник с площадью, равной 6 кв. ед.

3.292. Доказать, что прямая $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

3.293. Доказать, что прямая
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
 лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

3.294. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x+3y+z-1=0;$$

$$2) \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \quad x-2y+z-15=0;$$

$$3) \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$$

3.295. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

3.296. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

3.297. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

3.298. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

3.299. При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

3.300. При каких значениях A и D прямая $x=3+4t, y=1-4t, z=-3+t$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$?

3.301. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $x=3+2t, y=5-3t, z=-2-2t$?

3.302. При каких значениях t и C прямая $\frac{x-2}{t} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

3.303. Найти проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $x=3t, y=5t-7, z=2t+2$.

3.304. Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

3.305. Найти точку Q , симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.

3.306. Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

3.307. Найти точку Q , симметричную точке $P(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

3.308. На плоскости Oxy найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-1; 2; 5)$ и $B(11; -16; 10)$ была бы наименьшей.

3.309. Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых:

$$1) \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}; \quad 2) x=t+1, y=t+2, z=4t+13; \quad 3) \begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 2x-2y+2z+17=0. \end{cases}$$

3.310. Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние d между ними.

3.311. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{-3}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

3.312. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; -2; 1)$ и прямую $x=2t+1; y=-3t+2; z=2t-3$.

3.313. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x=3t+7, y=2t+2, z=-2t+1$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

3.314. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

3.315. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

3.316. Найти точку Q , симметричную точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ и $M_3(10; -7; 1)$.

3.317. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=3t+1, y=2t+3, z=-t-2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

3.318. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

3.6. Понятие гиперплоскости. Выпуклые множества

Обобщением понятия плоскости трехмерного пространства на случай n -мерного пространства является понятие *гиперплоскости*. Каждую гиперплоскость можно задать одним линейным уравнением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (3.69)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – действительные числа, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$.

Очевидно, что на декартовой плоскости ($n=2$) уравнение (3.69) описывает прямую. Если в n -мерном пространстве задана гиперплоскость (3.69), то этой гиперплоскостью все точки пространства разбиваются на два *полупространства*:

1) множество точек, для которых $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$; (3.70)

2) множество точек, для которых $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$. (3.71)

Эти полупространства пересекаются по самой гиперплоскости (3.69).

Множество X точек n -мерного пространства называется *выпуклым*, если для любых $A, B \in X$ справедливо $\lambda A + (1 - \lambda)B \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$, т.е. выпуклое множество наряду с любыми двумя своими точками A и B содержит и все точки отрезка AB .

Например, на рис. 3.21 первое множество является выпуклым, а второе – нет.

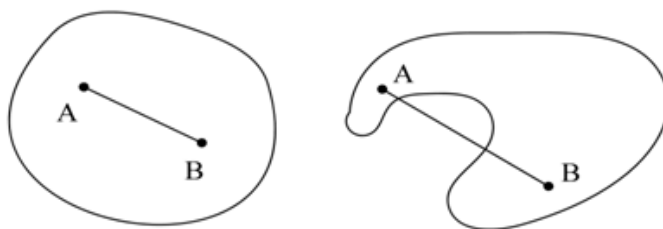


Рис 3.21

Пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Каждое полупространство (3.70), (3.71) является выпуклым множеством. Гиперплоскость (3.69), как пересечение выпуклых множеств, есть выпуклое множество.

Через каждую точку границы выпуклого множества на плоскости проходит, по крайней мере, одна *опорная прямая*, имеющая общую точку с границей, но не пересекающая это множество.

В трехмерном пространстве через каждую точку границы выпуклого множества проходит хотя бы одна *опорная плоскость*, оставляющая это множество в одном полупространстве.

Множество X точек n -мерного пространства называется *ограниченным*, если оно имеет конечный диаметр $d(X) = \max_{A \in X, B \in X} \rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ – расстояние между двумя точками A и B множества X .

Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны m полупространств, определяемых неравенствами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases} \quad (3.72)$$

Все знаки неравенств одного смысла могут быть достигнуты умножением, в случае необходимости, обеих частей неравенства на -1 .

Пересечение этих полупространств, называемое *выпуклой многогранной областью*, определяет множество решений системы линейных неравенств (3.72). Если это пересечение ограничено, оно называется *выпуклым многогранником n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$* . Таким образом,

множество решений системы линейных неравенств (3.72) представляет собой либо выпуклый многогранник, либо выпуклую неограниченную область, либо пустое множество точек.

Частным случаем, но крайне важным с точки зрения графической иллюстрации решения является система m линейных неравенств с двумя переменными, имеющая вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m. \end{cases} \quad (3.73)$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, b_1, \dots, b_m$ – заданные действительные числа.

Системы вида (3.73) возникают при моделировании многих экономических задач.

Так как (3.73) – совокупность линейных неравенств, необходимо определить понятие решения линейного относительно переменных x_1, x_2 неравенства:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b. \quad (3.74)$$

Решением неравенства называется такая пара действительных чисел (x_1, x_2) , которые удовлетворяют неравенству (3.74). Если трактовать x_1 и x_2 как координаты точек пространства $\mathbb{R}^2$, т.е. плоскости x_1Ox_2 , то *областью решений* неравенства называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (3.74). Областью решений линейного неравенства является одна из полуплоскостей, на которые *граничная прямая* $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ делит плоскость x_1Ox_2 .

Одной из экономических интерпретацией неравенства (3.74) является *бюджетное множество*, которое определяется как множество наборов товаров $(x_1; x_2)$ в количествах x_1 и x_2 соответственно (первого и второго вида), которые можно приобрести по ценам a_1 и a_2 за единицу товара, имея заданную сумму b денежных единиц.

Пример 3.39. Построить на плоскости x_1Ox_2 область решений системы

линейных неравенств:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим граничные прямые (рис. 3.22): $3x_1 + 2x_2 = 6$ (L_1); $x_1 + x_2 = 1$ (L_2); $x_1 = 9$ (L_3); $x_2 = 0$ (L_4). Прямые (L_1) и (L_2) строим по двум точкам, а именно, точкам пересечения с осями координат. Построим прямую (L_1): $3x_1 + 2x_2 = 6$. Если $x_2 = 0$, то $3x_1 + 2 \cdot 0 = 6$, $x_1 = 2$, значит, прямая (L_1) пересекает ось Ox_1 в точке $A(2; 0)$; если $x_1 = 0$, то $3 \cdot 0 + 2x_2 = 6$, $x_2 = 3$, значит, прямая (L_1) пересекает ось Ox_2 в точке $B(0; 3)$. Аналогично устанавливаем, что прямая (L_2) пересекает оси Ox_1 и Ox_2 в точках $C(1; 0)$ и $D(0; 1)$ соответственно. Прямые (L_3) и (L_4) задают уравнения осей координат Ox_2 и Ox_1 соответственно.

Каждая из построенных прямых разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (ее направление укажем стрелкой) является

решением неравенства, соответствующего граничной прямой. Для того, чтобы узнать, какая именно из двух полуплоскостей является решением неравенства, в неравенство, соответствующее рассматриваемой граничной прямой, подставим координаты точки, не лежащей на этой прямой, например, для (L_1) и (L_2) подставим точку $O(0; 0)$: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 6$, (L_1) ; $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 1$, (L_2) . Получим числовое неравенство $0 \leq 6$, которое является истинным, следовательно, стрелка направлена от прямой (L_1) в полуплоскость с точкой $O(0; 0)$, и $0 \geq 1$, которое является ложным. Следовательно, стрелка направлена от прямой (L_2) в полуплоскость, не содержащую точку $O(0; 0)$. Неравенство $x_1 \geq 0$ задает полуплоскость, лежащую правее прямой (L_1) ; а неравенство $x_2 \geq 0$ задает полуплоскость, лежащую выше прямой (L_2) . Пересечение отмеченных полуплоскостей (четырехугольник $ACDB$) и есть область решений изучаемой системы неравенств:

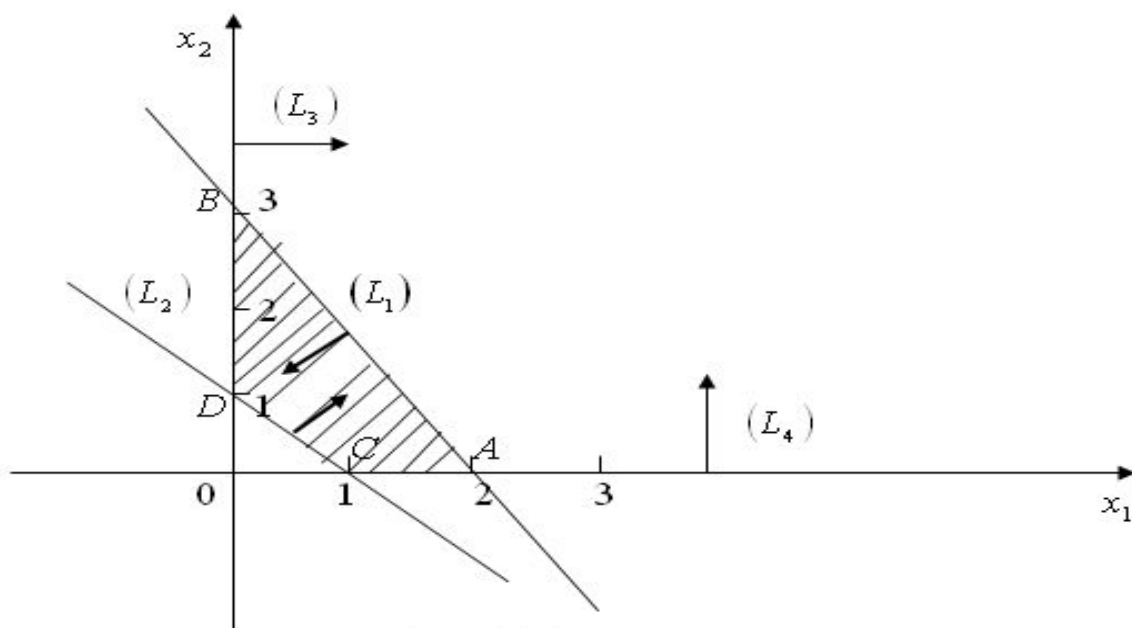


Рис. 3.22

Задачи для самостоятельного решения

Построить на плоскости x_1Ox_2 область решений системы линейных неравенств

3.319.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.320.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.321.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.322.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.323.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.324.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.325.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.326.} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.327.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.328.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.329.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.330.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq -1. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.331.} \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ x_1 - 3x_2 \geq -2, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{3.332.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Глава 4. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Функциональная зависимость и способы ее представления

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т.е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой $\mathbb{R}$.

Понятие функции. Область определения и область значений функции.

Если каждому числу x из некоторого множества X по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное число y , то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной*.

Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y , соответствующих различным числам $x \in X$, – *областью значений (изменения)* функции и обозначается $E(f)$.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется *значением функции* в точке x_0 (или при $x = x_0$).

График функции и способы ее задания. Если задана декартова прямоугольная система координат Oxy , то *графиком* функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Основными способами задания функции являются аналитический (формульный), графический и табличный. При аналитическом задании функции $y = f(x)$ часто не указываются области $D(f)$ и $E(f)$, но они естественным образом определяются из свойств функции $y = f(x)$.

Пример 4.1. Найти область определения и область значений функций:

$$1) f(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin 2x; \quad 2) f(x) = \lg(4 - 3x - x^2).$$

Решение: 1) функция $f(x) = \arcsin x$ определена на промежутке $[-1; 1]$, поэтому областью определения $D(f)$ данной функции является отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

В силу того, что справедливо неравенство $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin 2x \leq \frac{\pi}{2}$, областью значений $E(f)$ функции $f(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin 2x$ также будет промежуток $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

2) логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x + 4)(x - 1) > 0$, решая которое выясняем, что область определения $D(f)$ данной функции есть интервал $(-4; 1)$. Поскольку в области определения имеет место неравенство $0 < 4 - 3x - x^2 \leq \frac{7}{4}$, то областью значений $E(f)$ функции будет интервал $\left(-\infty; \lg \frac{7}{4}\right)$.

Четность и нечетность функции. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида*.

Периодичность функции. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число $T \neq 0$, называемое *периодом* функции, что для любого $x \in D(f)$ выполняются соотношения $x + T \in D(f)$, $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшим же периодом функции называется наименьшее положительное число τ , для которого $f(x + \tau) = f(x)$ при любом значении аргумента x . Следует иметь в виду, что в этом случае $f(x + k\tau) = f(x)$, где k – любое целое число.

Пример 4.2. Определить, какие из данных функций четные, какие – нечетные, а какие – общего вида:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = 3x^4\sqrt[3]{x} + 2\sin x; & 2) f(x) = 5^x - 5^{-x}; & 3) f(x) = e^x - 2e^{-x}; \\ 4) f(x) = \ln|x| - 7e^{-x^4}; & 5) f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}. \end{array}$$

Решение: 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, т.е. область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, имеет место цепочка равенств $f(-x) = 3(-x)^4\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -3x^4\sqrt[3]{x} - 2\sin x = -f(x)$. Следовательно, данная функция является нечетной;

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = f(x)$, т.е. данная функция – четная;

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т.е. данная функция является функцией общего вида;

4) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и $f(-x) = \ln|-x| - 7e^{-(-x)^4} = \ln|x| - 7e^{-x^4} = f(x)$, т.е. данная функция – четная;

5) $D(f) = (-2; 2)$, т.е. область определения функции симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln\frac{2+x}{2-x} = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{2+x}{2-x} = -f(x)$, т.е. функция нечетная.

Пример 4.3. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \cos 3x; & 2) f(x) = \sin^2 2x; \\ 3) f(x) = \sin 2x + \cos 5x; & 4) f(x) = 3x^4 + 1. \end{array}$$

Решение: 1) число 2π является наименьшим положительным периодом функции $\cos x$. Покажем, что наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x$ есть число $\frac{2\pi}{3}$. Действительно, $\cos 3(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x$, т.е. $T = \frac{2\pi}{3}$ – период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ – какой – либо другой период данной функции, то $\cos 3(x + T_1) =$

$= \cos(3x + 3T_1) = \cos 3x$ для всех значений аргумента x . Отсюда следует, что $3T_1$ – период функции $\cos t$, где $t = 3x$, а тогда $3T_1 \geq 2\pi$, т.е. $T_1 \geq \frac{2\pi}{3}$.

Итак, число $T = \frac{2\pi}{3}$ – наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x$;

2) период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 4x$, так как.
 $f(x) = \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$. Рассуждая как в пункте 1), можно показать, что наименьший положительный период функции $\cos 4x$ равен $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x) = \sin^2 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$;

3) наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 5x$ равны соответственно π и $\frac{2\pi}{5}$ (см. пункты 1) и 2)). Наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т.е. числу 2π ;

4) для положительных значений аргумента x функция $f(x) = 3x^4 + 1$ определена и возрастает, поэтому периодической быть не может. Значит, и на всей числовой оси функция не является периодической.

Сложная функция. Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда на множестве $D(f)$ определена функция $z = g(f(x))$, которая называется *сложной функцией* или *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Пример 4.4. Найти сложные функции $g \circ f$ и $f \circ g$, если:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = 3x^2 - 1$, $g(x) = \sin x$.

Решение: 1) по определению композиции функций имеем $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geq 0$;

2) аналогично получаем $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(3x^2 - 1)$ и $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\sin^2 x - 1$.

Возрастание и убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве $X \subset D(f)$, если для любых значений x_1, x_2 из этого множества X таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Невозрастающие и неубывающие функции называются *монотонными*.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве $X \subset D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*.

Обратная функция. Если для любых различных значений x_1, x_2 из области определения $D(f)$ функции f справедливо соотношение $f(x_1) \neq f(x_2)$, то можно однозначно выразить x через y : $x = g(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$).

Для функции $x = g(y)$ множество $E(f)$ является областью определения, а множество $D(f)$ – областью значений. Поскольку справедливы тождества $g(f(x)) \equiv x$ и $f(g(y)) \equiv y$, функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ являются *взаимно обратными*. Обратную функцию $x = g(y)$ обычно переписывают в стандартном виде $y = g(x)$, поменяв x и y местами, придавая тем самым x прежний смысл независимой переменной.

Если функция $f(x)$ имеет обратную, то каждая горизонтальная прямая пересекает ее график не более, чем в одной точке.

Пример 4.5. Найти функцию, обратную к данной

1) $y = \frac{3}{x+5}$;

2) $y = x^3$;

3) $y = x^2$.

Решение: 1) функция $y = f(x) = \frac{3}{x+5}$ убывает на множестве $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, которое является областью ее определения, а значит для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $D(f)$ функция имеет обратную. Чтобы найти эту обратную функцию, разрешим

уравнение $y = \frac{3}{x+5}$ относительно x : $x = \frac{3}{y} - 5$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т.е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = \frac{3}{x} - 5$ – обратная функция к исходной. Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции, т.е. с множеством $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а потому имеет обратную на этом промежутке. Рассуждая как в пункте 1), найдем обратную $y = \sqrt[3]{x}$, область определения которой есть множество $(-\infty; +\infty)$, являющееся также и областью значений исходной функции;

3) для любого $y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$, т.е. для указанных значений $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) = f(x_2)$ (каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y_0 = x^2$ в двух точках). Значит, на интервале $(-\infty; +\infty)$, являющемся естественной областью определения, данная функция обратной не имеет. Заметим, однако, что функция $y = x^2$ имеет обратную на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, где указанная функция является монотонной.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве X* , если существует такое положительное число M , что для любого значения аргумента $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти область определения следующих функций:

4.1. а) $y = \ln x + 2$;

б) $y = \sqrt{-px}$, $p \in \mathbb{R}$;

в) $y = \frac{1}{x^3 - x}$;

г) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$;

д) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

е) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{|x^2 - 9|}}$.

4.2. а) $y = \frac{\ln(x+3)}{x-3};$

б) $y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin \frac{3x-1}{2};$

в) $y = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{x-1};$

г) $y = \frac{x-2}{\sin 3x};$

д) $y = \frac{5x^4-3}{x-\sqrt{x^2-4}};$

е) $y = \arcsin \sqrt{2x}.$

4.3. а) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3);$

б) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1};$

в) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x);$

г) $y = \lg \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2};$

д) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2};$

е) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}.$

4.4. а) $y = \arccos \frac{2x}{1+x};$

б) $y = \arccos \cos x;$

в) $y = \cos \arccos x;$

г) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x};$

д) $y = \frac{1}{\cos x};$

е) $y = \sqrt{\sin x \cos x}.$

Найти множества значений следующих функций:

4.5. а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 13;$

б) $f(x) = 4^{x^2};$

в) $f(x) = 4 - 3\sin 2x;$

г) $f(x) = \pi \operatorname{arctg} x;$

д) $f(x) = 5 - \frac{1}{x};$

е) $f(x) = \sqrt{4-x} + 3.$

4.6. а) $f(x) = 4^{-2x^2-4x-5};$

б) $f(x) = \ln \cos^2 4x - 1;$

в) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{7};$

г) $f(x) = x \sin \frac{1}{x};$

д) $f(x) = \sin x \cos x;$

е) $f(x) = \frac{x}{|x|}.$

Определить, какие из данных функций четные, какие – нечетные, а какие – общего вида:

- 4.7.** а) $y = \frac{|x|}{x}$; б) $y = x^6 - 2x^4$; в) $y = x + x^2$;
 г) $y = \cos 2x$; д) $y = 2^x + 1$; е) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
4.8. а) $y = 4x \cos x$; б) $y = x^4 \sin 3x$; в) $y = \sin x - \cos x$;
 г) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$, $a > 0$, $a \neq 1$; д) $y = 2^{x^2 - x^4}$; е) $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

- 4.9.** а) $y = \cos \frac{\pi}{4}$; б) $y = |x|$; в) $y = \operatorname{tg}(2x - 1)$;
 г) $y = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$; д) $y = \sin 3x \cos 3x$; е) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
4.10. а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $y = \cos x^2$; в) $y = |\sin 2x|$;
 г) $y = \ln \cos x$; д) $y = \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$; е) $y = x \sin x$;
 ж) $y = 2 \cos \frac{x - \pi}{3}$.

Для данных функций найти сложные функции $f \circ f$, $g \circ f$ и $f \circ g$:

- 4.11.** а) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$; б) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$;
 в) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 5x - 3$; г) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$;
 д) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$, $g(x) = \frac{x - 1}{x}$;
 е) $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = -2$;
 ж) $f(x) = [x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x , $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Какие из данных функций имеют обратную? Для таких функций найти обратные функции:

- 4.12.** а) $y = x$; б) $y = 6 - 3x$; в) $y = 2x^2 + 1$;
 г) $y = |x|$; д) $y = 2x^3 + 5$; е) $y = \frac{x-2}{x}$.
4.13. а) $y = 4^{x-5}$; б) $y = 9 - 2x - x^2$; в) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0 \\ 2x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$;
 г) $y = \operatorname{sign} x$; д) $y = 1 + \lg(x+2)$; е) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$.

Выяснить, какие из данных функций монотонны, какие – строго монотонны, а какие – ограничены:

- 4.14.** а) $f(x) = c, c \in R$; б) $f(x) = \cos^2 x$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
 г) $f(x) = e^{2x}$; д) $f(x) = -x^2 + 2x$; е) $f(x) = \sqrt{2x+5}$;
 ж) $y = \operatorname{ctg} 7x$.
4.15. а) $f(x) = 3^{-x^2}$; б) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; в) $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$;
 г) $f(x) = 3x^3 - x$; д) $f(x) = \begin{cases} -10 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ е) $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$;
 ж) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$.

4.2. Элементарные функции. Преобразование графиков функций

Напомним, что *графиком* функции $f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Часто график функции $y = f(x)$ можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

В частности, из графика функции $y = f(x)$ получается график функции:

- 1) $y = f(x) + a$ – сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$;
- 2) $y = f(x - b)$ – сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$;
- 3) $y = kf(x)$ – растяжением вдоль оси Oy в k раз;
- 4) $y = f(mx)$ – сжатием по оси Ox в m раз;
- 5) $y = -f(x)$ – симметричным отражением относительно оси Ox ;
- 6) $y = f(-x)$ – симметричным отражением относительно оси Oy ;
- 7) $y = |f(x)|$, следующим образом: часть графика, расположенная не ниже оси Ox , остается без изменений, а «нижняя» часть графика симметрично отражается относительно оси Ox ;
- 8) $y = f(|x|)$, следующим образом: правая часть графика (при $x \geq 0$) остается без изменений, а вместо «левой» строится симметричное отражение «правой» относительно оси Oy .

Основными элементарными функциями называются:

- 1) *постоянная* функция $y = c$;
- 2) *степенная* функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) *показательная* функция $y = a^x$, $a \neq 0, a \neq 1$;
- 4) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$;
- 5) *тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$,
 $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ (где $\sec x = \frac{1}{\cos x}$), $y = \operatorname{cosec} x$ (где $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$);
- 6) *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций $(+, -, \cdot, \div)$ и композиций (т.е. образования сложных функций $f \circ g$).

Пример 4.6. Построить график функции

1) $y = x^2 + 6x + 7$;

2) $y = -2\sin 4x$.

Решение: 1) путем выделения полного квадрата функция преобразуется к виду $y = (x+3)^2 - 2$, поэтому график данной функции можно получить из графика функции $y = x^2$. Достаточно сначала сместить параболу $y = x^2$ на три единицы влево (получим график функции $y = (x+3)^2$), а затем на две единицы вниз (рис. 4.1);

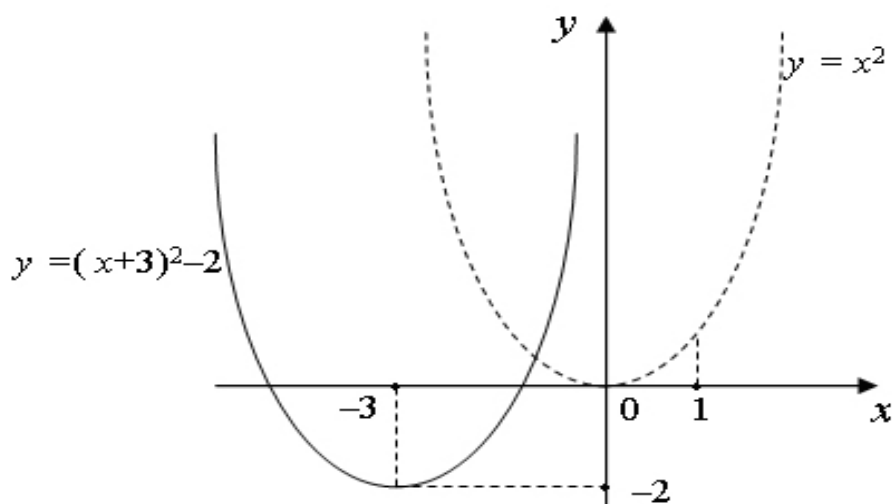


Рис. 4.1

2) сжав стандартную синусоиду $y = \sin x$ в четыре раза по оси Ox , получим график функции $y = \sin 4x$ (рис. 4.2).

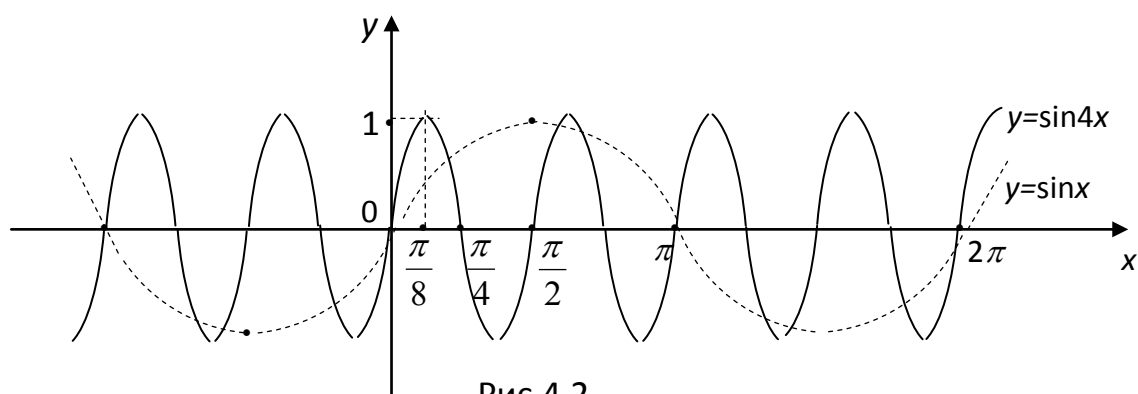


Рис.4.2

Растянув полученный график в два раза вдоль оси Oy , получим график функции $y = 2\sin 4x$ (рис. 4.3). Осталось отразить последний график относительно оси Ox . Результатом будет искомый график (см. рис. 4.3).

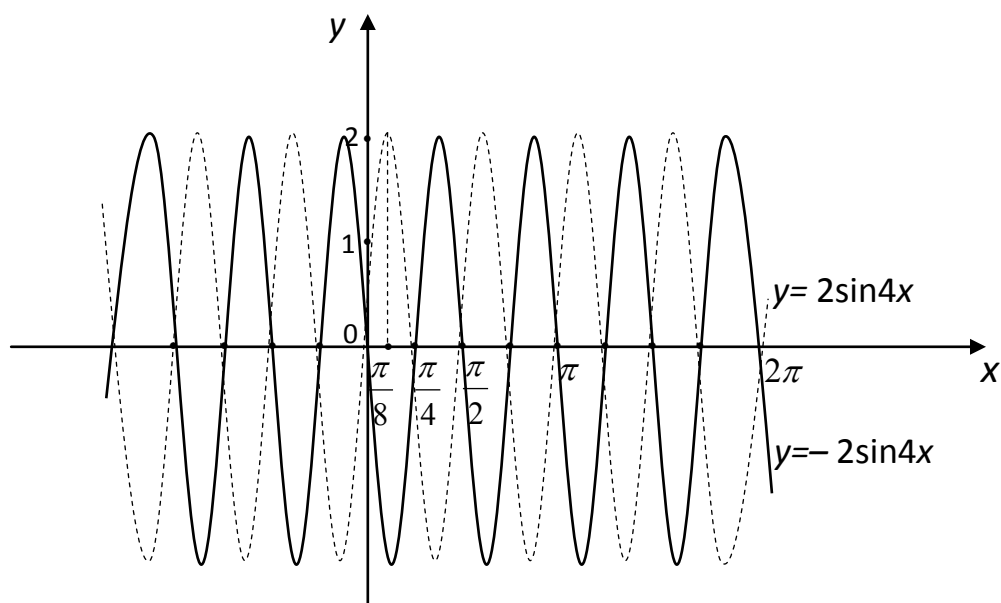


Рис.4.3

Задачи для самостоятельного решения

Построить графики следующих функции, исходя из графиков основных элементарных функций:

4.16. а) $y = x^2 - 6x + 11$;

б) $y = 3 - 2x - x^2$.

4.17. а) $y = -2\sin(x - \pi)$;

б) $y = 2\cos\frac{x}{2}$.

4.18. а) $y = -\frac{4}{x} - 1$;

б) $y = 2 + \frac{5}{x+2}$.

4.19. а) $y = \log_2(-x)$;

б) $y = \ln(1-x)$.

4.20. а) $y = |x+5|$;

б) $y = |x|^3$.

4.21. а) $y = \operatorname{tg}|x|$;

б) $y = |\operatorname{tg} x|$.

4.22. а) $y = \operatorname{sign} x$;

б) $y = \operatorname{sign}(\cos x)$.

4.23. а) $y = \frac{x+4}{x+2}$;

б) $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

4.24. а) $y = \sin(3x - 2) + 2$;

б) $y = \arcsin(x - 1)$.

4.25. а) $y = e^{2-x}$;

б) $y = 3^{x+2} - 3$.

4.26. а) $y = \sin^2 x$;

б) $y = |\sin x \cos x|$.

4.27. а) $y = [x]$;

б) $y = \{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x .

4.28. а) $y = \begin{cases} 3 - x & \text{при } x < 3, \\ 2x^2 & \text{при } x \geq 3; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-2x} & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$

4.29. а) $y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos^2 x & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} |x + 3| & \text{при } x < 0, \\ |3 - x| & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$

4.30. а) $y = \cos x + \sin x$;

б) $y = |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|$.

Глава 5. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

5.1. Числовая последовательность

Понятие числовой последовательности. Действия над последовательностями. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которую будем обозначать $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют *членами* (элементами) последовательности: x_1 – 1-м членом последовательности, x_2 – 2-м членом последовательности, ..., x_n – n -м (энным) или *общим членом* последовательности.

Числовую последовательность можно рассматривать как функцию f , определенную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Тогда общий член последовательности $x_n = f(n)$. Последнее выражение называется *формулой общего члена* последовательности.

Суммой, разностью, произведением или отношением двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательности, члены которых образованы соответственно по правилам $z_n = x_n + y_n$; $z_n = x_n - y_n$; $z_n = x_n y_n$; $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ при $y_n \neq 0$. *Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c* называется последовательность с общим членом $z_n = c y_n$.

Последовательность может быть задана, в числе прочего, с помощью *рекуррентных формул*, т.е. формул, позволяющих выразить n -й член последовательности через предыдущие члены.

Пример 5.1. Написать первые пять членов последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$;

2) x_n – n -й знак в десятичной записи числа π .

3) $x_1 = 0$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$;

Решение: 1) поочередно подставляя $n=1,2,3,4,5$ в формулу общего члена последовательности, найдем $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = -\frac{1}{7}$, $x_4 = \frac{1}{9}$, $x_5 = -\frac{1}{11}$;

2) в силу того, что число $\pi = 3,141592653\dots$, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, $x_5 = 9$;

3) имеем $x_1 = 0$. Пользуясь формулой $x_n = 2x_{n-1} + 1$, последовательно находим $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 15$.

Ограниченность последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M , что для любого номера n справедливо неравенство $x_n < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(-\infty; M)$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m , что для любого номера n справедливо неравенство $x_n > m$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(m; +\infty)$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого n выполнено неравенство $|x_n| < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(-M; M)$).

Очевидно, ограниченная последовательность является ограниченной как сверху, так и снизу и обратно, ограниченная одновременно сверху и снизу последовательность является ограниченной.

Пример 5.2. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены:

$$1) 3, 5, 7, 9, \dots; \quad 2) \frac{-1}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{-9}{4}, \frac{-16}{5}, \dots;$$

$$3) \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots; \quad 4) -3, 9, -27, 81, \dots?$$

Решение: 1) данная последовательность $x_n = 2n + 1$, состоящая из всех нечетных чисел, не превышающих числа три, ограничена снизу, но не ограничена сверху;

2) последовательность $x_n = \frac{-n^2}{n+1} < 0$ ограничена сверху, но не является ограниченной снизу;

3) последовательность ограничена, так как она является ограниченной и снизу и сверху: $0 < x_n = \frac{1}{2^n} < 1$;

4) последовательность $x_n = (-3)^n$ не является ограниченной, так как для любого, сколь угодно большого, числа $M > 0$ можно найти такой номер n (например, $n = \left[\frac{\ln M}{\ln 3} \right] + 2$), что $|x_n| = 3^n > M$.

Возрастание и убывание последовательности. Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$).

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Пример 5.3. Исследовать данные последовательности на монотонность:

$$1) x_n = 2n + 1; \quad 2) x_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad 3) x_n = \frac{3n+1}{2n-1}; \quad 4) x_n = n^2 - 9n - 100.$$

Решение: 1) данная последовательность является строго монотонной (возрастающей), поскольку $x_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = x_n$ для любого натурального числа n ;

2) последовательность не является ни монотонной, ни строго монотонной, так как, например, $x_1 = -1 < x_2 = \frac{1}{2}$, но $x_2 > x_3 = -\frac{1}{3}$;

3) покажем, что данная последовательность строго убывает, т.е. для любого номера n справедливо неравенство $x_n > x_{n+1}$. Для этого рассмотрим отношение n -го члена последовательности к $n+1$ -му:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{3n+1}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{6n^2+5n+1}{6n^2+5n-4}.$$

Числитель полученной дроби всегда больше знаменателя и поскольку при этом общий член x_n положителен для любого натурального n , то $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$ и $x_n > x_{n+1}$ для всех n ;

4) рассмотрим разность между n -м и $(n+1)$ -м членами последовательности:

$x_n - x_{n+1} = n^2 - 9n - 100 - ((n+1)^2 - 9(n+1)n - 100) = -2n + 8$. Выражение, стоящее в правой части равенства, положительно при $n=1, 2, 3$ (т.е. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$), равно нулю при $n=4$ (т.е. $x_4 = x_5$) и отрицательно для остальных значений n (при этом $x_n < x_{n+1}$), поэтому, строго говоря, данная последовательность монотонной не является, однако она строго монотонна (возрастает), начиная с пятого члена.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Написать первые пять членов последовательности (x_n) , если:

а) $x_n = 3^{n-1}$;

б) $x_n = (-1)^n + 1$;

в) $x_n = \frac{n+1}{n}$;

г) $x_n = \cos \frac{\pi n}{2}$;

д) $x_n = n^2 - 2n + 3$;

е) $x_n = \frac{1}{n!}$;

ж) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ – последовательность чисел Фибоначчи;

з) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$;

и) $x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$.

Для каждой из заданных последовательностей написать формулу общего члена:

5.2. а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$;

б) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \dots$;

в) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$;

г) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \dots$;

д) $-1, 1-1, 1-1, 1-1, \dots$

5.3. а) $2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots$;

б) $-2, 5, -10, 17, -26, \dots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots$;

г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \dots$;

д) $-2, \frac{4}{2}, -\frac{8}{6}, \frac{16}{24}, -\frac{32}{120}, \dots$

Какие из данных последовательностей ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены; монотонны; строго монотонны:

5.4. а) $x_n = n$;

б) $x_n = -\frac{n^2}{n+1}$;

в) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

г) $x_n = -n^3 + 2n$;

д) $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$?

5.5. а) $x_n = (-2)^n$;

б) $x_n = 2^{-n}$;

в) $x_n = n^{(-1)^n}$;

г) $x_n = \frac{n^2}{n!}$;

д) $x_n = \cos \frac{\pi n}{2}$?

5.2. Предел последовательности

Определение предела последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер N_ε такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_\varepsilon$, выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое означает, что точки x_n , начиная с некоторого номера $n > N_\varepsilon$, лежат внутри интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, который называется ε -окрестностью точки a .

Если последовательность, имеет предел, то она называется *сходящейся* (сходится к a), в противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Пример 5.4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число $a = 2$ является пределом последовательности $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Для $\varepsilon = 0,001$ найти соответствующий номер N_ε , такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех x_n , для которых $n > N_\varepsilon$.

Решение. Рассмотрим любое число $\varepsilon > 0$ и найдем для этого числа номер N_ε такой, что для всех членов последовательности x_n , для которых $n > N_\varepsilon$, будет справедлива цепочка

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив последнее неравенство относительно n , получим $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Следовательно, можем положить, например, $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$ (где $[\alpha]$ – целая часть числа α). Таким образом, показано, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$, такой, что $|x_n - 2| < \varepsilon$ для всех членов последовательности с номерами $n > N_\varepsilon$. Согласно определению предела последовательности, мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$.

При $\varepsilon = 0,001$ получаем $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{0,001} - 1 \right] + 1 = 1000$, т.е. $|x_n - 2| < 0,001$ при $n > 1000$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к плюс бесконечности*, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $x_n > M$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $x_n \rightarrow +\infty$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к минус бесконечности*, если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $x_n < M$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ или $x_n \rightarrow -\infty$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности*, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $|x_n| > M$ (последовательность $\{|x_n|\}$ стремится к плюс бесконечности).

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ или $x_n \rightarrow \infty$. Очевидно, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, то можно считать также, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, и *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Пример 5.5. Доказать, пользуясь определением, что:

- 1) последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой;
- 2) последовательность $\{x_n\} = \{2n+1\}$ является бесконечно большой.

Решение: 1) требуется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Рассмотрим любое число $\varepsilon > 0$. Тогда $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ и неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$ будет выполнено в точности тогда, когда $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т.е. когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положив $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, получим, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$. В соответствии с определением предела это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = +\infty$. Рассмотрим любое положительное число M . Неравенство $x_n = 2n+1 > M$ будет выполнено при $n > \frac{M-1}{2}$. Положив $N_\varepsilon = \left[\frac{M-1}{2}\right] + 1$, получим, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n > M$. Это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = +\infty$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- 1) сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
- 2) произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность;
- 3) последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, – бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая (символически это можно записать следующим образом: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$).

Операции над пределами последовательностей:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = a \pm b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = ca$ для любого $c \in \mathbb{R}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 5.6. Найти следующие пределы:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{3n^3 + 7}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n-1}}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} - 7}}{(3n - \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{8n^3 + 8}}$.

Решение: 1) последовательность $x_n = \sin n$ является ограниченной, так как $|\sin n| \leq 1$ для любого натурального n , поэтому ее произведение на

бесконечно малую последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ есть также бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;

2) числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие последовательности. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, на старшую степень n , т.е. на n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{3n^3 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{7}{n^3}}. \text{ Используя далее теоремы об операциях над}$$

пределами, получим

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}} = \frac{2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{3 + 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3};$$

3) разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из двух вариантов: $n^{\frac{3}{2}}$ и $n^{\frac{1}{2}}$), т.е. на $n^{\frac{3}{2}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n} - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Последовательность, находящаяся в знаменателе дроби, есть бесконечно малая, как сумма бесконечно малых последовательностей, поэтому исходная последовательность является бесконечно большой, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n} - 1} = \infty$;

4) помножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n-2)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}. \end{aligned}$$

Последовательность $\{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\}$ является бесконечно большой, поэтому последовательность $\left\{\frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}\right\}$ – бесконечно малая, а значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} = 0$;

5) разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из $n^{1+\frac{1}{6}} = n^{\frac{7}{6}}$, $n^{\frac{10}{5}} = n^2$, $n^{1+\frac{3}{3}} = n^2$ и $n^{\frac{1+3}{4}} = n^{\frac{5}{4}}$), т.е. на n^2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} - 7}}{(3n - \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{8n^3 + 8}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[6]{n}}{n} + \sqrt[5]{\frac{32n^{10} - 7}{n^{10}}}}{\frac{3n - \sqrt[4]{n}}{n} \cdot \sqrt[3]{\frac{8n^3 + 8}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}} + \sqrt[5]{32 - \frac{7}{n^{10}}}}{\left(3 - \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{8}{n^3}}} = \\ &= \frac{0 + \sqrt[5]{32 + 0}}{(3 - 0) \cdot \sqrt[3]{8 + 0}} = 1. \end{aligned}$$

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательностей.

Число e . Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая сходящаяся последовательность является ограниченной;
- 2) всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастает и ограничена сверху, а потому сходится. Ее пределом является число Эйлера $e = 2,71828182845\dots$, служащее основанием натуральных логарифмов. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример 5.7. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$.

Решение. Имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}}.$

Обозначив в последнем выражении $2n = k$, продолжим цепочку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k \cdot \frac{1}{2}} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.6. Доказать, пользуясь определением, что число a является пределом последовательности x_n , если:

а) $x_n = \frac{n+1}{n}, a = 1;$

б) $x_n = \frac{3n+1}{n-5}, a = 3;$

в) $x_n = \frac{2n-2}{5n+2}, a = \frac{2}{5};$

г) $x_n = \frac{3n^2-1}{n^2}, a = 3;$

д) $x_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n}, a = 3;$

е) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+6}, a = 5.$

5.7. Доказать, пользуясь определением, что последовательность x_n является бесконечно малой:

а) $x_n = \frac{1}{3^n};$

б) $x_n = \frac{1}{n-1};$

в) $x_n = \frac{1}{\ln n};$

г) $x_n = \frac{1}{n!}.$

5.8. Доказать, пользуясь определением, что последовательность x_n является бесконечно большой:

а) $x_n = \ln n;$

б) $x_n = 3^n;$

в) $x_n = \frac{n^2-1}{n};$

г) $x_n = (-1)^n n^2.$

Найти пределы последовательностей:

5.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{6n+1}.$

5.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2n+5}{2n^2-2n^3+7}.$

5.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-1000n^2+1}{1000n^2+17n}.$

5.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3-4n^2}{0,0001n^4+10n^3-3}.$

5.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^4}{1-5n^4}.$

5.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{n-3} - \frac{2}{3n-1} \right).$

$$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5}{4n + 1} - \frac{n^2 + 4}{2n + 3} \right).$$

$$5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + n} - 3n \right).$$

$$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 4n^2} - n \right).$$

$$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 7n + 4} - 2n \right).$$

$$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{3n + \sqrt{3n + \sqrt{3n}}}}.$$

$$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 + 3n} - 3n \right).$$

$$5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

$$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n+2)^2}{(n-2)^3 - (n+2)^3}.$$

$$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+5)^3}{(3-n)^3}.$$

$$5.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}.$$

$$5.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^{12}+1}}{(n+\sqrt{n})(7-n+n^2)}.$$

$$5.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3} - n}.$$

$$5.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}.$$

$$5.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$5.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

$$5.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}.$$

$$5.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 1}{7^n + 1}.$$

$$5.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{7^n} + 1}.$$

$$5.33. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$5.34. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$5.35. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$5.36. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

5.3. Предел функции. Раскрытие простейших неопределенностей

Определение предела функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε -окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 (в этом случае говорят, что функция определена в *проколотой* ε -окрестности точки x_0).

Первое определение предела функции (по Коши, или «на языке $\varepsilon - \delta$ ») выглядит так.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Первое определение предела функции равносильно второму определению (по Гейне, или «на языке последовательностей»), которое выглядит так.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для всякой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n \neq x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .

Пример 5.8. 1. Доказать, пользуясь определением по Коши, что число $A = 7$ является пределом функции $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow 3$.

2. Доказать, пользуясь определением по Гейне, что число $A = 3$ является пределом функции $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ при $x \rightarrow 2$.

Решение: 1) рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется найти для него такое число $\delta > 0$, что для всех x , таких, что $|x - 3| < \delta$, $x \neq 3$, было бы выполнено неравенство $|f(x) - 7| = |2x + 1 - 7| < \varepsilon$.

Последнее неравенство приводится к виду $|2x-6| < \varepsilon$ или $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, если принять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то выполнены все условия определения предела по Коши. Это и значит, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7$;

2) пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$

и $x_n \neq 2$ для любого n . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - x_n - 2}{x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 2)}{x_n - 2}$.

Далее, так как $x_n \neq 2$, $x_n - 2 \neq 0$, то мы имеем право сократить дробь на $x_n - 2$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 2)}{x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = 2 + 1 = 3$.

Согласно определению предела функции по Гейне, это и значит, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$.

Пример 5.9. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся определением предела функции в точке по Гейне.

Рассмотрим последовательность $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ и $x'_n \neq 0$ для

всякого $n \in \mathbb{N}$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Если же выбрать

последовательность $x''_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ ($x''_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$), которая также является

бесконечно малой, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$.

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к числу $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ сходятся к различным числам. Это вступает в противоречие со вторым определением предела функции, следовательно, функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Определение предела функции на бесконечности. Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$.

Равносильное определение предела функции на «на языке последовательностей» будет выглядеть так.

Число A называется *пределом функции $f(x)$, при $x \rightarrow +\infty$* , если для всякой последовательности x_n такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Аналогично определяется $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ (в точке x_0)*, если для всякого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $|f(x)| > M$ (или если для всякой последовательности x_n такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$).

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ (в точке x_0)*, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Пример 5.10. Доказать, что функция $f(x) = 2^{-x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Требуется доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$, т.е. что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, такое, что $|2^{-x} - 0| < \varepsilon$ для всех $x > M$.

Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$. Неравенство $|2^{-x} - 0| < \varepsilon$ равносильно неравенству $2^{-x} < \varepsilon$ и, далее, неравенствам $-x \ln 2 < \ln \varepsilon$, $x > \frac{\ln \varepsilon}{-\ln 2} = \ln 2\varepsilon$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдено число $M = \ln 2\varepsilon$ из определения предела. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция;
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция;
3. Функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $y = \frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$ ($\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$).

Операции над пределами функций.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$;

б) $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$ для любого $c \in \mathbb{R}$;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

г) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = B$.

3. Для всех основных элементарных функций в любой точке x_0 их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0).$$

Говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Аналогично определяются неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Пример 5.11. Найти следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{5x^2 - 4x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x + 4x^2}{5x^2 + 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 4\cos x)2^{-x}.$$

Решение: 1) справедлива цепочка равенств

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{5x^2 - 4x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 4x + 1)} = \frac{3 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 2}{5 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 1} = \frac{3 - 2}{5 - 4 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались теоремами об арифметических действиях над пределами и теоремой о пределе элементарной функции:

2) поскольку пределы числителя и знаменателя равны нулю, мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность, т.е. избавимся от нее, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на $x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{3+3}{2(3+1)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

3) опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(\sqrt{x-1} - 3) \cdot (\sqrt{x-1} + 3)}{(x-10) \cdot (\sqrt{x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-1-9}{(x-10) \cdot (\sqrt{x-1} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{(\sqrt{x-1} + 3)} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

4) числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие при $x \rightarrow +\infty$ функции, поэтому здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поступая как при вычислении предела последовательности, разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x + 4x^2}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 4}{5 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4}{5};$$

5) справедливо неравенство $-3 < 1 - 4\cos x < 5$, т.е. функция $y = 1 - 4\cos x$ является ограниченной на всей числовой оси, а потому при ее умножении на бесконечно малую при $x \rightarrow +\infty$ функцию $y = 2^{-x}$ получим также бесконечно малую при $x \rightarrow +\infty$ функцию. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 4\cos x)2^{-x} = 0$.

Пределы функций и неравенства.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, и $f(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой ε -окрестности точки x_0 , то $A \leq B$.

2. Если предел функции в данной точке положителен (отрицателен), то и все значения указанной функции положительны (отрицательны) в некоторой проколотой окрестности этой точки (обратное, вообще говоря, неверно: например, пределом последовательности с положительными членами $x_n = \frac{1}{n}$ является число ноль).

3. Пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой проколотой ε -окрестности точки x_0 и $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ для всех x из этой окрестности. Пусть также $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ также существует и равен A (теорема о промежуточной переменной).

4. Если функция имеет предел в данной точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Задачи для самостоятельного решения

5.37. Пользуясь первым определением предела (по Коши), доказать, что:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 2) = -1$;

б) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x) = 1$;

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

5.38. Пользуясь вторым определением предела (по Гейне), доказать, что:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x) = 6$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 6) = 4$;

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow a} (x+2a)^5 = 243a^5.$$

5.39. Доказать, что функция $y = f(x)$ не имеет предела в точке $x = x_0$:

$$\text{а) } f(x) = \cos x, x_0 = +\infty; \text{ б) } f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{2}; \text{ в) } f(x) = \operatorname{sign} x, x_0 = 0;$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное} \end{cases} \quad (\text{функция Дирихле}), x_0 = \frac{1}{2}.$$

5.40. Доказать, что функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{x+1}};$$

$$\text{г) } f(x) = (\cos x + \sin x)e^{-x}.$$

Найти пределы:

$$\text{5.41. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}.$$

$$\text{5.42. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}.$$

$$\text{5.43. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x^3}.$$

$$\text{5.44. } \lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^2 - x^2}{a^3 + x^3}.$$

$$\text{5.45. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2 - t - 2}{2t^2 + 5t - 7}.$$

$$\text{5.46. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{5.47. } \lim_{y \rightarrow -2} \frac{2y^2 + 5y + 2}{2y^3 + 7y^2 + 6y}.$$

$$\text{5.48. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\phi}{\sin \phi - \cos \phi}.$$

$$\text{5.49. } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - 3^{2\alpha}}{3^\alpha - 1}.$$

$$\text{5.50. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}.$$

$$\text{5.51. } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$\text{5.52. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$\text{5.53. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}.$$

$$\text{5.54. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}.$$

$$5.55. \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p+1}{1 - \sqrt{1+p+p^2}}.$$

$$5.56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3}.$$

$$5.57. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$5.58. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

$$5.59. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}.$$

$$5.60. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}.$$

$$5.61. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}.$$

$$5.62. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}.$$

$$5.63. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{2x^2-x-1}.$$

$$5.64. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

$$5.65. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-2x-1001}{3x^4-x^2-1}.$$

$$5.66. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x^3-x+1}{4x^3+3x^2+7x-4}.$$

$$5.67. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}.$$

$$5.68. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}.$$

$$5.69. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right).$$

$$5.70. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b} - \sqrt{x^2+cx+d} \right).$$

$$5.71. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right).$$

$$5.72. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}.$$

$$5.73. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}.$$

$$5.74. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$5.75. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}.$$

$$5.76. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}.$$

$$5.77. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-3} - x \right).$$

$$5.78. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{5x^2+1} - \frac{x^2}{5x-3} \right).$$

5.4. Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$

Пример 5.12. Вычислить следующие пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}, \alpha \in R;$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$
 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x - \pi};$ 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7}\right)^{5x-1}.$

Решение: 1) имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на число α , чтобы воспользоваться первым замечательным пределом: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}$. Произведя в последнем выражении замену $y = \alpha x$, получим $\alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$;

2) опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x , после чего воспользуемся результатом пункта 1)

$$\text{данного примера: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}} = \frac{2}{3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1;$$

4) сделаем замену $\arcsin x = y$. Тогда $x = \sin y$ и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$;

5) замечая, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и $2x - \pi = -2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

сделаем замену $\frac{\pi}{2} - x = t$, чтобы свести предел к первому замечательному:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-2t} = -\frac{1}{2};$$

6) здесь имеет место неопределенность вида 1^∞ . Сведем данный предел ко второму замечательному пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7}\right)^{5x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{3x+2}{3x+7} - 1\right)\right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+2-3x-7}{3x+7}\right)^{5x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7}\right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7}\right)^{\frac{3x+7}{-5} \cdot \frac{-5}{3x+7} \cdot (5x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-5}{3x+7}\right)^{\frac{3x+7}{-5}}\right)^{\frac{-5}{3x+7} \cdot (5x-1)}. \end{aligned}$$

Выражение $\frac{-5}{3x+7}$ имеет своим пределом ноль при $x \rightarrow \infty$, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7}\right)^{\frac{3x+7}{-5}} &= e. \text{ Учитывая далее, что } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{3x+7} (5x-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-25x+5}{3x+7} = \\ &= -\frac{25}{3}, \text{ окончательно получаем } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7}\right)^{5x-1} = e^{-\frac{25}{3}}. \end{aligned}$$

Полезно помнить часто используемые следствия из обоих замечательных пределов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln a} = \log_a e, \text{ где } a > 0, a \neq 1, \text{ в частности } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, \text{ где } a > 0, \text{ в частности } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \\ \text{а также } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} &= m. \end{aligned}$$

Пример 5.13. Вычислить следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

Решение: **1)** для данной неопределенности вида $\frac{0}{0}$ преобразуем выражение, стоящее под знаком предела так, чтобы воспользоваться одним из следствий из второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{2-x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2} \right) \right)}{2 \cdot \frac{x}{2}},$$

после чего, обозначая $-\frac{x}{2} = t$, получим равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2} \right) \right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x} = \frac{1}{2};$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} = \left| \begin{matrix} \alpha x = y \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \alpha. \quad \text{Здесь мы}$$

также воспользовались одним из следствий из второго замечательного предела;

3) для данной неопределенности вида $\frac{0}{0}$ справедливы равенства

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\beta x} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\beta x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{x}.$ Воспользовавшись далее

результатом пункта 2) данного примера, окончательно получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

$$5.79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 9x};$$

$$5.80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\arcsin^2 3x};$$

$$5.81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2};$$

$$5.82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x \operatorname{tg} 3x};$$

$$5.83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$5.84. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos x}{\sin^2 x};$$

$$5.85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$5.86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2};$$

$$5.87. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$5.88. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+3x)}{x};$$

$$5.89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 6^x}{1 - e^x};$$

$$5.90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x};$$

$$5.91. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)};$$

$$5.92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(x+1)};$$

$$5.93. \lim_{t \rightarrow \infty} t(\sqrt[t]{a} - 1), \quad a > 0;$$

$$5.94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x^2 + x};$$

$$5.95. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x;$$

$$5.96. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{2x};$$

$$5.97. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-3} \right)^{5x^2};$$

$$5.98. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3+2}{5x^3} \right)^{2x^3-1};$$

$$5.99. \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}};$$

$$5.100. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c};$$

$$5.101. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}};$$

$$5.102. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2x]{1+3x};$$

$$5.103. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$5.104. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5-x}{6-x} \right)^{x+2};$$

$$5.105. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 6x + 7}{3x^2 + 20x - 1} \right)^{-x+1};$$

$$5.106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln \sqrt{\frac{2+x}{2-x}};$$

$$5.107. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1)[\ln(x-3) - \ln x];$$

$$5.108. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(a+x) - \ln x);$$

$$5.109. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1};$$

$$5.110. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$$

$$5.111. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a x - 1}{x - a};$$

$$5.112. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$5.113. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x};$$

$$5.114. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x};$$

$$5.115. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}, \alpha \neq \beta;$$

$$5.116. \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x - \alpha}{2};$$

$$5.117. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x};$$

$$5.118. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

5.5. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$. Для сравнения при $x \rightarrow x_0$ двух данных

бесконечно малых функций находят предел их отношения $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой*

более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$ (читается: $\alpha(x)$ есть «о малое» от $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C – число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x \rightarrow x_0$, в частности, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \rightarrow x_0$, что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Таким образом, $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} = x \log_a e, \quad \text{где } a > 0, \quad a \neq 1, \quad \text{в частности } \ln(1+x) \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \text{где } a > 0, \quad \text{в частности } e^x - 1 \sim x;$$

$$(1+x)^m - 1 \sim mx.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x)\beta_1(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую, или одну из них, заменить эквивалентной бесконечно малой.

Пример 5.14. Сравнить бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, если:

1) $\alpha(x) = x^3 - 6x^4 + 9x^2$, $\beta(x) = 5x^4 - x^2$, $x_0 = 0$,

2) $\alpha(x) = x \sin^3 x$, $\beta(x) = 5x^2 \sin x$, $x_0 = 0$;

3) $\alpha(x) = (x-1) \ln x$, $\beta(x) = (x-1)^2$, $x_0 = 1$.

Решение: 1) найдем предел отношения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x^4 + 9x^2}{5x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 6x^2 + 9}{5x^2 - 1} = 9.$$
 Предел отношения двух данных бесконечно малых функций является числом, отличным от нуля, следовательно, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$;

2) поступая так, как в пункте 1), находим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x}{5x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \sin x = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

следовательно $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow 0$;

3) имеет место цепочка равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x-1))}{x-1} = 1,$$

откуда следует вывод о том, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow 1$.

Пример 5.15. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5^x - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x \arcsin x) \sin 5x}{(e^x - 1) \operatorname{tg} x^2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x^4 - 1}.$

Решение: 1) поскольку $\sin 2x \sim 2x$, $5^x - 1 \sim x \ln 5$ при $x \rightarrow 0$,

справедливы равенства
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \ln 5} = \frac{2}{\ln 5};$$

2) замечая, что $6x \arcsin x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, получим цепочку эквивалентностей: $\ln(1 + 6x \arcsin x) \sim 6x \arcsin x \sim 6x^2$, а также $\sin 5x \sim 5x$, $(e^x - 1) \sim x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x \arcsin x) \sin 5x}{(e^x - 1) \operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 \cdot 5x}{x \cdot x^2} = 30;$$

3) при $x \rightarrow 1$ имеем $x^2 - 1 \rightarrow 0$, поэтому $\ln x^2 = \ln(1 + (x^2 - 1)) \sim x^2 - 1$,
отсюда получаем равенства

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x^2 - 1))}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Сравнить бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, если

5.119. $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$, $\beta(x) = x \sin^3 x$, $x_0 = 0$.

5.120. $\alpha(x) = x^3 - 4x$, $\beta(x) = x + x^4$, $x_0 = 0$.

5.121. $\alpha(x) = (x - 5)^2$, $\beta(x) = (x - 5)^3$, $x_0 = 5$.

5.122. $\alpha(x) = \sin(x - 1)^2$, $\beta(x) = \arcsin(x - 1)$, $x_0 = 1$.

5.123. $\alpha(x) = 1 - \cos x$, $\beta(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$.

5.124. $\alpha(x) = 4^x - 1$, $\beta(x) = 5^x - 1$, $x_0 = 0$.

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

5.125. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{2x}$.

5.126. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 3x}{5 \sin^2 x}$.

5.127. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\arcsin 3x}$.

5.128. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sin 2x}$.

5.129. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$.

5.130. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$.

$$5.131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}.$$

$$5.132. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos 2x}.$$

$$5.133. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$5.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}.$$

$$5.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$5.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

$$5.137. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}.$$

$$5.138. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}.$$

$$5.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7^x - 1)(2^x - 1)}{(4^x - 1)(3^x - 1)}.$$

$$5.140. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2 - 2x}.$$

$$5.141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x \ln(1-x^3)}{\operatorname{tg} 9x(1 - \cos 2x)(e^{x^2} - 1)}.$$

$$5.142. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x} \ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt[3]{x}} - 1)}.$$

$$5.143. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}.$$

$$5.144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}.$$

$$5.145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}.$$

$$5.146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x}.$$

$$5.147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x + 1)}.$$

$$5.148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}.$$

$$5.149. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$5.150. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$5.151. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$5.152. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

5.6. Односторонние пределы

Определение левого и правого пределов функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки x_0 , т.е. на некотором интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$.

Первое определение односторонних пределов функции (по Коши, или «на языке $\varepsilon - \delta$ ») выглядит так.

Число A называется *пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0* (или *правосторонним пределом*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < x - x_0 < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Число A называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* (или *левосторонним пределом*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x , таких, что $0 < x_0 - x < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Первое определение односторонних пределов функции равносильно второму определению (по Гейне, или «на языке последовательностей»):

Число A называется *пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0* (или *правосторонним пределом*), если для всякой последовательности x_n значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n > x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Число A называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* (или *левосторонним пределом*), если для всякой последовательности x_n значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n < x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и при этом имеют место равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Пример 5.16. Найти односторонние пределы функций:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1 \\ -x & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad \text{при } x \rightarrow 1;$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \quad \text{при } x \rightarrow 2;$$

$$3) f(x) = \frac{(x+3)\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} \quad \text{при } x \rightarrow 0;$$

$$4) f(x) = 5 + \frac{1}{\frac{1}{1+4^{x-1}}} \quad \text{при } x \rightarrow 1.$$

Решение: 1) рассматриваемая функция определена на всей числовой оси. Пусть $x \leq 1$. Тогда $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$ – предел функции $f(x)$ в точке $x = 1$ слева.

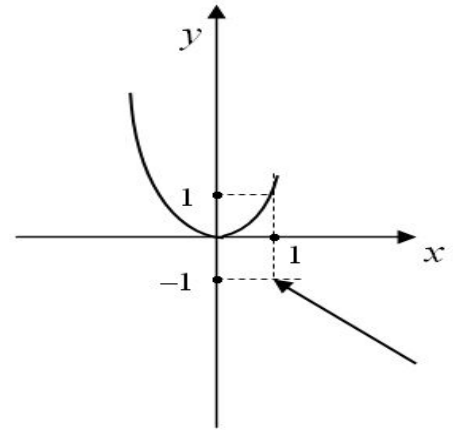


Рис. 5.1

Если же $x > 1$, то $f(x) = -x$ и $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-x) = -1$ – предел справа (рис 5.1);

2) данная функция определена на всем множестве действительных чисел, кроме точки $x = 2$. Преобразуем выражение для $f(x)$, заметив, что в числителе дроби находится полный квадрат:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2 \quad \text{при } x \neq 2. \quad \text{Следовательно,}$$

$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 2) = 0$, $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x - 2) = 0$, т.е. односторонние пределы функции в исследуемой точке равны между собой;

$$3) \text{ имеем } f(x) = \frac{(x+3)\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} = \frac{(x+3)\sqrt{\sin^2 x}}{x} = \frac{(x+3)|\sin x|}{x}.$$

$$\text{Учитывая, что } |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}, \quad \text{получаем равенства}$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} -(x+3) \frac{\sin x}{x} = -(0+3) \cdot 1 = -3 \text{ — предел слева в точке ноль;}$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+3) \frac{\sin x}{x} = (0+3) \cdot 1 = 3 \text{ — предел справа в точке ноль;}$$

4) найдем левосторонний предел данной функции в точке $x = 1$. Если $x \rightarrow 1-0$, т.е. x стремится к единице, оставаясь меньше единицы, то выражение $x-1$ стремится к нулю, оставаясь при этом меньше нуля, поэтому дробь $\frac{1}{x-1}$ стремится к $-\infty$, а значит, справедливы равенства $\lim_{x \rightarrow 1-0} 4^{\frac{1}{x-1}} = 0$,

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 5 + \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 5 + \frac{1}{1+0} = 6.$$

Если же $x \rightarrow 1+0$, то дробь $\frac{1}{x-1}$ стремится к $+\infty$, а значит,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 4^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 5 + \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 5 + 0 = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти левый и правый пределы функции при $x \rightarrow x_0$:

5.153. $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$, $x_0 = a$.

5.154. $f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$, $x_0 = 3$.

5.155. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x}{10} & \text{при } x > 1. \end{cases}$

а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 10$.

5.156. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

5.157. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$, $x_0 = 0$.

$$5.158. f(x) = \frac{4 + 3 \cdot 7^{\frac{1}{1-x}}}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}, x_0 = 1.$$

$$5.159. f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}, x_0 = 2.$$

$$5.160. f(x) = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}, x_0 = 0.$$

$$5.161. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.162. f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$5.163. f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.164. f(x) = [x] - \text{целая часть } x, x_0 = 2.$$

$$5.165. f(x) = \frac{1}{\{x\}}, \{x\} = x - [x] - \text{дробная часть } x, x_0 = 1.$$

$$5.166. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.167. f(x) = 3^{\operatorname{tg} 2x}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.168. f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Найти пределы

$$5.169. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}. \quad 5.170. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}. \quad 5.171. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}$$

$$5.172. \lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}. \quad 5.172. \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right).$$

5.7. Непрерывность и точки разрыва функции

Непрерывность функции в точке. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 ;

2) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее условие равносильно условию $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx , т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; a)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке. При этом $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции на множестве. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве X* , если она является непрерывной в каждой точке x этого множества. При этом если функция определена в конце некоторого промежутка числовой оси, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева.

В частности, функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке $[a; b]$* , если она

- 1) непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
- 2) непрерывна справа в точке a ;
- 3) непрерывна слева в точке b .

Точки разрыва функции. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, или являющаяся граничной точкой этой области, называется *точкой разрыва данной функции*, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва делятся на точки разрыва первого и второго рода:

1) если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, причем не все три числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называется **точкой разрыва I рода**.

В частности, если левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке: $f(x_0-0) = f(x_0+0) = A \neq f(x_0)$, то x_0 называется **точкой устранимого разрыва**. В этом случае, положив $f(x_0) = A$, можно видоизменить функцию в точке x_0 так, чтобы она стала непрерывной (доопределить функцию по непрерывности).

Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком функции в точке x_0* . Скачок функции в точке устранимого разрыва равен нулю;

2) точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются **точками разрыва II рода**. В точках разрыва II рода не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (где $g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

2. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0 .

3. Все основные элементарные функции (c , x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из свойств 1–3 следует, что все элементарные функции (функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции) также непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого числа C , заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, ($f(a) < C < f(b)$) найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$, такая, что $f(x_0) = C$ (теорема о промежуточных значениях).

2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$, такая, что $f(x_0) = 0$ (теорема Больцано – Коши).

3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке (1-я теорема Вейерштрасса).

4. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция достигает на отрезке $[a; b]$ своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a; b]$, что для любой точки $x \in [a; b]$ справедливы неравенства $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ (2-я теорема Вейерштрасса).

Пример 5.17. Пользуясь определением непрерывности, доказать, что функция $y = 3x^2 + 2x - 5$ непрерывна в произвольной точке x_0 числовой оси.

Решение. I способ. Пусть x_0 – произвольная точка числовой оси. Вычислим сначала предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (3x^2 + 2x - 5) = 3(\lim_{x \rightarrow x_0} x)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow x_0} x - 5 = 3x_0^2 + 2x_0 - 5.$$

Затем вычисляем значение функции в точке x_0 : $f(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 5$.

Сравнивая полученные результаты, видим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Согласно определению это и означает непрерывность рассматриваемой функции в точке x_0 .

II способ. Пусть Δx – приращение аргумента в точке x_0 . Найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x) - 5 - (3x_0^2 + 2x_0 - 5) = \\ &= 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = (6x_0 + 2)\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Вычислим теперь предел приращения функции, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0 + 2)\Delta x + (\Delta x)^2 = (6x_0 + 2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + (\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x)^2 = 0.$$

Таким образом, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, что и означает по определению непрерывность функции для любого $x_0 \in R$.

Пример 5.18. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. В случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 3; \\ 5x & \text{при } x \geq 3 \end{cases}; & 2) f(x) &= \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}; \\ 3) f(x) &= \frac{5}{x^4(x - 2)}; & 4) f(x) &= \operatorname{arctg} \frac{1}{(x - 5)}. \end{aligned}$$

Решение: 1) областью определения данной функции является вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. На интервалах $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ функция непрерывна. Разрыв возможен лишь в точке $x = 3$, в которой изменяется аналитическое задание функции.

Найдем односторонние пределы функции в указанной точке:?

$$f(3 - 0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (1 - x^2) = 1 - 9 = -8; \quad f(3 + 0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 5x = 15.$$

Мы видим, что левый и правый пределы конечны, поэтому $x = 3$ – точка разрыва I рода функции $f(x)$. Скачок функции в точке разрыва $f(3 + 0) - f(3 - 0) = 15 - (-8) = 23$.

Заметим, что $f(3) = 5 \cdot 3 = 15 = f(3 + 0)$, поэтому в точке $x = 3$ функция $f(x)$ непрерывна справа;

2) функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = -1$, в которой она не определена. Преобразуем выражение для $f(x)$, разложив числитель дроби

на множители:
$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1} = x + 3 \text{ при } x \neq -1.$$

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) = 2.$$

Мы выяснили, что левый и правый пределы функции в исследуемой точке существуют, конечны и равны между собой, поэтому $x = -1$ – точка

устранимого разрыва функции $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$. График функции представляет собой прямую $y = x + 3$ с «выколотой» точкой $M(-1; 2)$. Чтобы функция стала непрерывной, следует положить $f(-1) = f(-1 - 0) = f(-1 + 0) = 2$.

Таким образом, доопределив $f(x)$ по непрерывности в точке $x = -1$, мы получили функцию $f^*(x) = x + 3$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$;

3) данная функция определена и непрерывна для всех x , кроме точек $x = 0$, $x = 2$, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

Рассмотрим точку $x = 0$.

Поскольку в достаточно малой окрестности нуля функция принимает только отрицательные значения, то $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{5}{x^4(x-2)} = -\infty = f(+0)$, т.е. точка $x = 0$ является точкой разрыва II рода функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь точку $x = 2$.

Функция принимает отрицательные значения вблизи слева от рассматриваемой точки и положительные – справа, поэтому

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{5}{x^4(x-2)} = -\infty, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{5}{x^4(x-2)} = +\infty.$$

Как и в предыдущем случае, в точке $x = 2$ функция не имеет ни левого, ни правого конечного пределов, т.е. терпит в этой точке разрыв II рода;

4) данная функция терпит разрыв в точке $x = 5$. При этом

$$f(5-0) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-5)} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(5+0) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-5)} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. $x = 5$ – точка разрыва I рода. Скачок функции в данной точке равен

$$f(5+0) - f(5-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (\text{рис. 5.2}).$$

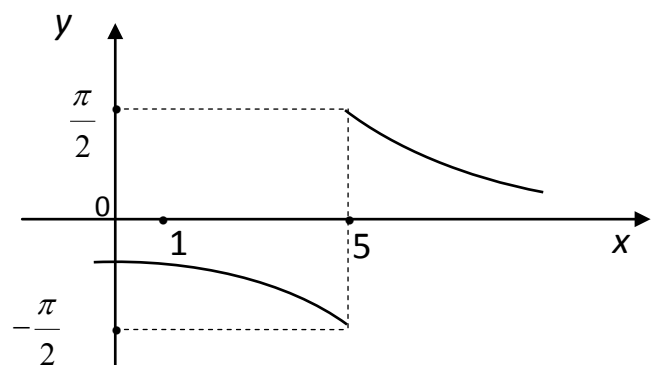


Рис.5.2

Задачи для самостоятельного решения

5.174. Пользуясь лишь определением, доказать непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

а) $f(x) = c = \text{const}$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^3$;

г) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$; д) $f(x) = \sin x$.

5.175. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ является непрерывной на всей числовой оси. Построить график этой функции.

5.176. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

5.177. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & \text{при } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x + 2 & \text{при } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = \frac{1}{2}$, но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

5.178. Построить графики функций: а) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$; б) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$.

Какие из условий непрерывности в точках разрыва этих функций выполнены и какие не выполнены?

5.179. Указать точку разрыва функции $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 2, & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Какие из условий непрерывности в этой точке выполнены и какие не выполнены?

5.180. Указать точку разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ и определить ее род. Найти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ и построить эскиз графика функции. Какие условия непрерывности в точке разрыва не выполнены?

Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. Построить график данной функции:

$$5.181. f(x) = -\frac{6}{x}.$$

$$5.182. f(x) = \operatorname{tg} x.$$

$$5.183. f(x) = \frac{4}{4-x^2}.$$

$$5.184. f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

$$5.185. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{a}{x-a}, a > 0.$$

$$5.186. f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}.$$

Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. В случае разрыва первого рода найти скачок функции в точках разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить функцию « по непрерывности»:

$$5.187. f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}.$$

$$5.188. f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} + 1}.$$

$$5.189. f(x) = \frac{\frac{1}{3^{x-2}} - 1}{\frac{1}{3^{x-2}} + 1}.$$

$$5.190. f(x) = \frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

$$5.191. f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

$$5.192. f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}.$$

$$5.193. f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16} & \text{при } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.194. f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, n \in \mathbb{N}.$$

$$5.195. f(x) = \frac{1}{1-e^{1-x}}.$$

$$5.196. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}.$$

$$5.197. f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

$$5.198. f(x) = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}.$$

Глава 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Если x_0 – точка числовой оси, то любой интервал (a, b) , ее содержащий, называется *окрестностью* точки x_0 . Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная в некоторой окрестности (a, b) фиксированной точки x_0 и $x \in (a, b)$ – произвольная точка.

Приращением аргумента называют разность $x - x_0$ и обозначают ее Δx .

Приращением функции $f(x)$ в точке x_0 , соответствующим приращению аргумента Δx , называется разность (рис. 6.1) $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или иначе $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Так как x_0 – фиксированная точка, а x – переменная, то разность Δy является функцией аргумента Δx .

Разностное отношение – это отношение приращения Δy функции к соответствующему приращению Δx аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Разностное отношение также является функцией аргумента Δx , определенной при всех $\Delta x \neq 0$.

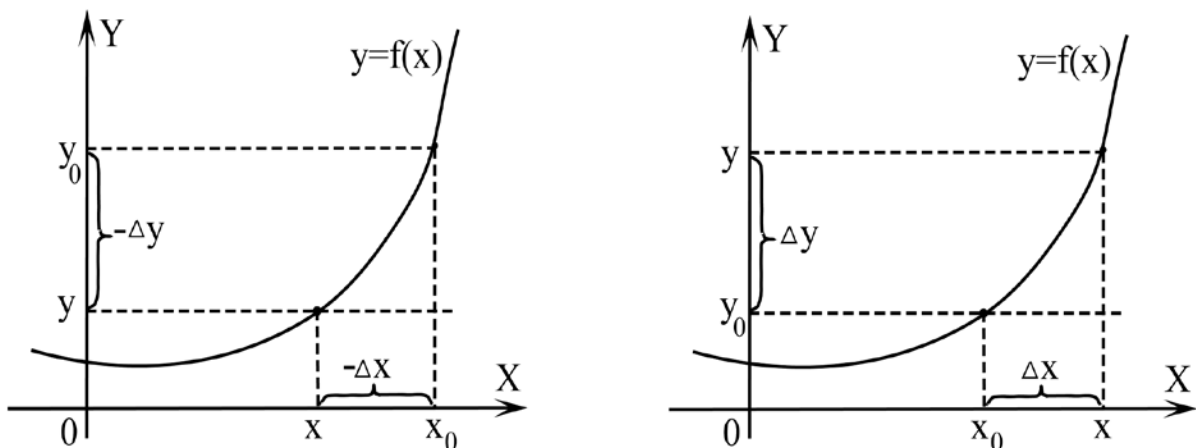


Рис. 6.1

Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Предел разностного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ (если он существует) называют *производной функции f в точке x_0* и обозначают $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или так как $x = x_0 + \Delta x$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ будет $x \rightarrow x_0$ и

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *функция f имеет в точке x_0 конечную производную*, а также называют функцию f *дифференцируемой в точке x_0* .

Если предел разностного отношения существует и равен $+\infty$ или $-\infty$, то говорят, что функция имеет *бесконечную производную в точке x_0* .

Если предел не существует, то говорят, что *функция f не имеет производной в точке x_0* , т.е. *не дифференцируема в этой точке*.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*. Если функция имеет конечную производную в каждой точке x интервала (a, b) , то ее называют *дифференцируемой на интервале (a, b)* . Эта производная будет представлять собой некоторую функцию аргумента x , определенную на интервале (a, b) .

Производную функцию обычно обозначают так:

$$f'(x), f'_x(x), y'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx} \frac{dy(x)}{dx}, \frac{dy}{dx},$$

а значение производной функции в точке x_0 :

$$f'(x_0), f'_x(x_0), f'(x)|_{x=x_0}, \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}, y'(x_0), \frac{dy(x)}{dx}|_{x=x_0}, \frac{dy(x_0)}{dx}.$$

Чтобы найти производную функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 непосредственно по определению, следует выполнить следующие действия

I. Придаем аргументу x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0$ и находим выражение для соответствующего приращения Δy функции $y = f(x)$ в этой точке x_0 : $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

II. Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx , т.е. составляем разностное отношение $\Delta y / \Delta x$

III. Ищем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$. Этот предел и дает искомое значение $f'(x_0)$ производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Пример 6.1. Найдите по определению производные следующих элементарных функций:

1) $y = C$ (C – постоянная); 2) $y = x$; 3) $y = \sin x$.

Решение. 1) поскольку $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Поэтому $C' = 0$ – производная постоянной равна нулю;

2) так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Поэтому $y'(x) = x' = 1$;

3) поскольку $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x. \end{aligned}$$

Значит, $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 6.2. Пользуясь определением производной, вычислите $f'(-2)$, если $f(x) = \sqrt{x+3}$.

Решение. Имеем: $x_0 = -2$, $f(x_0) = \sqrt{-2+3} = 1$, $x_0 + \Delta x = -2 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{-2 + \Delta x + 3} = \sqrt{1 + \Delta x}$, $\Delta f(x_0) = \sqrt{1 + \Delta x} - 1$. Согласно определению производной находим

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{(1+\Delta x)^2}-1^2)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1+\Delta x-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6.3. Пользуясь определением производной, вычислите $f'(0)$ для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Имеем: $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 0$, $x_0 + \Delta x = \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}$. Согласно определению производной находим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\Delta x}{(\Delta x)^3}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Таким образом, имеем бесконечную производную в точке $x_0 = 0$.

Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

5) $(e^x)' = e^x$;

6) $(a^x)' = a^x \ln a$;

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$;

11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Односторонние производные. Правой производной функции $y = f(x)$ в точке $x=x_0$ называется правый предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует:

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Левой производной функции $y = f(x)$ в точке $x=x_0$ называется левый предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует:

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производные слева и справа называются *односторонними производными*. Односторонние производные могут быть конечными, бесконечными или вовсе не существовать.

Из свойств пределов функций следует, что *производная функции $f(x)$ в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют обе односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$, и они совпадают между собой*. При этом $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Если у функции $f(x)$ существуют правая и левая производные в точке x_0 , но эти производные не равны друг другу, то у этой функции не существует производной в точке x_0

$$(f'(x_0 - 0) = A, f'(x_0 + 0) = B, A \neq B) \Rightarrow (f'(x_0) \text{ не существует}).$$

Например, функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x=0$ левую производную $f'_-(0) = -1$, правую производную $f'_+(0) = 1$, непрерывна в этой точке, но не имеет в ней производной, так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Под производной функции в граничной точке промежутка понимают соответствующую одностороннюю производную. Так, если функция $f(x)$ рассматривается на отрезке $[a, b]$, то под производной в точке a понимается правая производная, а под производной в точке b – левая производная.

Вычисление односторонней производной непосредственно по определению отличается от вычисления обычной производной лишь тем, что $\Delta x < 0$ – при нахождении левой и $\Delta x > 0$ – при нахождении правой производной.

Непрерывность и дифференцируемость. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x , то она и непрерывна в этой точке (т.е. бесконечно малым приращениям аргумента соответствуют бесконечно малые приращения функции). *Непрерывность функции есть необходимое (но не достаточное) условие существования производной.*

Функция, непрерывная в некоторой точке x , может не иметь в этой точке производной. Такую точку называют *угловой точкой* графика функции или *точкой его излома* (рис. 6.2).

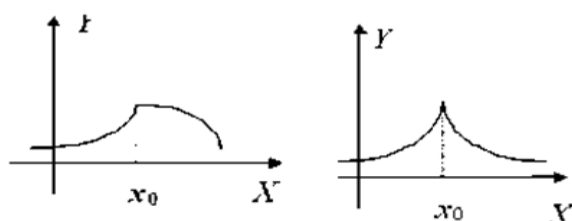


Рис. 6.2

Физический смысл производной. Разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собой *среднюю скорость* изменения функции на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Существование производной в точке x_0 означает, что при стремлении Δx к нулю разностное отношение (средняя скорость изменения) стабилизируется возле своего предельного значения, называемого *мгновенной скоростью в точке x_0* .

Производная в точке x_0 – это предельная (мгновенная) скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 (иными словами, скорость изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x в точке x_0). В частности, если x – время, а $y = f(x)$ – координата точки, движущейся по прямой, в момент x , то $f'(x_0)$ – это мгновенная скорость точки в момент времени x_0 .

Пример 6.4. Дано уравнение прямолинейного движения точки $s = 2t^2 + 3$. Определите среднюю скорость движения: а) за первые 5 секунд; б) за промежуток времени от конца 2-й до конца 5-й секунды; в) мгновенную скорость в момент $t = 5$.

Решение. Придадим аргументу t приращение Δt и найдем приращение координаты s

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 2(t_0^2 + 2t_0 \cdot \Delta t + \Delta t^2) + 3 - (2t_0^2 + 3) = 4t_0 \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2.$$

$$\text{Составим разностное отношение } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4t_0 \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2}{\Delta t} = 4t_0 + 2 \cdot \Delta t :$$

а) здесь $t_0 = 0$, $\Delta t = 5$. Тогда $v_{cp} = (4t_0 + 2 \cdot \Delta t) \Big|_{\substack{t_0=0 \\ \Delta t=5}} = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$;

б) здесь $t_0 = 2$, $\Delta t = 3$. Тогда $v_{cp} = (4t_0 + 2 \cdot \Delta t) \Big|_{\substack{t_0=2 \\ \Delta t=3}} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$;

в) $v(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((4t_0 + 2 \cdot \Delta t) \Big|_{t_0=5} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4 \cdot 5 + 2 \cdot \Delta t) = 20$.

Геометрический смысл производной. Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Прямую, проходящую через две точки графика $M(x_0, f(x_0))$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, называют *секущей*.

Угол β наклона секущей MP (рис. 6.3) к оси Ox функционально зависит от приращения Δx . Величина этого угла в радианах заключена в пределах от 0 до π , а тангенс равен разностному отношению:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad \beta \in (0, \pi).$$

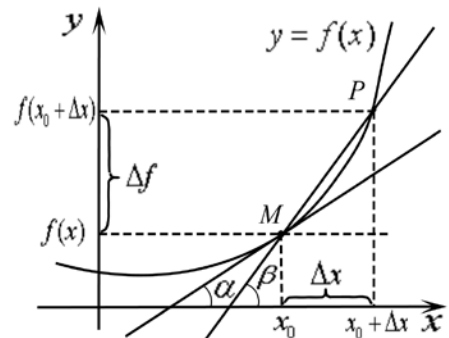


Рис. 6.3

При стремлении Δx к нулю точка P приближается к точке M . Секущая MP при этом поворачивается вокруг точки M и стремится к своему предельному положению, которое однозначно определяется предельным значением α угла наклона β . При этом тангенс угла α равен по величине пределу разностного отношения, т.е. производной функции в точке x_0 :

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{P \rightarrow M} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Касательная к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$ – это прямая, определяемая как предельное положение секущей MP при стремлении Δx к нулю.

Если у функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0 есть производная, то в точке $(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, причем угловой коэффициент k этой касательной (т.е. тангенс угла наклона ее к оси Ox) равен производной $f'(x_0)$.

Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ задается уравнением

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ – это перпендикуляр к касательной, проходящий через эту точку.

Нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ задается уравнением

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = +\infty$ (или $-\infty$), то в этом случае угол α равен $\pi/2$, а касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 перпендикулярна к оси Ox и задается уравнением $x = x_0$. Если $f'(x_0) = 0$, то в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции касается горизонтальная прямая $y = f(x_0)$.

Пусть две кривые пересекаются в точке (x_0, y_0) , т.е. $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Угол φ между кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке их пересечения может быть определен как угол между касательными или, что то же самое, угол между нормальными, проведенными к кривым в этой точке:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$

Пример 6.5. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке $M_0(2; 8)$.

Решение. Имеем $f(x) = x^3$, $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; $f(x_0) = f(2) = 8$; $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Используя уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, получаем уравнение касательной $y = 12(x - 2) + 8$, или $y = 12x - 16$. Используя уравнение $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, получаем уравнение нормали:

$$y = 8 - \frac{1}{12}(x - 2) \text{ или } 12y = 96 - x + 2, \text{ т.е. } x + 12y - 98 = 0.$$

Пример 6.6.. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x_1 = \frac{t^3}{3} - 4$ и $x_2 = \frac{7}{3}t^2 - 12t + 3$ (x – в метрах, t — в секундах). Найдите моменты времени, в которые их скорости окажутся равными.

Решение. Находим скорости обеих точек: $x'_1 = t^2$, $x'_2 = 7t - 12$. Так как $x'_1 = x'_2$, то $t^2 = 7t - 12$, $t^2 - 7t + 12 = 0$, $t_1 = 3$ с, $t_2 = 4$ с.

Задачи для самостоятельного решения

- 6.1.** Составить выражение для $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и найти область определения функции Δy , если: а) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 1/2$;
б) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 2\pi$.
- 6.2.** Дана функция $y = x^2$. Найти приближенные значения производной в точке $x = 3$, полагая последовательно Δx равным:
а) 0,5; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,001.
- 6.3.** Пользуясь определением производной, найти производную функции:
а) $y = 10^x$ в точке $x_0 = 0$; б) $y = \ln x$ в точке $x_0 = 2$;
в) $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.
- 6.4.** Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:
а) $f(x) = x^3 + 5x^2$; б) $f(x) = 3x^2 + 5x - 3$; в) $f(x) = \sqrt{4x + 1}$.
- 6.5.** Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$:
а) в начале координат; б) в точке (3; 9); в) в точке пересечения ее с прямой $y = 3x - 2$.
- 6.6.** Под каким углом пересекается парабола $y = x^2$ с прямой $3x - y - 2 = 0$?
- 6.7.** Под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $y^2 = x$?
- 6.8.** Составить уравнение касательной и нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2.
- 6.9. 1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции в точке с абсциссой x_0 .
2. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 :
а) $y = -x^2/4$, $x_0 = 2$; б) $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$;
в) $y = x - x^3$, $x_0 = -1$; г) $y = 8\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 4$;
д) $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$; е) $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$, $x_0 = -8$;
ж) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$; з) $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$, $x_0 = 16$;
и) $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$; к) $y = x^2 - 3x + 6$, $x_0 = 3$;

- 6.10. 1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции в точке с абсциссой x_0 .
- 2.** Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0 :
- а) $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = -1$; б) $y = x^{29} + 6$, $x_0 = 1$;
- в) $y = 2x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; г) $y = x^4 + 1$, $x_0 = 1$;
- д) $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1$; е) $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$, $x_0 = 1$;
- 6.11.** Дано уравнение прямолинейного движения точки: $s = 5t + 6$. Определить среднюю скорость движения: а) за первые 6 секунд; б) за промежуток времени от конца 3-й до конца 6-й секунды.
- 6.12.** Дано уравнение прямолинейного движения: $s(t) = t^3 + 3/t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 4$ до $t_1 = 4 + \Delta t$, полагая $\Delta t = 2; 1; 0,1; 0,03$.
- 6.13.** Закон движения точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ (s – в метрах, t – в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?
- 6.14.** Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$ и $s_2 = t^3 - 3t$. В какой момент времени их скорости равны?
- 6.15.** Тело, брошенное вверх, движется по закону $s = -4,905t^2 + 981t + 950$ (s – в метрах, t – в секундах). Найдите скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость. В какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какой наивысшей высоты в этот момент времени достигнет тело.
- 6.16.** Переменные величины y и x связаны соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?
- 6.17.** Ордината точки, описывающей окружность $y^2 + x^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?
- 6.18.** В какой точке эллипса $9y^2 + 16x^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

- 6.19.** Сторона квадрата увеличивается со скоростью v . Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a ?
- 6.20.** Радиус круга изменяется со скоростью v . Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r ?
- 6.21.** Радиус шара изменяется со скоростью v . С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?
- 6.22.** Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.
- 6.23.** В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?
- 6.24.** Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $x = \pi/4$.
- 6.25.** Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\alpha = \pi/3$.
- 6.26.** Найти точки на кривой $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7$, в которых касательные параллельны оси Ox .
- 6.27.** Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 5x - 11$, касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$.
- 6.28.** Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$.
- 6.29.** Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x - 7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x - 20y + 5 = 0$.
- 6.30.** Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.
- 6.31.** Траектория движения тела – кубическая парабола $12y = x^3$. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы?
- 6.32.** По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 4t^2 - 7$ и $x = 3t^2 - 4t + 38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи?

- 6.33.** Материальная точка движется по гиперболе $xy=2$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6, 2)?
- 6.34.** Исходя из определения производной, доказать, что: а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая; б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная; в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.
- 6.35.** Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- 6.36.** Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = |x|^3$ при $x=0$.
- 6.37.** Функция $y = |\sin x|$ непрерывна при любом x . Убедиться, что при $x=0$ она недифференцируема. Имеются ли другие значения независимой переменной, при которых функция недифференцируема?
- 6.38.** Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = e^{-|x|}$.
- 6.39.** Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\dots(x+1234567)$.

6.2. Дифференцирование функций

При нахождении производной функции $y = f(x)$ обычно используют правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

Основные правила дифференцирования.

1. Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ имеют производные в точке x_0 , то в этой точке существуют производные суммы, разности, произведения и частного этих функций (частного – при условии, что $g(x_0) \neq 0$), причем в точке x_0 справедливы равенства:

$$\text{а) } (u \pm v)' = u' \pm v' \quad \text{б) } (uv)' = u'v + uv'; \quad \text{в) } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

2. Постоянный множитель k выносится за знак производной

$$(ku)' = k \cdot u'.$$

3. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.

Пример 6.7. Вычислить производную функции $y = (3x^3 - 2x + 1) \cdot \sin x$.

Решение. Функция представляет собой произведение двух функций, поэтому следует применить правило дифференцирования произведения, а затем правило дифференцирования суммы и табличные производные степенной функции и синуса:

$$\begin{aligned} y &= \left(\underbrace{(3x^3 - 2x + 1)}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v \right)' = [(uv)' = u'v + uv'] = \\ &= (3x^3 - 2x + 1)' \cdot \sin x + (3x^3 - 2x + 1) \cdot (\sin x)' = \\ &= (9x^2 - 2) \cdot \sin x + (3x^3 - 2x + 1) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Пример 6.8. Найти производную функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$ в точке $x=2$.

Решение. Функция представляет собой частное, поэтому применяем правило дифференцирования частного и формулу производной степенной функции (для $\sqrt{x} = x^{1/2}$ и для x^2):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \right)' &= \frac{(x^{1/2})'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) - 2x\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1 - 4x^2}{2\sqrt{x}(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Подставляем в найденное выражение значение $x=2$:

$$f'(2) = \frac{1 + 3 \cdot (2)^2}{2\sqrt{2}(2^2 - 1)^2} = \frac{13}{18\sqrt{2}}.$$

Пример 6.9. Найти y' , если $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.

Решение. Используя правила дифференцирования суммы и частного,

$$\begin{aligned} \text{получим } y' &= \left(\operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x} \right)' = (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{e^x}{1+x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x) - (1+x)'e^x}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Производная сложной функции. Если функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0).$$

Интерпретация этой формулы такова: скорость $F'(x_0)$ изменения переменной z по отношению к скорости изменения переменной x равна произведению скоростей $f'(y_0)$ и $g'(x_0)$ (если y растет быстрее x в k раз, а z – быстрее y в m раз, то z растет быстрее x в $k \times m$ раз).

Пример 6.10. Найти производную сложной функции $y = u^2 + 3\sqrt{u} - 1$, если $u = x^4 + 1$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^2 + 3\sqrt{u} - 1)'_u \cdot (x^4 + 1)'_x = \left(2u + \frac{3}{2\sqrt{u}}\right) \cdot 4x^3.$$

$$\text{Так как } u = x^4 + 1, \text{ то } y' = (2x^4 + 2 + \frac{3}{2\sqrt{x^4 + 1}}) \cdot 4x^3.$$

Пример 6.11. Найти производную функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Представим функцию $y = e^{x^2}$ в виде суперпозиции двух функций $y = e^u$ и $u = x^2$. Имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^2)'_x = e^u \cdot 2x$. Подставляя x^2 вместо u , получим $y = 2xe^{x^2}$.

Пример 6.12. Найти производную функции $y = \ln \sin x$.

Решение. Обозначим $u = \sin x$, тогда производная сложной функции $y = \ln u(x)$ вычисляется по формуле

$$y' = (\ln u)'_u \cdot (\sin x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 6.13. Найти производную функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}$.

Решение. Случай сложной функции, полученной в результате нескольких суперпозиций, исчерпывается последовательным применением правила

$$y'_x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x / 2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)'_x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x / 2}} \cdot \sec^2 \frac{1}{2} x \cdot \left(\frac{1}{2} x\right)'_x = \frac{\sec^2 x / 2}{4 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x / 2}}.$$

Пример 6.14. Найти производную $f'(x)$ для $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(3^x) + x^3)$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде

$f(x) = h(g(x))$, где $g(x) = \operatorname{tg}(3^x) + x^3$, $h(u) = \ln u$ при $u = g(x)$ и воспользоваться формулой для производной сложной функции

$$f'(x) = \left(\ln(\operatorname{tg}(3^x) + x^3)\right)' = \frac{(\operatorname{tg}(3^x) + x^3)'}{\operatorname{tg}(3^x) + x^3} = (*).$$

Далее к числителю полученного выражения применяем формулу производной суммы, а функцию $\operatorname{tg}(3^x)$ также дифференцируем как сложную с использованием табличных производных тангенса и показательной функции:

$$(*) = \frac{(\operatorname{tg}(3^x))' + (x^3)'}{\operatorname{tg}(3^x) + x^3} = \frac{\frac{(3^x)'}{\cos^2(3^x)} + 3x^2}{\operatorname{tg}(3^x) + x^3} = \frac{\frac{3^x \ln 3}{\cos^2(3^x)} + 3x^2}{\operatorname{tg}(3^x) + x^3} = \frac{3^x \ln 3 + 3x^2 \cos^2(3^x)}{\cos^2(3^x)(\operatorname{tg}(3^x) + x^3)}.$$

Пример 6.15. Найти производную функции $y = \sqrt{x^4 + x^3 + 5}$.

Решение. Данная функция является сложной функцией. Производная сложной функции $y = f[u(x)]$ есть производная внешней функции $y = f(u)$ на производную внутренней функции $u = u(x)$: $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Для функции $y = \sqrt{x^4 + x^3 + 5} = (x^4 + x^3 + 5)^{1/2}$ $u(x) = x^4 + x^3 + 5$; $f(u) = u^{1/2}$.

$$\text{Тогда } u'(x) = 4x^3 + 3x^2, \quad f'(u) = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 5}}.$$

$$\text{Таким образом, } y' = u' \cdot f' = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 5}} = \frac{x^2(4x + 3)}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 5}}.$$

Пример 6.16. Найти производную функции $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x^2 + 4)^5 (3x - 1)^7}{(6x^3 + 1)^2 e^{\operatorname{tg} 5x}}}$.

Решение. Преобразуем исходное выражение, используя свойства логарифмов

$$y = \frac{1}{3} [5 \ln(x^2 + 4) + 7 \ln(3x - 1) - 2 \ln(6x^3 + 1) - \operatorname{tg} 5x].$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$y' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{7}{3x - 1} - \frac{12x^2}{6x^3 + 1} - \frac{5}{3 \cos^2 5x}.$$

Пример 6.17. Продифференцировать $y = \arcsin^5(\cos(2 - 4x))$.

Решение. Находим производную данной функции по правилам дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} y' &= 5 \arcsin^4(\cos(2 - 4x)) \cdot (\arcsin(\cos(2 - 4x)))' = \\ &= 5 \arcsin^4(\cos(2 - 4x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(2 - 4x)}} (\cos(2 - 4x))' = \\ &= \frac{5 \arcsin^4(\cos(2 - 4x))}{\sin(2 - 4x)} \cdot (-\sin(2 - 4x)) \cdot (-4) = 20 \arcsin^4(\cos(2 - 4x)). \end{aligned}$$

Производная обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 строго монотонна, непрерывна и имеет производную $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная ей функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, строго монотонна, непрерывна и имеет производную в точке y_0 :

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 6.18. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для следующих функций:

$$\text{а) } y = \sqrt[3]{x}; \quad \text{б) } y = \ln \sqrt{1 + x^2}; \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

Решение: а) обратная функция $x = y^3$ имеет производную $x'_y = 3y^2$.

$$\text{Следовательно, } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

б) при $x > 0$ обратная функция $x = \sqrt{e^{2y} - 1}$ имеет производную $x'_y = e^{2y} / \sqrt{e^{2y} - 1}$. Следовательно, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\sqrt{e^{2y} - 1}}{e^{2y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$;

в) функция $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ определена при $x > 0$. Обратной к ней является функция $x = \operatorname{tg}^2 y$ с производной $x'_y = (\operatorname{tg}^2 y)' = 2 \operatorname{tg} y \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$. По формуле производной сложной функции находим $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\cos^2 y}{2 \operatorname{tg} y}$.

Так как $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$ и $\operatorname{tg} y = \sqrt{x}$, то можно записать окончательно: $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{x}}$.

Таким же образом могут быть получены все формулы для производных $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Логарифмическое дифференцирование. Пусть функция $f(x)$ принимает положительные значения и дифференцируема на некотором интервале. Тогда по формуле производной сложной функции производная от логарифма функции $f(x)$ равна: $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называют **логарифмической производной** функции $f(x)$. В экономике ее еще называют *темпом изменения функции*.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем – производную самой функции по формуле

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln |f(x)|)'$$

Эту формулу удобно использовать в тех случаях, когда производную натурального логарифма данной функции найти проще, чем производную самой функции. Например:

- 1) $y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x), n > 2$;
- 2) $y = \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x)}, g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x) \neq 0, n > 1, m > 1$;
- 3) $y = f(x)^{g(x)}$ (показательно-степенная функция).

Пример 6.19. Найти производную функции $y = x^2 \cdot e^{x^2} \cdot \ln x \cdot \cos^2 x$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства. По свойствам логарифма $\ln y = 2 \ln |x| + x^2 \ln e + \ln \ln x + 2 \ln \cos x$.

Дифференцируем обе части равенства $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + 2x + \frac{1}{x \ln x} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x}$.

Окончательно имеем $y' = y \left(\frac{2}{x} + 2x + \frac{1}{x \ln x} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x} \right)$

или $y' = x^2 \cdot e^{x^2} \cdot \ln x \cdot \cos^2 x \left(\frac{2}{x} + 2x + \frac{1}{x \ln x} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x} \right)$.

Производная показательно-степенной функции. У показательной функции независимая переменная входит в показатель степени, у степенной переменная является основанием. Если же функция представляет собой степень, основание и показатель которой зависят от переменной, то такую функцию называют показательно-степенной. Общий вид такой функции: $y = u(x)^{v(x)}$, или кратко: $y = u^v$.

При нахождении производной показательно-степенной функции можно каждый раз применять технику логарифмического дифференцирования или использовать формулу $(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$, появляющуюся в результате применения этой техники.

Пример 6.20. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства

$$\ln y = \ln \left((\cos x)^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{x} \ln \cos x.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x} \ln \cos x \right)', \quad \frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln \cos x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x).$$

$$\text{Окончательно получаем,} \quad y' = (\cos x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{\ln \cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right).$$

Пример 6.21. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования показательно-степенной функции, выбрав соответствующие u и v : $u = x^2 + 3x$, $v = x \cos x$. Производные этих функций: $u' = 2x + 3$, $v' = \cos x - x \sin x$. Подставляя их в формулу $(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$ в итоге получаем

$$f'(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x} \cdot \left[(\cos x - x \sin x) \cdot \ln(x^2 + 3x) + x \cos x \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \right].$$

Пример 6.22. Вычислить производную функции $y = x^{\sqrt{x}}$.

Решение. Прологарифмируем исходную функцию

$\ln y = \ln(x^{\sqrt{x}}) = \sqrt{x} \cdot \ln x$. Продифференцируем результат

$$(\ln y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln x)', \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

В итоге находим $y' = y \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \quad y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если

функция $y = f(x)$ задана в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, причем функция $\varphi(t)$ монотонна и имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то $y = \psi(\Phi(x))$ и

$$y'(x) = \psi'(t) \Phi'(x) = \psi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Другими словами, производная от параметрически заданной величины y по независимой переменной x равна отношению производных от y и от x , взятых по параметру t . Таким образом, производную функции, заданной параметрически, можно находить без определения непосредственной зависимости y от x .

Пример 6.23. Даны параметрические уравнения кривой, называемой циклоидой $x = a \cdot (1 - \cos t)$, $y = a \cdot (t - \sin t)$. Найти производную $y'(x)$.

Решение. Дифференцируем x и y по параметру t

$$x'(t) = a \cdot \sin t, \quad y'(t) = a \cdot (1 - \cos t).$$

$$\text{Подставляем в формулу } y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \cdot (1 - \cos t)}{a \cdot \sin t} = \frac{1 - \cos t}{\sin t}.$$

Пример 6.24. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1 - 2 \cos t \end{cases}$.

$$\text{Решение. } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1 - 2 \cos t)'}{(t + \sin t)'} = \frac{2 \sin t}{1 + \cos t}.$$

Производная неявной функции. Если y как функция от x задается соотношением $F(x, y) = 0$, то y называется *неявной функцией* от x , в отличие от явного способа задания $y = f(x)$.

Производная от y по x при неявном способе задания функции может быть определена дифференцированием выражения $F(x, y) = 0$ как сложной функции, считая y функцией от x . Решая полученное уравнение относительно производной y' , находим выражение для производной от неявной функции в виде $y' = f(x, y)$.

Пример 6.25. Найти производную y'_x из уравнения $y^2 + x^2 = 4$ в точке $A(2, 2)$.

Решение. Будем рассматривать y как сложную функцию от x . Следовательно, $(y^2)'_x = 2yy'_x$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2yy' + 2x = 0$, т.е. $y' = -x/y$. Найдем значение производной в точке A , подставив ее координаты: $y'(2) = -2/2 = -1$.

Пример 6.26. Найти производную y'_x из уравнения $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Решение. Дифференцируем по x обе части уравнения, считая y функцией аргумента x : $y' = -x/y \quad 3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2x e^y = 0$, $y' = y \cdot \frac{2x e^y - 3x^2}{1 - x^2 y e^y}$.

Задачи для самостоятельного решения

6.40. Найти производную функции $f(x)$ (если задано, то в точке):

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5;$

2) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x};$

3) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}};$

4) $f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2};$

5) $f(x) = (1 - 5x)^{99};$

6) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{5x^4 - 4x + 1}}, \quad x=0;$

7) $f(x) = x^3 + 3^x;$

8) $f(x) = \ln(x^4 - 3x + 1);$

9) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}, \quad x = \pi / 2;$

10) $f(x) = \sin^2 x;$

11) $f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}, \quad x=1;$

12) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 2};$

13) $f(x) = \sqrt[3]{\cos 3x};$

14) $y = \frac{\sqrt{x} \sin x}{3x^2 + 1};$

15) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$

16) $y = e^{\operatorname{tg} 3x}.$

6.41. Найти производные следующих функций с помощью основных правил дифференцирования и таблицы производных:

1) $y = (4x - x^2) / 4, \quad x_0 = 2;$

2) $y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2;$

3) $y = x - x^3, \quad x_0 = -1;$

4) $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4;$

5) $y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1;$

6) $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8;$

7) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4;$

8) $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16;$

9) $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1;$

10) $y = (x^2 - 3x + 6) / x^2, \quad x_0 = 3;$

6.42. Найти производную, используя правило дифференцирования сложной функции, основные правила дифференцирования и таблицу производных:

$$1) f(x) = \ln(\arcsin 2x - x^2);$$

$$2) f(x) = \ln(4^x + 4x);$$

$$3) f(x) = \ln(\operatorname{arctg}(x^3 - x^2));$$

$$4) f(x) = \sin(\ln(5x - x^3));$$

$$5) f(x) = \ln(x^3 - \cos 3x);$$

$$6) f(x) = \ln(\operatorname{tg} 3x + x^3);$$

$$7) f(x) = e^{\arcsin(1-8x^3)};$$

$$8) f(x) = 2^{\operatorname{arctg}(3x^2)+2x^3};$$

$$9) f(x) = \sin(e^{5x^2-2x});$$

$$10) f(x) = \cos \ln(x + x^2);$$

6.43. Найти производную сложной функции:

$$1) y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a});$$

$$2) y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right);$$

$$3) y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x});$$

$$4) y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}};$$

$$5) y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1});$$

$$6) y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1};$$

$$7) y = \ln^2(x + \cos x);$$

$$8) y = \ln^3(1 + \cos x);$$

$$9) y = \ln \ln \sin(1 + 1/x);$$

$$10) y = \ln \ln^3 \ln^2 x;$$

6.44. Найти производную тригонометрической функции:

$$1) y = \sin \sqrt{3}x + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x};$$

$$2) y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x};$$

$$3) y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x};$$

$$4) y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x};$$

$$5) y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x};$$

$$6) y = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}.$$

6.45. Найти производную:

$$1) y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}};$$

$$2) y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}};$$

$$3) y = \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3};$$

$$4) y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x};$$

$$5) y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}};$$

$$6) y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}};$$

$$7) y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$$

$$8) y = -9 \arccos \sqrt{\frac{x-1}{6}};$$

6.46. Найти производную показательно-степенной функции.

$$1) y = (\sin x)^{5e^x}; \quad 2) y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln(\operatorname{arctg} x)}; \quad 3) y = (\sin \sqrt{x})^{\ln(\sin \sqrt{x})};$$

$$4) y = (\arcsin x)^{e^x}; \quad 5) y = (\ln x)^{3^x}; \quad 6) y = x^{\arcsin x};$$

$$7) y = (c \operatorname{tg} 3x)^{2e^x}; \quad 8) y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}; \quad 9) y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x};$$

$$10) y = (\cos 5x)^{e^x}; \quad 11) y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}; \quad 12) y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)};$$

6.47. Функция $y = y(x)$ задана параметрически. Найти производную y'_x :

$$1) \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1); \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln(\operatorname{tg} e^t); \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$$

6.48. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$:

$$1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = \pi/6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$$

6.49. Найти производную y'_x неявной функции:

$$1) 2x - 5y + 10 = 0;$$

$$2) x^2 + y^2 - 4xy = 0;$$

$$3) x^2 y + xy^2 = 2;$$

$$4) x + \sin y = 0;$$

$$5) e^y + x = y;$$

$$6) x^3 + y^3 = a^3;$$

$$7) x^3 + x^2 y + y^2 = 0;$$

$$8) \operatorname{arctg}(x + y) = x;$$

$$9) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a};$$

$$10) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$11) x^3 y^2 - e^{x-3y} + 4 = 0;$$

$$12) x^3 y - e^x - \sin y + 5 = 0;$$

$$13) xy - \cos x + \sin y = 0;$$

$$14) \cos x - \sin y + x - y^2 = 0;$$

$$15) e^x + e^y + x^2 + y^3 = 0;$$

$$16) xy^2 + \sin x + \sin y = 0.$$

6.3. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда в точке x можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \approx f'(x) \cdot \Delta x$. Здесь $f'(x) \cdot \Delta x$ – главная линейная относительно Δx часть приращения Δy , так как величина $\alpha \cdot \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \cdot \Delta x$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения Δx независимой переменной. Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ или $dy = f'(x) \cdot dx$, так как дифференциал независимой переменной равен ее приращению $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Эта формула устанавливает связь между производной и дифференциалом функции и позволяет по таблице производных составить таблицу дифференциалов. Так, например, $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ и т.д.

Пример 6.27. Найти дифференциал функции $y = \cos x$.

Решение. По определению находим $dy = d(\cos x) = (\cos x)'dx = -\sin x dx$.

Пример 6.28. Вычислить значение дифференциала функции $y = x^3 + 5x^2$, когда x изменяется от 1 до 1,1.

Решение. Находим дифференциал функции $dy = (x^3 + 5x^2)'dx = (3x^2 + 10x)dx$. Подставляя значения $x = 1$ и $dx = \Delta x = 1,1 - 1 = 0,1$, получим искомое значение дифференциала $dy = (3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1) \cdot 0,1 = 13 \cdot 0,1 = 1,3$.

Геометрический смысл дифференциала.

Из треугольника MKL (рис. 6.4) находим: $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$, $PL = \Delta y$.

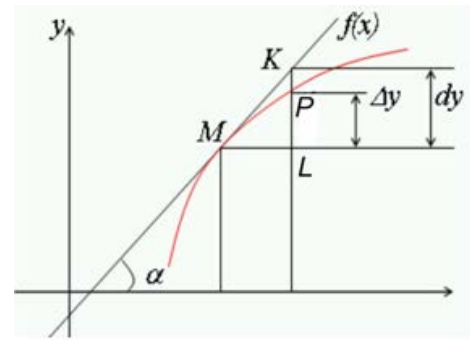


Рис. 6.4

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M(x; f(x))$, при заданном приращении аргумента Δx . Приращение функции Δy есть приращение ординаты точки кривой, соответствующее приращению аргумента Δx .

Геометрический смысл дифференциала состоит в том, что на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ функция $f(x)$ заменяется линейной функцией $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, график которой – касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Из определения дифференциала следует, что разность $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx . Значит, справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или в подробной записи

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

При этом функция $f(x)$ для значений x , близких к x_0 , приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется *линеаризацией функции*. Этот прием часто используется при приближенных расчетах. Для вычисления значения функции $f(x)$ в заданной точке x выбирают такую точку x_0 , чтобы $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ вычислялись легко, а разность $\Delta x = x - x_0$ была как можно меньше.

Абсолютная погрешность вычислений равна $|\Delta y - dy|$, а относительная погрешность $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right|$.

Пример 6.29. Найти приближенное значение $\sqrt{1,02}$.

Решение. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$. Тогда

$$f(1 + 0,02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,02 = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0,02 = 1 + 0,01 = 1,01.$$

Пример 6.30. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0,15$.

Решение. Здесь функция $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$, точка $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,15$,

$x_0 + \Delta x = 0,15$, $f(x_0) = \sqrt[5]{1} = 1$. Найдем $y = f'(x)$. Здесь удобнее воспользоваться методом логарифмического дифференцирования. Имеем

$$\ln y = \frac{1}{5}(\ln(2-x) - \ln(2+x)); \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \left(\frac{-1}{2-x} - \frac{1}{2+x} \right) = -\frac{4}{5(4-x^2)}.$$

Откуда $y' = -\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{4}{5(4-x^2)}$ и $f'(x_0) = -\sqrt[5]{1} \cdot \frac{4}{5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$. Тогда имеем

$$\sqrt[5]{\frac{2-0,15}{2+0,15}} \approx 1 - \frac{1}{5} 0,15 = 0,97.$$

Заметим, что вычисление с помощью калькулятора дает результат 0,9703.

Пример 6.31. Вычислите приближенно: а) $\arcsin 0,51$; б) $\sin 46^\circ$.

Решение: а) Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x$. Полагая $x = 0,51$, $x_0 = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ и применяя приближенную формулу $\arcsin(x_0 + \Delta x) \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'_{x=x_0} \cdot \Delta x$, в результате получаем

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,513;$$

б) выбираем $f(x) = \sin x$, $x = 46^\circ$, $x_0 = 45^\circ$, $\Delta x = 1^\circ$.

Перейдем от градусов к радианам: $x_0 = 45 \pi / 180 = \pi / 4$, $\Delta x = \pi / 180$.

Проведем вспомогательные вычисления: $f(x_0) = \sin \pi / 4 = \sqrt{2} / 2$,
 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $f'(x_0) = \cos \pi / 4 = \sqrt{2} / 2$. Подставляя все в формулу $f(46\pi / 180) = f(\pi / 4) + f'(\pi / 4) \cdot \pi / 180$, имеем

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{46\pi}{180} \right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,719.$$

Пример 6.32. Найти приближенно площадь круга радиуса 3,02 м.

Решение. Воспользуемся формулой $S = \pi R^2$. Полагая, что $R = 3$, $\Delta R = 0,02$, имеем $\Delta S \approx dS = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0,02 = 0,12\pi$. Следовательно, приближенное значение площади круга составляет $9\pi + 0,12\pi = 9,12\pi \approx 28,66 (\text{м}^2)$.

Свойства дифференциала. Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала и правил вычисления производных вытекают следующие свойства:

$$1) d(u+v) = (u+v)' \cdot dx = u' \cdot dx + v' \cdot dx = du + dv;$$

$$2) d(uv) = (uv)' \cdot dx = u'dx \cdot v + u \cdot v'dx = v \cdot du + u \cdot dv;$$

$$3) d(Cu) = C du;$$

$$4) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала. Дифференциал неявной функции. Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. $y = f(g(t)) = F(t)$ – сложная функция. Тогда $dy = F'(t)dt$ и также $dy = f'(x) \cdot g'(t)dt = f'(x)dx$, т.е. форма записи первого дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной. Поэтому полученное выражение называют инвариантной формой записи первого дифференциала. Благодаря этому свойству можно непосредственно вычислить дифференциал неявной функции $y = y(x)$, заданной равенством $f(x, y) = 0$.

Пример 6.33. Вычислить дифференциал неявной функции $y = y(x)$, заданной равенством $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

Решение. Пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получим $2x dx + 2 \cdot (y dx + x dy) - 2y dy = 0$. Выражаем dy :

$$dy = -\frac{x+y}{x-y} \cdot dx.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.50. Найти дифференциал первого порядка функции $f(x)$ в данной точке a :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 8}}, \quad a = 4; & 2) f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad a = 0; \\ 3) f(x) = \frac{2x}{1 + \sin 3x}, \quad a = 0; & 4) f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}, \quad a = 1. \end{array}$$

6.51. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy , если $x = 1$ и $\Delta x = 0,1; 0,01$. Какова будет погрешность (абсолютная и относительная) значения Δy , если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

6.52. Найти приращение ΔV объема шара V при изменении радиуса $R = 2$ на ΔR . Вычислить ΔV , если $\Delta R = 0,5; 0,1; 0,01$. Какова будет погрешность значения ΔV , если ограничиться членом, содержащим ΔR в первой степени?

6.53. Дана функция $y = x^3 + 2x$. Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующие изменению x от $x = 2$ до $x = 2,1$.

6.54. Какое приращение получает функция $y = 3x^2$ при переходе независимой переменной от значения $x = 1$ к значению $x = 1,02$? Каково значение соответствующей линейной главной части? Найти отношение второй величины к первой.

6.55. Дана функция $y = f(x)$. В некоторой точке x дано приращение $\Delta x = 0,2$; соответствующая главная часть приращения функции оказалась равной $0,8$. Найти производную в точке x .

6.56. Дана функции $f(x) = x^2$. Известно, что в некоторой точке приращению аргумента $\Delta x = 0,2$ соответствует главная часть приращения функции $df(x) = -0,8$. Найти начальное значение аргумента.

6.57. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0,1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения дифференциалом. Сделать чертеж.

6.58. Найти приращение и дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$ и $\Delta x = 0,41$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности.

6.59. Дана функция $y = x^3 - x$. При $x = 2$ вычислить Δy и dy , придавая Δx значения $\Delta x = 1; 0,1; 0,01$. Найти соответствующие значения относительной погрешности.

6.60. Найти графически (сделав чертеж на миллиметровой бумаге в большом масштабе) приращение, дифференциал и вычислить абсолютную и относительную погрешности при замене приращения дифференциалом для функции $y = 2^x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,4$.

6.61. Сторона квадрата равна 8 см. Насколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на: а) 1 см; б) 0,5 см; в) 0,1 см. Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата и оценить относительную погрешность (в процентах) при замене приращения его главной частью.

6.62. Известно, что при увеличении сторон данного квадрата на 0,3 см линейная главная часть приращения площади составляет $2,4 \text{ см}^2$. Найти линейную главную часть приращения площади, соответствующую приращению каждой стороны на: а) 0,6 см; б) 0,75 см; в) 1,2 см.

6.63. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$, $x = t^2 + 2t + 1$; б) $s = \cos^2 z$, $z = (t^2 - 1)/4$;

в) $z = \operatorname{arctg} y$, $y = 1/\operatorname{tg} s$; г) $y = 3^{-1/x}$, $x = \ln \operatorname{tg} s$.

6.64. Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно:

а) $(x + y)^2(2x + y)^3 = 1$; б) $y = e^{-xy}$; в) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

6.65. Найти dy в точке (1, 2), если $y^3 - y = 6x^2$.

6.66. Найти дифференциал dy :

1) $y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$;

2) $y = \ln |x^2 - 1|$

3) $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$;

4) $y = \frac{\ln |x|}{1 + x^2}$;

5) $y = \sqrt{1 + x^2} \cdot \operatorname{arctg} x$;

6) $y = x \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}|$;

$$7) y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1};$$

$$8) y = \arccos\left(1/\sqrt{1+2x^2}\right);$$

$$9) y = \ln|x + \sqrt{1+2x}|;$$

$$10) y = \operatorname{arctg}(1 + \operatorname{tg} x)$$

$$11) y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x;$$

$$12) y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x;$$

$$13) y = \ln|\sin x + 2 \cos x|;$$

$$14) y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x};$$

$$15) y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x);$$

$$16) y = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x).$$

6.67. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

$$1) y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78;$$

$$2) y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76;$$

$$3) y = x^{11}, \quad x = 1,021;$$

$$4) y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97;$$

$$5) y = x^5, \quad x = 2,997;$$

$$6) y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97;$$

$$7) y = \arcsin x, \quad x = 0,08;$$

$$8) y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$$

6.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Производные. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке некоторого интервала (т.е. дифференцируема на этом интервале). Если производная функции $f'(x)$ существует, то ее называют *второй производной* функции $f(x)$:

$$y'' = (y')' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{или} \quad f''(x) = (f'(x))' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

а функцию $f(x)$ – дважды дифференцируемой. Если процедуру дифференцирования можно повторить n раз, то в итоге будет найдена производная n -го порядка, а функцию $f(x)$ следует называть n раз дифференцируемой:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad \text{или} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Под производной нулевого порядка подразумевается сама функция:

$$(y)^{(0)} = y.$$

Общие правила нахождения высших производных. Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы, то:

- 1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ – постоянный множитель выносится за знак производной;
- 2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ – сумма (разность) дифференцируется почленно;
- 3) для производной произведения справедлива формула Лейбница

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 v u^{(n)} + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \dots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + C_n^n u v^{(n)},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Полезно помнить следующие формулы:

$$\begin{aligned} (x^m)^{(n)} &= m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) \cdot x^{m-n}; \\ (a^x)^{(n)} &= a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \quad (\text{в частности, } (e^x)^{(n)} = e^x); \\ (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}; \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin(x + n\pi/2); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2); \end{aligned}$$

- 4) если функция $y = y(x)$ задана параметрически $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, то ее старшие производные y''_{xx} , y'''_{xxx} , ..., вычисляются по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т.д.}$$

Эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины z по независимой переменной x равна отношению производных от z и от x , взятых по параметру t .

В частности, согласно этим правилам производную второго порядка можно вычислить по формуле

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3};$$

- 5) если дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$, $a < x < b$, имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = g(y)$ и $y'_x \neq 0$, то ее первая и вторая производные вычисляются по формулам

$$x'_y(y_0) = 1/y'_x(x_0), \quad x''_{yy}(y_0) = -y''_{xx}(x_0)/(y'_x(x_0))^3;$$

б) если y есть неявная функция от x , заданная уравнением $f(x, y) = 0$, не разрешенным относительно y , то для нахождения производной y'_x нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x , и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y : $y'_x = \varphi(x, y)$.

Вторую производную y''_{xx} от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = F(x, y, \frac{dy}{dx}).$$

Заменяя $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x, y)$, получим выражение второй производной через x и y :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F(x, y, \varphi(x, y)) = \psi(x, y).$$

Совершенно так же и все последующие производные от неявной функции можно выразить только через x и y : каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\varphi(x, y)$.

К такому же результату приводит последовательное дифференцирование равенства $f(x, y) = 0$ с последующим исключением из полученной системы всех производных низшего порядка.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал от первого дифференциала функции называется ее *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка*. Обозначение $d^2 y = d(dy)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель: $d(dx) = d^2 x = 0$,

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = (f'(x))'(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции: $d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)dx^3$ и дифференциалы более высоких порядков.

Дифференциалом n -го порядка называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = (f^{(n-1)}(x) dx^{n-1})' \cdot dx = f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

Замечание. Формула справедлива при $n > 1$ (в отличие от случая $n = 1$) только тогда, когда x является *независимой переменной*.

Пример 6.34. Для $f(x) = \sqrt{3x-2}$ найти вторую производную ($f''(x)$).

Решение. Сначала найдем первую производную

$$f'(x) = ((3x-2)^{1/2})' = \frac{1}{2}(3x-2)^{-1/2}(3x-2)' = \frac{3}{2}(3x-2)^{-1/2}.$$

Далее воспользуемся тем, что $f''(x) = (f'(x))'$

$$f''(x) = \left(\frac{3}{2}(3x-2)^{-1/2} \right)' = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (3x-2)^{-3/2} (3x-2)' = -\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot \sqrt{(3x-2)^3}}.$$

Пример 6.35. Найти производную n -го порядка функции $y = \sin x$.

Решение. Имеем $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, далее производные повторяются в том же порядке. Поскольку

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

то $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

Пример 6.36. Функция задана параметрически: $y = a \sin^3 t$, $x = a \cos^3 t$.

Найти ее вторую производную y''_{xx} .

Решение. $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t,$

$$y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3a \cdot \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

Пример 6.37. Для данных неявных функций найти производные указанного порядка:

а) $t - s + \operatorname{arctg} s = 0$. Найти $s''(t, s)$; б) $y = x + \ln y$. Найти y'' , x'' .

Решение: а) 1-й способ. Считая s функцией аргумента t , продифференцируем обе части равенства по t и найдем s' :

$$1 - s' + \frac{s'}{1+s^2} = 0; \quad s' = \frac{1+s^2}{s^2} = 1 + s^{-2}.$$

Полученное равенство снова дифференцируем по t и находим s'' : $s'' = -2s^{-3} \cdot s'$.
 Заменяя здесь s' через $1 + s^{-2}$, в итоге получим: $s'' = -\frac{2(1+s^2)}{s^5}$.

2-й способ. Данное равенство последовательно дифференцируем по t два раза:

$$1 - s' + \frac{s'}{1+s^2} = 0; \quad -s'' + \frac{s''(1+s^2) - s' \cdot 2s \cdot s'}{(1+s^2)^2} = 0.$$

Из первого уравнения определяем s' и, подставляя во второе, получаем соотношение между t , s и s'' , из которого выразим s'' через t и s . Результат будет тот же, что и при решении 1-м способом;

б) считая y функцией аргумента x , продифференцируем обе части равенства по

x и найдем $y' = 1 + \frac{y'}{y}$; $y' = \frac{y}{y-1}$.

Дифференцируем последнее равенство по x и определяем y'' :

$$y'' = \frac{y'(y-1) - y'y}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение, получаем $y'' = -\frac{y}{(y-1)^3}$.

Аналогично найдем x'' . Дифференцируем данное равенство по y и определяем x' : $1 = x' + \frac{1}{y}$, $x' = \frac{y-1}{y}$.

Дифференцируем полученное равенство по y и определяем x'' :

$$x'' = \frac{1 \cdot y - 1 \cdot (y-1)}{y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

Пример 6.38. Найти значение y''_{xx} в точке $x=1$, если

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad y|_{x=1} = 1.$$

Решение. Продифференцировав по x , найдем, что

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0.$$

Полагая, что $x=1$, $y=1$, получим значение y' при $x=1$:

$$3 - 4 - 4y' + 5 + y' = 0, \quad y' = 4/3.$$

Еще раз дифференцируем по x :

$$6x - 4y^2 - 8xyy' - 8xyy' - 4x^2(y')^2 - 4x^2yy'' + y'' = 0$$

Полагая, что $x=1$, $y=1$ и $y' = 4/3$, найдем значение y'' при $x=1$:

$$6 - 4 - \frac{64}{3} - \frac{64}{9} - 3y'' = 0, \quad y'' = -8\frac{22}{27}.$$

Пример 6.39. Вычислить дифференциал второго порядка функции $y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos^2 x$ в точке $x_0 = \pi/8$.

Решение. Последовательно находим $y' = \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}\sin 2x$,
 $y'' = \frac{1}{2}\cos 2x$, $y''(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Так как $d^2y = y''(\frac{\pi}{8})(dx)^2$, то $d^2y = \frac{\sqrt{2}}{4}(dx)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

6.68. Найти вторую производную функции:

- а) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; б) $f(x) = \sin 3x \cdot \sin 5x$;
в) $f(x) = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$; г) $f(x) = \cos^2 2x$.

6.69. Найти вторую производную функции в указанной точке:

- 1) $f(x) = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$, $x_0 = \pi/2$;
2) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = e^{-2x}(2\sin 4x - \cos 4x)$, $x_0 = \pi/4$;
4) $f(x) = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;
5) $f(x) = x + \ln(1 - e^{-x})$, $x_0 = 0$.

6.70. Для данной функции y вычислить дифференциал второго порядка d^2y в точке x_0 :

- 1) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$, $x_0 = 0$;

3) $y = \ln(2 + x^2)$, $x_0 = 0$;

4) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$;

5) $y = e^x \sin 2x$, $x_0 = 0$;

6) $y = e^{-x} \cos x$, $x_0 = 0$;

7) $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 2$;

8) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

6.71. Найти производную указанного порядка:

1) $y = (2x^2 - 7) \ln(x - 1)$, $y''' = ?$; 2) $y = (3 - x^2) \ln^2 x$, $y''' = ?$;

3) $y = x \cos x^2$, $y''' = ?$;

4) $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y''' = ?$;

5) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y^{IV} = ?$;

6) $y = (4x^3 + 5) e^{2x+1}$, $y^V = ?$;

7) $y = x^2 \sin(5x - 3)$, $y''' = ?$;

8) $y = (2x + 3) \ln^2 x$, $y''' = ?$

6.72. Найти производную n -го порядка:

1) $y = x e^{ax}$;

2) $y = \sin 2x + \cos(x + 1)$;

3) $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$;

4) $y = \frac{4x + 7}{2x + 3}$;

5) $y = \lg(5x + 2)$;

6) $y = a^{3x}$;

7) $y = \frac{x}{2(3x + 2)}$;

8) $y = \lg(x + 4)$;

9) $y = \sqrt{x}$;

10) $y = 2^{3x+5}$.

6.73. Найти производную второго порядка y''_{xx} функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = 1/t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t; \end{cases}$

6.74. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной неявно, из задач 6.76 – 6.77.

6.5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a, b) и имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в этом промежутке, за исключением, быть может, точки $x = a$, причем $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x \rightarrow a$, то говорят, что частное $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a$ представляет неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞ .

Первое правило Лопиталя $[0/0]$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ когда последний предел существует.}$$

Второе правило Лопиталя $[\infty/\infty]$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ когда последний предел существует.}$$

Неопределенности вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ и 0^0 , ∞^0 , 1^∞ сводятся к неопределенностям вида $0/0$ и ∞/∞ путем алгебраических преобразований и логарифмирования:

- В случае неопределенности вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида $0/0$ или ∞/∞ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

- В случае неопределенности вида 0^0 или ∞^0 , или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Если частное $f'(x)/g'(x)$ в точке $x=a$ также есть неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.

Пример 6.40. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e}$.

Решение. Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \rightarrow 1$, а потому имеем неопределенность вида $0/0$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1/x}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 6.41. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Раскрываем неопределенность вида ∞/∞ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 6.42. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Неопределенность вида $0/0$. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$ – правило Лопиталя применено трижды.

Пример 6.43. Найти предел функции $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ при $x \rightarrow 0$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Сначала преобразуем ее к неопределенности вида $0/0$, для чего достаточно привести дроби к общему знаменателю. К полученному выражению два раза применим правило Лопиталя. Записывая последовательно все вычисления, будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x - 1 + e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(xe^x - 1 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{xe^x + e^x + e^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 6.44. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$.

Решение. Неопределенность вида 1^∞ . Пусть A – искомый предел.

$$\text{Тогда } \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(e^x + x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2, \quad A = e^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.75. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6};$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x^2 + 3x};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1};$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 4x};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 15x}{\sin 9x};$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2};$ | 8) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 7x}{\cos 5x};$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x};$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - 7 \sin x}{x^2};$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow +0} x^3 \ln x;$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln^2 x;$ | 14) $\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x.$ |

6.76. Найти пределы функций, пользуясь правилом Лопиталя:

- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \ln(1+2x)}{x^2};$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$ | 4) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x;$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \sin 7x};$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x;$ | 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\cos x};$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x;$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}};$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x;$ | 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$ |

6.6. Основные свойства дифференцируемых функций

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда возможны только два случая: 1) производная $f'(x_0)$ не существует; 2) $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл этого утверждения – касательная к графику в точке локального экстремума параллельна оси Ox или график функции имеет излом в точке x_0 (рис. 6.5).

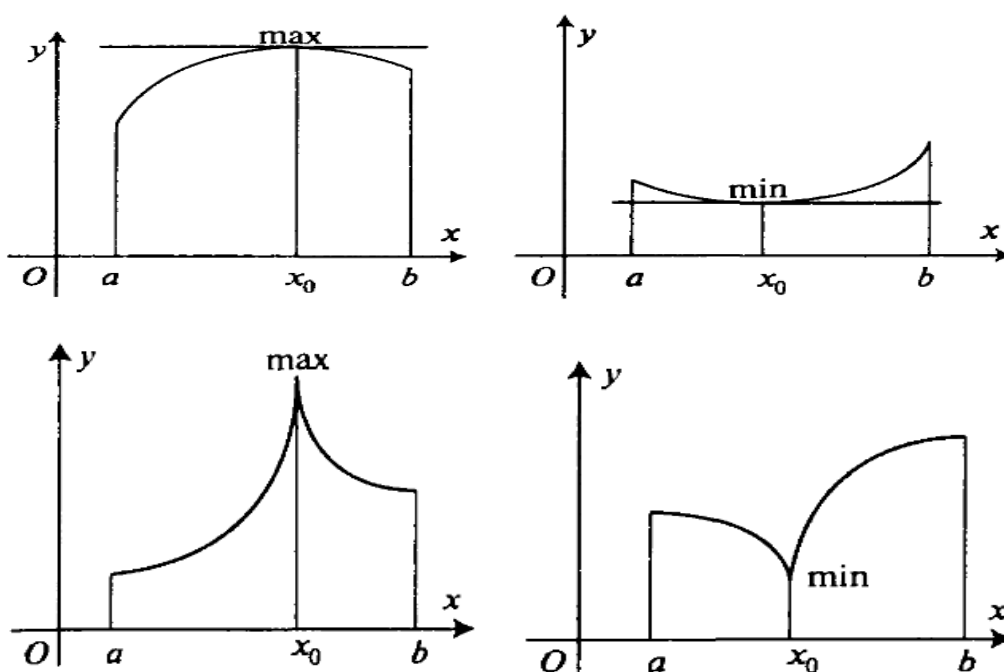


Рис. 6.5

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) имеет производную на интервале (a, b) ;
- 3) на концах интервала принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что на графике функции, удовлетворяющей условию теоремы, обязательно существует точка (по крайней мере, одна), в которой касательная к графику параллельна оси Ox .

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a, b) . Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Часто этот факт упоминается как *формула конечных приращений Лагранжа* $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \Delta x$, $0 < \theta < 1$.

Физическая интерпретация теоремы Лагранжа состоит в том, что существует такой момент времени $x = c$, в который мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл – на интервале (a, b) найдется такая точка c , что касательная к графику в точке $C(c, f(c))$ параллельна секущей AB (рис. 6.6).

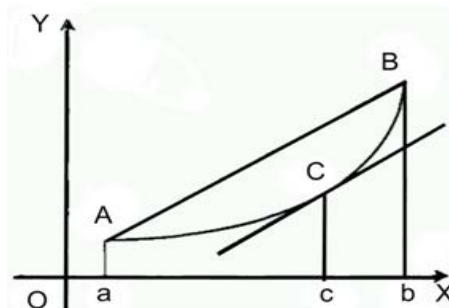


Рис. 6.6

Напомним, что *формулой бесконечно малых приращений* называют приближенное равенство $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ при малых Δx .

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют производные в каждой точке интервала (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(обобщенная формула конечных приращений Коши).

Формула Тейлора. Многочлен степени не выше n

$$T_n(x) = T_n(x; f) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки a .

Если функция $f(x)$ – многочлен n -й степени, то $T_n(x)$ – ее точное разложение по степеням $(x - a)$, т.е. $T_n(x; f) = f(x)$ при любом x .

Если функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ -го порядка включительно в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то для всех x из этого интервала справедлива формула Тейлора n -го порядка

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x; f) = R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, $\xi \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – остаточный член в форме Лагранжа. Величина $R_{n+1}(x)$ – бесконечно малая порядка $n+1$ относительно $x-a$ в окрестности точки a .

При $a = 0$ многочлен Тейлора называется также **многочленом Маклорена**.

Многочлен Тейлора-Маклорена служит достаточно хорошим средством приближенного представления функции и широко применяется в приближенных вычислениях с заданной точностью, оцениваемой абсолютной величиной остаточного члена $R_{n+1}(x)$.

Многочлены Маклорена для некоторых из элементарных функций имеют вид:

$$1) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + nx^{n-1} + x^n.$$

Эта формула называется **биномом Ньютона**;

$$2) T_n(x; e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} (x-a)^{n+1};$$

$$3) T_n(x; \sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$R_{n+1}(x) = \sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$4) T_n(x; \cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$R_{n+1}(x) = \cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$5) T_n(x; (1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |R_{n+1}(x)| = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{\alpha-n} x^{n+1}, \quad |x| < 1;$$

$$6) T_n(x; \ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad |R_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)}, \quad x \in (-1; 1).$$

Пример 6.45. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$, если $a = 1$, $b = 5$? При каком значении c ?

Решение. Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x и ее значения на концах отрезка $[1, 5]$ равны: $f(1) = f(5) = 95$, то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение c определяем из уравнения $f'(c) = 2c - 6 = 0$, т.е. $c = 3$.

Пример 6.46. Функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ непрерывна на отрезке $[0, 16]$, на концах которого она принимает равные значения: $f(0) = f(16) = 4$. Однако ее производная $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-8)^2}}$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0, 16)$. Противоречит ли это теореме Ролля?

Решение. Нет, так как в точке $x = 8$ интервала $]0, 16[$ производная не существует, и условия теоремы Ролля нарушены.

Пример 6.47. Показать, что производная многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ имеет действительный корень в интервале $] -1, 1[$.

Решение. Найдем корни данного многочлена: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ или $(x-1)^2(x+1) = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Так как $f(-1) = f(1) = 0$, то по теореме Ролля $f'(x)$ имеет корень в интервале $] -1, 1[$. Найдем корни производной $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1$. Таким образом, между корнями функции -1 и 1 содержится корень производной, равный $-1/3$.

Пример 6.48. На дуге AB кривой $y = 2x - x^2$ найти точку M , в которой касательная параллельна хорде AB , если $A(1; 1)$ и $B(3; -3)$.

Решение. Функция $y = 2x - x^2$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x . По теореме Лагранжа между двумя значениями $a = 1$ и $b = 3$ существует значение $x = c$, удовлетворяющее равенству $y(b) - y(a) = (b - a)y'(c)$, где $y' = 2 - 2x$. Подставив значения a и b , получим $y(3) - y(1) = (3 - 1)y'(c)$; $(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3 - 1) \cdot (2 - 2c)$; $-4 = 4 \cdot (1 - c)$. Откуда $c = 2$, $y(2) = 0$. Таким образом, точка M имеет координаты $(2; 0)$.

Пример 6.49. Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sin 20^\circ$

Решение. Имеем $\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^5 - \dots$. Число

членов в этой части следует брать из условия $|R_{n+1}| < 10^{-3}$. Для $n = 3$ имеем

$$\text{оценку } |R_{n+1}| = \frac{1}{(3+1)!} \sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(3+1)\right) \left(\frac{\pi}{9}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 < 0,00063 < 10^{-3}$$

Следовательно, $\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0,342$.

Пример 6.50. Многочлен $y = x^6 - 2x^2 + 3x + 5$ разложить по целым положительным степеням бинома $x - 2$.

Решение. Находим все нетривиальные производные: $y' = 3x^2 - 4x + 3$, $y'' = 6x - 4$, $y''' = 6$, $y^{IV} = 0$.

Вычисляем значения функции и этих производных при $x = 2$

$$y(2) = 11, \quad y'(2) = 2, \quad y''(2) = 8, \quad y'''(2) = 6.$$

Согласно формуле Тейлора записываем

$$y = T_3(x) = 11 + 7(x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

Пример 6.51. Написать многочлен Тейлора третьей степени с центром в точке $x = 3$ для функции $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение. Согласно формуле Тейлора имеем

$$T_3(x) = c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2 + c_3(x - 3)^3, \quad \text{где } c_k = \frac{f^{(k)}(3)}{k!}.$$

Найдем производные

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}.$$

$$\text{Вычисляем } c_k: c_0 = f(3), \quad c_1 = f'(3) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{f''(3)}{2!} = \frac{-1}{64}, \quad c_3 = \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{1}{512}.$$

$$\text{В итоге получаем } T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) - \frac{1}{64}(x - 3)^2 + \frac{1}{512}(x - 3)^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 6.77.** Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на отрезке $[-1, 2]$.
- 6.78.** Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ на отрезке $[\pi/6, 5\pi/6]$.
- 6.79.** Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = 4^{\sin x}$ на отрезке $[0, \pi]$.
- 6.80.** Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на отрезке $[1, 2]$.
- 6.81.** Функция $y = (2 - x^4)/x^2$ принимает равные значения на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде на отрезке $[-1, 1]$ в нуль не обращается, и объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.
- 6.82.** Функция $y = |x|$ принимает равные значения на концах отрезка $[-a, a]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде на отрезке $[-a, a]$ в нуль не обращается, и объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.
- 6.83.** В какой точке дуги AB кривой $y = x^3 - 3x$ касательная параллельна хорде AB , если $A(0; 0)$, $B(3; 18)$?
- 6.84.** Написать формулу Лагранжа для функции $y = \sin 3x$ на отрезке $[x_1, x_2]$.
- 6.85.** Написать формулу Лагранжа для функции $y = x(1 - \ln x)$ на отрезке $[a, b]$.
- 6.86.** Написать формулу Лагранжа для функции $y = \arcsin 2x$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.
- 6.87.** Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = x^n$ на отрезке $[0, a]$ для $n > 0$, $a > 0$.
- 6.88.** Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$.
- 6.89.** Доказать с помощью формулы Лагранжа двойное неравенство

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b \leq a.$$

- 6.90.** Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенства

$$\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha} \quad \text{при условии } 0 < \beta \leq \alpha < \pi/2.$$

- 6.91.** Доказать с помощью формулы Лагранжа справедливость при $a > b$ неравенств $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$, если $n > 1$ и неравенств противоположного смысла, если $n < 1$.
- 6.92.** Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \Delta x$, вычислить приближенные значения данных выражений. Сравнить результат с табличным: а) $\arcsin 0,54$; б) $\lg 11$; в) $\lg 61$.
- 6.93.** Написать формулу Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \ln x$ на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$.
- 6.94.** Написать формулу Коши для функций $f(x) = e^{2x}$ и $g(x) = e^{1+x}$ на отрезке $[a, b]$.
- 6.95.** Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[1, 2]$.
- 6.96.** Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x + \cos x$ на отрезке $[0, \pi/2]$.
- 6.97.** Доказать, что если на отрезке $[a, b]$ имеет место соотношение $f'(x) \geq g'(x)$ и $g'(x)$ не обращается в нуль, то справедливо также соотношение $|\Delta f(x)| \geq |\Delta g(x)|$, где $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$, а x и $x + \Delta x$ – произвольные точки отрезка $[a, b]$.
- 6.98.** Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням двучлена $x - 4$, пользуясь формулой Тейлора.
- 6.99.** Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$, пользуясь формулой Тейлора.
- 6.100.** Разложить многочлен $x^{10} - 3x^5 + 1$ по степеням двучлена $x - 1$.
- 6.101.** Функцию $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ разложить по степеням x , пользуясь формулой Тейлора.
- 6.102.** $f(x)$ – многочлен четвертой степени. Зная, что $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{iv}(2) = 24$, вычислить $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

- 6.103.** Написать формулу Тейлора n -го порядка для функции $y = \frac{1}{x}$ при $a = -1$.
- 6.104.** Написать формулу Маклорена n -го порядка для функции $y = xe^x$.
- 6.105.** Написать формулу Тейлора n -го порядка для функции $y = \sqrt{x}$ при $a = 4$.
- 6.106.** Написать формулу Маклорена $2n$ -го порядка для функции $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- 6.107.** Написать формулу Тейлора $2n$ -го порядка для функции $y = x^3 \ln x$ при $a = 1$.
- 6.108.** Написать формулу Маклорена $2n$ -го порядка для функции $y = \sin^2 x$.
- 6.109.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \frac{x}{x-1}$ при $a = 2$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.
- 6.110.** Написать формулу Маклорена 2-го порядка для функции $y = \operatorname{tg} x$ и построить графики данной функции и ее многочлена Маклорена 2-й степени.
- 6.111.** Написать формулу Маклорена 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ и построить графики данной функции и ее многочлена Маклорена 3-й степени.
- 6.112.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $a = 1$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.
- 6.113.** Для функции $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ найти три первых члена разложения по формуле Тейлора при $a = 1$. Найти приближенно $f(1,03)$.
- 6.114.** Для функции $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^4 - x + 3$ найти три первых члена разложения по формуле Тейлора при $a = 2$. Найти приближенно $f(2,02)$ и $f(1,97)$.
- 6.115.** Проверить, что при вычислении значения функции e^x при $0 < x \leq 0,5$ по приближенной формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ допускаемая погрешность меньше 0,01. Пользуясь этим, найти приближенно $\sqrt{e}$.

6.7. Исследование функций

Интервалы монотонности и точки экстремума функции. Характер монотонности функции $y = f(x)$ на числовом интервале (a, b) определяется знаком ее производной на этом интервале: *если $f'(x) > 0$ при всех x из (a, b) , то функция возрастает на (a, b) , а если $f'(x) < 0$ при всех x из (a, b) , то функция убывает на (a, b) .* Достаточное условие постоянства функции на интервале – равенство нулю ее производной во всех точках этого интервала.

Пусть X – область определения функции $y = f(x)$ и $x_0 \in X$. Если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0) = M$ (или $f(x) \geq f(x_0) = m$), то число M (число m) называется *локальным максимумом (локальным минимумом)* функции $y = f(x)$, а сама точка x_0 – *точкой локального максимума (локального минимума)*. Оба числа объединяются термином «*экстремум функции*» (соответственно, говорят и о «*точках экстремума*»).

Необходимое условие экстремума. В точках локального экстремума функции ее производная либо обращается в нуль, либо не существует (такие точки называют *критическими*).

Точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$, называется *стационарной*.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, дифференцируема в окрестности точки x_0 за исключением, может быть, самой точки x_0 . Тогда если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с „плюса” на „минус”, то x_0 – точка *строгого максимума*, а если с „минуса” на „плюс”, то x_0 – точка *строгого минимума*. Если $f'(x)$ в окрестности точки x_0 не меняет знак, то экстремума нет.

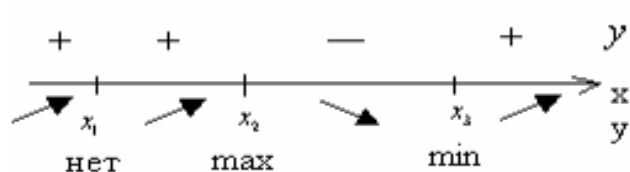


Рис. 6.7

Второе достаточное условие экстремума. Если в точке x_0 для функции $f(x)$ выполняются условия $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка ее локального экстремума: если $f''(x_0) > 0$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум; если $f''(x_0) < 0$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум.

Третье достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n – четное число ($n = 2m$), то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно – максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же n – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка x_0 не является точкой экстремума.

Вывод: проверить наличие экстремума в критической точке можно тремя способами:

- 1) убедиться в том, что $f'(x)$ меняет знак при $x = x_0$;
- 2) определить знак $f''(x_0)$;
- 3) если $f''(x_0) = 0$, исследовать порядок и знак производной, не обращающейся в 0 в рассматриваемой точке.

Пример 6.52. Пусть $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

Решение. Область определения функции

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

Найдем производную $f'(x) = \frac{x^2(x-9)}{(x^2-3)^2}$.

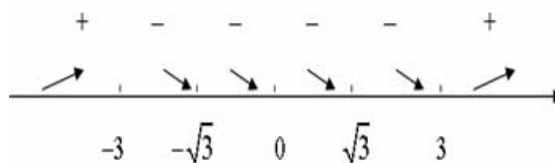


Рис. 6.8

Она обращается в нуль в точках $x_1 = 0$,

$x_2 = -3$, $x_3 = 3$. Эти точки (рис. 6.8) разбивают область определения $D(f)$ на интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$: $f'(x) > 0$ при $|x| > 3$. Отсюда получаем интервалы монотонности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точках x_1, x_2, x_3 . Поэтому согласно достаточным условиям существования экстремумов $x_2 = -3$ является точкой локального максимума; x_3 – точкой локального минимума; в точке $x_1 = 0$ экстремума нет.

Пример 6.53. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел. Ее производная имеет вид $f'(x) = 3 - 3x^2$ и также определена при всех x . Из уравнения $f'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ находим стационарные точки: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Определяем знаки производной на интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. Для этого можно ограничиться вычислением значения производной в промежуточных точках полученных интервалов: $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = 3 - 3 \cdot 2^2 = 3 - 12 < 0$, $f'(-2) = 3 - 3 \cdot (-2)^2 = 3 - 12 < 0$. Считаем также значения функции в найденных критических точках: $f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$, $f(1) = 3 - 1 = 2$. Данные собираем в таблицу, в последней строке которой указываем характер монотонности функции:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
Поведение $f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$
Вывод	Убыв.	min	Возр.	max	Убыв.

Итак, f возрастает на интервале $(-1; 1)$, убывает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, имеет точку локального минимума $x = -1$ (при этом $f_{\min} = f(-1) = -2$) и точку локального максимума $x = 1$ ($f_{\max} = f(1) = 2$).

Пример 6.54. Найти экстремумы функции $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел, кроме $x = -2$. Дифференцируя частное, получаем, что $f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1 \cdot x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$. Очевидно, что производная также определена при всех x , кроме $x = -2$ (критическая точка). Из уравнения $x^2 + 4x = 0$ находим стационарные точки $x_1 = -4$, $x_2 = 0$. Составляем, как и выше, таблицу для числовых интервалов и устанавливаем знаки производной (можно заметить, что знаменатель всегда положителен, а потому знак производной зависит только от числителя). Определяем также значения функции в найденных точках и собираем данные в таблицу.

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	Не сущ.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	Не сущ.	$\searrow$	0	$\nearrow$
Вывод	Возр.	max	Убыв.		Убыв.	min	Возр.

Таким образом, $x = -4$ – точка локального максимума и $f_{\max} = f(-4) = -8$, $x = 0$ – точка локального минимума ($f_{\min} = f(0) = 0$).

Следует обратить внимание на то, что данный пример иллюстрирует «локальность» экстремума (в частности, оказывается, что $f_{\max} < f_{\min}$).

Пример 6.55. Найти экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. При этом производная не определена там, где в нуль обращается знаменатель, т.е. при $x = 0$. Эта точка является критической. Стационарных точек нет, так как в числителе стоит постоянное число и потому дробь не обращается в нуль. Учитывая, что знак производной совпадает со знаком $\sqrt[3]{x}$, а потому и со знаком x , получаем, что слева от $x = 0$ (там, где $x < 0$) $f'(x) < 0$, а справа $f'(x) > 0$. Поэтому $x = 0$ – точка минимума исходной функции и $f_{\min} = f(0) = 0$.

Пример 6.56. Определить тип экстремума функции $y = x^3 - 3x + 7$ при $x = 1$.

Решение. Точка $x = 1$ является критической, так как $y' = 3x^2 - 3x = 0$ при $x = 1$. Так как при $x < 1$ $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$, то $x = 1$ – точка минимума. Можно было установить этот факт и с помощью второй производной $y'' = 6x - 3 = 3 > 0$ при $x = 1$. Следовательно, функция в этой точке достигает минимума.

Пример 6.57. Исследовать на экстремум функцию $y = x^5 + x^3$.

Решение. Видим, что $y' = 5x^4 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 3) = 0$ при $x = 0$.

При этом $y'' = 20x^3 + 6x = 0$ при $x = 0$, $y''' = 60x^2 + 6 = 6 \neq 0$ при $x = 0$. Порядок первой ненулевой производной в точке $x = 0$ равен нечетному числу 3, следовательно, функция не имеет экстремума в этой точке, а так как критическая точка единственна, то функция вообще не имеет экстремумов.

Наибольшее и наименьшее значение функции одного переменного на числовом отрезке. Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на отрезке $[a; b]$.

Если $f(x)$ непрерывна на этом отрезке, то существуют точки $x_1 \in [a; b]$ и $x_2 \in [a; b]$, в которых функция достигает своего максимального и минимального значений (на отрезке!).

Этими точками могут быть либо внутренние критические точки (из $(a; b)$), либо граничные. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на числовом отрезке придерживаются следующего алгоритма:

1. Найти первую производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки и выбрать те из них, которые попадают в отрезок $[a; b]$.

Характер экстремума не определять – в этом нет необходимости!

3. Сравнить значения функции в найденных точках и на границах (т.е. в точках $x=a$, $x=b$), выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.

Пример 6.58. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение. Находим первую производную $f'(x) = 3x^2 - 3$. Производная определена всюду. Найдем точки, в которых она обращается в нуль (стационарные точки): $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Обе точки попали в отрезок $[-2; 3]$.

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $[-2; 3]$, то на этом множестве она имеет наибольшее и наименьшее значения, которые достигаются либо на концах отрезка $[-2; 3]$, либо в стационарных точках. Вычисляем и сравниваем значения исходной функции в выбранных точках и на концах отрезка: $f(-1)=4$, $f(1)=0$, $f(-2)=0$, $f(3)=20$.

Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке равно 20, а наименьшее 0.

При решении задач практического характера пригодится следующее

Утверждение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на открытом числовом интервале $(a; b)$ и имеет на нем единственную стационарную точку x_0 . Если x_0 – точка локального максимума, то $\max_{x \in (a; b)} f(x) = f(x_0)$; если x_0 – точка локального минимума, то $\min_{x \in (a; b)} f(x) = f(x_0)$

Пример 6.59. Предприятие выпускает некий товар в объеме, превосходящем 1 кг. Прибыль (в у.е.) зависит от объема выпущенного товара (x) и определяются формулой $F(x) = -x^3 + 20x^2 - 13x - 4$. Найти объем производства товара, при котором прибыль будет максимальна.

Решение. В силу условий задачи функция, максимум которой нас интересует, определена на интервале $(1; +\infty)$. Найдем производную этой функции и приравняем к нулю $F'(x) = -3x^2 + 40x - 13 = 0$. Решив квадратное уравнение, получим два корня: $x_1 = 13$, $x_2 = 1/3$. Очевидно, что условию задачи удовлетворяет только первое значение ($13 > 1$, $1/3 < 1$). Сравнив знаки производной слева и справа от точки $x_1 = 13$, получим, что это точка максимума. Находим максимальное значение $F(x)$ на заданном интервале:

$$\max_{x \in (1; +\infty)} F(x) = F(13) = -13^3 + 20 \cdot 13^2 - 13 \cdot 13 - 4 = 1010.$$

Итак, при объеме производства в 13 единиц прибыль будет максимальной и составит 1010 у.е.

Направления выпуклости графика функции. Функция называется *выпуклой* на отрезке $[a, b]$, если ее график расположен *ниже* любой своей касательной на этом отрезке (рис. 6.9).

Функция называется *вогнутой* на отрезке $[a, b]$, если ее график расположен *выше* любой своей касательной на этом отрезке (рис. 6.10).

Если при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции* (рис. 6.11).

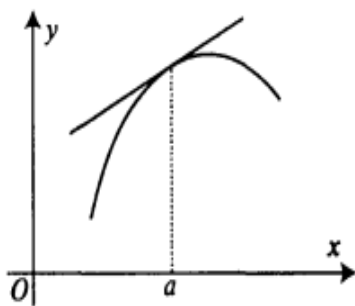


Рис. 6.9

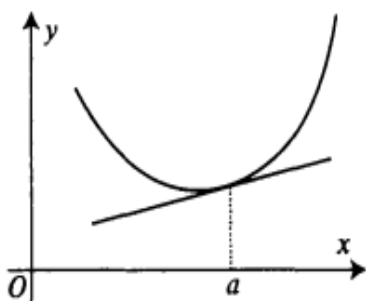


Рис. 6.10

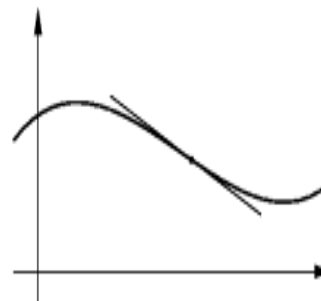


Рис. 6.11

У выпуклой функции угол наклона касательной уменьшается с ростом x (вторая производная меньше нуля), у вогнутой – увеличивается ($f''(x) > 0$).

При исследовании на выпуклость рекомендуется придерживаться следующего алгоритма:

1. Установить область определения функции $y = f(x)$.

2. Найти вторую производную $f''(x)$.

3. Выяснить, в каких точках из области определения вторая производная обращается в нуль (т.е. решить уравнение $f''(x) = 0$).

4. Установить знак второй производной на числовых интервалах, на которые найденные точки разбили область определения, и определить направления выпуклости (если $f''(x) < 0$, то график функции направлен выпуклостью вверх, т.е. $\cap$; если $f''(x) > 0$ - выпуклостью вниз, т.е. $\cup$).

5. Найти точки перегиба.

Пример 6.60. Найти направления выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^2 - x^4$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $f'(x) = 2x - 4x^3$, а вторая производная $f''(x) = 2 - 12x^2$ (она также определена при всех x). Из уравнения $2 - 12x^2 = 0$ находим точки $x_1 = 1/\sqrt{6}$, $x_2 = -1/\sqrt{6}$. Составляем таблицу для числовых интервалов, определяем знак второй производной и характер выпуклости графика заданной функции. Заметим, что $f(1/\sqrt{6}) = f(-1/\sqrt{6}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.

x	$(-\infty; -1/\sqrt{6})$	$-1/\sqrt{6}$	$(-1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6})$	$1/\sqrt{6}$	$(1/\sqrt{6}; +\infty)$
$f''(x)$	—	0	+	0	—
Вывод	График направлен выпуклостью вверх, $\cap$	$5/36$	График направлен выпуклостью вниз, $\cup$	$5/36$	График направлен выпуклостью вверх, $\cap$

Таким образом, точки $(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{5}{36})$ и $(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{5}{36})$ – точки перегиба.

Асимптоты. Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Рассмотрим три вида асимптот и определим способы их нахождения.

1. Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен.

2. Горизонтальные асимптоты – прямые вида $y = a$. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$ конечен, т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$.

3. Наклонные асимптоты – прямые вида $y = kx + b$. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ $f(x) \approx kx + b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$, если этот предел существует, конечен и не равен нулю. Однако даже при выполнении этих условий наклонная асимптота может не существовать. Для ее существования требуется, чтобы имелся конечный предел при $x \rightarrow \infty$ разности $f(x) - kx$. Этот предел будет равен b , так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$.

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$).

Пример 6.61. График функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (ось ординат) и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (ось абсцисс).

Пример 6.62. Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы 2-го рода в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, причем односторонние пределы в этих точках бесконечны. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ – вертикальные асимптоты графика.

Пример 6.63. Функция $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 1$, т.е. $x = 1$ – вертикальная асимптота. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, поэтому горизонтальных асимптот график не имеет.

Проверим наличие наклонных асимптот. Для этого вычислим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = 1 = k.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1 = b.$

Заметим, что оба предела не зависят от знака бесконечности, поэтому прямая $y = x + 1$ является асимптотой графика на обоих концах оси Ox .

Построение эскиза графика функции. Полное исследование функции проводится по следующему плану.

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.

2. Проверить наличие у исследуемой функции дополнительных свойств (четность, нечетность, периодичность). В случае, когда, например, функция является нечетной (четной), достаточно проводить исследования и строить эскиз графика при $x \geq 0$ с последующим симметричным его отображением (относительно начала координат для нечетной функции или относительно оси Oy – для четной).

3. Определить координаты точек пересечения графика функции с осями координат (для нахождения точки пересечения графика с осью Ox решаем уравнение $f(x) = 0$; для нахождения точки пересечения графика с осью Oy подставляем в аналитическое выражение функции значение $x = 0$).

4. Определить, где функция $f(x)$ является непрерывной; установить точки разрыва и найти $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$. Если хотя бы один из этих пределов равен бесконечности, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции.

5. Найти $f'(x)$ и с ее помощью определить интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения.

6. Найти $f''(x)$, с ее помощью определить направления выпуклости графика функции и найти точки перегиба.

7. Найти наклонные асимптоты графика. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где k и b находятся по формулам

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

(предполагается, что эти пределы существуют и конечны). В некоторых случаях эти пределы приходится вычислять отдельно при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

8. Собрать всю информацию и построить эскиз графика.

Пример 6.64. Провести полное исследование и построить график функции $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Решение. Придерживаемся предложенной схемы исследования.

1. Функция определена при всех вещественных x , кроме $x = -2$.

2. Область определения не симметрична относительно начала координат, поэтому свойством четности или нечетности функция не обладает (заметим, что в случае симметричности области определения необходимо проверить выполнение одного из равенств: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$). Исходная функция не является и периодической.

3. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим, что график функции пересекает оси координат в точке $(0, 0)$.

4. В силу свойств непрерывных функций функция $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ непрерывна там, где определена, т.е. при всех вещественных x , кроме $x = -2$.

Поскольку $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x+2} = \infty$, то $x = -2$ – точка разрыва второго рода, а прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика. Кроме того, заметим, что $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$.

5. Необходимые расчеты, связанные с исследованием первой производной, были проведены при решении примера 6.54. В частности, была найдена первая производная $f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$, определены точки экстремума и значения функции в них: $x = -4$ – точка максимума, графику принадлежит точка $(-4, f(-4))$, т.е. $(-4; -8)$; $x = -2$ – точка минимума, графику принадлежит точка $(0, f(0))$, т.е. $(0; 0)$. Кроме того, из таблицы следовало, что $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -4)$ и $(0; +\infty)$, а убывает на интервалах $(-4; -2)$ и $(-2; 0)$.

6. Найдем теперь вторую производную

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \right)' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2 + 4x)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{2(x+2)((x+2)^2 - x^2 - 4x)}{(x+2)^4} = \frac{2 \cdot 4}{(x+2)^3}.$$

Очевидно, что знак второй производной зависит только от знака знаменателя. При $x > -2$ $f''(x) > 0$ и график направлен выпуклостью вниз, а при $x < -2$ $f''(x) < 0$ и график направлен выпуклостью вверх.

7. Найдем теперь уравнение наклонной асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x+2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1 + \frac{2}{x})} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+2} = -2.$$

Таким образом, прямая $y = 1 \cdot x - 2 = x - 2$ – наклонная асимптота.

8. На координатной плоскости изображаем штриховыми линиями все асимптоты, отмечаем все точки пересечения графика с осями координат и все точки экстремума. В соответствии с этими пометками и данными о промежутках монотонности и выпуклости рисуем эскиз графика функции (рис. 6.12).

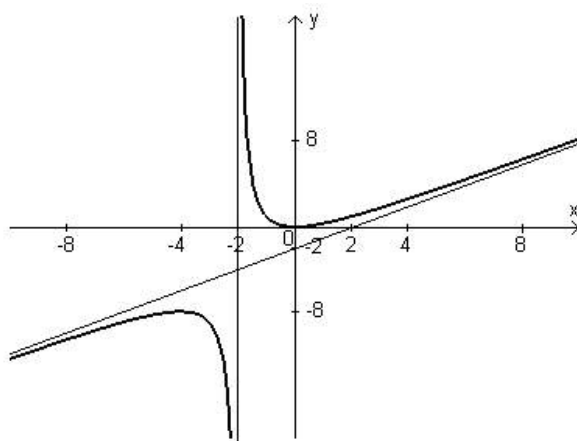


Рис. 6.12

Задачи для самостоятельного решения

6.116. Найти интервалы монотонности и локальные экстремумы функций:

1) $f(x) = x - \ln x$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4 + 5$;

3) $f(x) = xe^{3x}$;

4) $f(x) = xe^{-x}$;

$$5) f(x) = x - x\sqrt{x};$$

$$6) f(x) = (2 - x)(x + 1)^2;$$

$$7) f(x) = x^3\sqrt{(x - 2)^2};$$

$$8) f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 72;$$

$$9) f(x) = x^3\sqrt{x - 1};$$

$$10) f(x) = x \ln x^2;$$

$$11) y = x^6 + x^4;$$

$$12) y = x^4 e^{2x}.$$

6.117. Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функций:

$$1) f(x) = \frac{x^2}{1 + x};$$

$$2) f(x) = \frac{(x + 1)^3}{x - 1};$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3};$$

$$4) f(x) = x + \frac{1}{x};$$

$$5) f(x) = x + \ln(1 - 5x);$$

$$6) f(x) = x e^{-x};$$

$$7) f(x) = \frac{\ln x}{x};$$

$$8) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$9) f(x) = 2x^2 - x^4;$$

$$10) f(x) = \frac{x^3}{(2 - x)^2};$$

$$11) f(x) = \frac{x - 1}{x + 1};$$

$$12) f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

6.118. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков:

$$1) y = x^2 - 4x - (x - 2)\ln(x - 1), \quad x_0 = 2;$$

$$2) y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2), \quad x_0 = 2;$$

$$3) y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, \quad x_0 = 2;$$

$$4) y = 2\ln(x + 1) - 2x + x^2 + 1, \quad x_0 = 0;$$

$$5) y = 2x - x^2 - 2\cos(x - 1), \quad x_0 = 1;$$

$$6) y = \cos^2(x + 1) + x^2 + 2x, \quad x_0 = -1;$$

$$7) y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1;$$

$$8) y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}, \quad x_0 = -2.$$

6.119. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $[2;4]$; 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $[1/2;2]$;

3) $f(x) = 4\sqrt{x} - x - 5$, $[0;9]$; 4) $f(x) = \sqrt{3}x + \cos x$, $[0; \pi / 2]$.

6.120. Определить направления выпуклости и точки перегиба графика данной функции:

1) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 5$; 2) $f(x) = (x - 3)(x - 5)^2$;

3) $f(x) = e^{-x^2}$; 4) $f(x) = (x^2 - 1)^3$;

5) $f(x) = (x + 1)e^{-x}$; 6) $f(x) = 36x(x - 1)^3$.

6.121. Провести полное исследование (включающее определение асимптот) и построить график данной функции:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$; 2) $f(x) = \frac{4}{4 - x^2}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x(x + 2)}$; 4) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$;

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 25}$; 6) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$;

7) $f(x) = \frac{1 - x^2}{4 - x^2}$; 8) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$.

6.122. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = (x^3 + 4) / x^2$; 2) $y = (x^2 - x + 1) / (x - 1)$;

3) $y = 2 / (x^2 + 2x)$; 4) $y = 4x^2 / (3 + x^2)$;

5) $y = 12x / (9 + x^2)$; 6) $y = (x^2 - 3x + 3) / (x - 1)$.

Решить следующие задачи на экстремум.

6.133. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

6.124. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

6.125. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

6.126. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3 , причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

6.127. Из углов квадратного листа картона размером $18 \times 18 \text{ см}^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 6.13), получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?

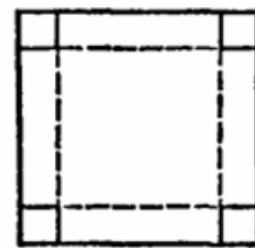


Рис. 6.13

6.128. Объем правильной треугольной призмы равен u . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

6.129. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме v каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

6.130. Найти соотношение между радиусом R и высотой h цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

6.131. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см . Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

6.132. Из круга вырезан сектор с центральным углом α . Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

6.133. Периметр равнобедренного треугольника равен $2r$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

6.134. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

6.135. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м соответственно. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

6.136. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может идти со скоростью 5 км/ч, а на веслах – 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

6.137. Доказать справедливость неравенств:

- 1) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1);$
- 2) $e^x > 1 + x \quad (x \neq 0);$
- 3) $x > \ln(1 + x) \quad (x > 0);$
- 4) $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x > 1);$
- 5) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2);$
- 6) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \quad (0 < x < \pi/2);$
- 7) $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \alpha > 1;$
- 8) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad (x > 0).$

6.8. Предельный анализ в экономике

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд предельных величин. Перечислим лишь некоторые: предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению и т.д. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

Экономический смысл производной и дифференциала. Пусть $y = f(x)$ определена на промежутке X . Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собой среднюю скорость изменения функции на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, имеющем протяженность Δx .

Именно этим показателем оценивается динамика роста в среднестатистических отчетах за период – месяц, квартал, год и т.д. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует)

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции в точке x_0 характеризует мгновенный прирост или скорость изменения зависимой переменной y (функции $y = f(x)$) в точке x_0 . В экономике производная отражает динамику роста экономических показателей.

При малых Δx прирост функции можно считать линейным и приблизительно равным ее дифференциалу

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = dy.$$

Так, прилагаемая к итоговому годовому отчету диаграмма помесячного или понедельного роста представляет собой ломаную линию.

Пример 6.65. Стоимость определенной продукции на 1 руб. основных производственных фондов (фондоотдача) y зависит от коэффициента сменности оборудования x (характеризующего степень равномерности использования оборудования по сменам) следующим образом: $y = \sqrt{x} + c$, где c – постоянная величина. Найти: а) скорость изменения фондоотдачи при коэффициенте сменности оборудования $x=1,35$; б) функцию этого изменения, если $c = 0$, полагая, что некоторое время фондоотдача будет меняться с постоянной скоростью.

Решение: а) скорость изменения фондоотдачи определяется производной $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, при $x=1,35$ $y'(1,35) = \frac{1}{2\sqrt{1,35}} \approx 0,43$, т.е. при изменении коэффициента сменности на единицу фондоотдача увеличивается приблизительно на 0,43 руб.;

б) фондоотдача y будет меняться с постоянной скоростью $v = y'(1,35) = 0,43$ в случае линейной зависимости, т.е. по касательной к кривой в точке $x_0 = 1,35$. Уравнение касательной имеет вид $y - 1,16 = 0,43 \cdot (x - 1,35)$, где $y(1,35) = 1,16$. После преобразования имеем уравнение фондоотдачи $y = 0,43x + 0,58$.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t . Необходимо найти производительность труда в момент t_0 . За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменяется на величину $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$. Тогда средняя производительность труда за время Δt будет равна отношению $Z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Определим производительность труда в момент времени t_0 как предельное значение средней производительности $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. $Z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Таким образом, производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Темпом изменения функции называется величина $T_y = \frac{y'(x)}{y} = (\ln y)'$.

Эта величина отражает относительную скорость изменения показателя.

Пример 6.66. Производительность труда бригады рабочих может быть описана уравнением $y = -2,5t^2 + 15t + 100$, $1 \leq t \leq 8$ – рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при $t = 2$, $t = 7$.

Решение. Скорость изменения производительности труда выражается производной $y' = -5t + 15$, $y'(2) = 5$ ед./ч, $y'(7) = -20$ ед./ч.

Темп изменения (относительная скорость изменения) производительности

труда выражается формулой $T_y = \frac{y'}{y} = \frac{-5t + 15}{-2,5t + 15t + 100}$,

$$T_y(t=2) = 1/24 \text{ (ед./ч)}, \quad T_y(t=7) = -8/33 \text{ (ед./ч)}.$$

Знаки „плюс” и „минус” показывают, что в начале смены наблюдалось увеличение производительности, а в конце – снижение.

Предельные издержки производства

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной. Пусть $K=K(x)$ функция издержек производства, где x – объем выпускаемой продукции, пусть Δx – прирост продукции, ему будет соответствовать $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ – приращение издержек производства.

Величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть *среднее приращение издержек производства на единицу*

продукции. Найдем *предельные издержки* $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = K'(x)$.

Величина $K'(x)$ характеризует приближенно дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции. Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо, электроэнергию и т.п.). Аналогично могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность и другие предельные величины.

Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величина), а процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Пример 6.67. Пусть $K(x) = 50x - 0,05x^3$ (ден.ед.) функция издержек производства. Определить средние и предельные издержки, если объем составляет 10 условных единиц.

Решение. Средние издержки

$$\frac{K(x)}{x} = \frac{50x - 0,05x^3}{x} = 50 - 0,05x^2 \text{ при } x=10 \quad \frac{K(10)}{10} = 45 \text{ (ден.ед.)}.$$

Предельные издержки

$$K'(x) = 50 - 0,15x^2, \quad K'(x) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35 \text{ (ден.ед.)}.$$

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден.ед.

Эластичность функции. Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению аргумента x при $\Delta x \rightarrow 0$

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'.$$

Эластичность функции показывает приблизительно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной на 1%.

Свойства эластичности

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций

$$E_x(u \times v) = E_x(u) + E_x(v), \quad E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Если эластичность функции $y = f(x)$ тождественно равна нулю, то $y = C = \text{const}$.

4. Если эластичность $E_x(y)$ не зависит от точки x , то $y = Cx^\alpha$, где C – некоторая константа.

Если $|E_x(y)| > 1$, то изменению переменной x на 1% соответствует изменение функции более чем на 1%, то говорят, что функция эластична относительно x .

Если $|E_x(y)| = 1$, то функция нейтральна, т.е. изменение x на 1% приводит к изменению $y(x)$ на 1%.

Если $|E_x(y)| < 1$, функция неэластична, при изменении x на 1% функция $y(x)$ изменяется менее чем на 1%.

Пример 6.68 (Эластичность спроса относительно цены). Пусть функция спроса на некоторый вид товара имеет вид $q = 2e^{-2p}$, где p – цена товара (ден.ед.). Определим эластичность спроса при цене товара $p=3$ (ден.ед.)

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{2e^{-2p}} \cdot (2e^{-2p})' = -2p, \quad E_{p=3}(q) = -2 \cdot 3 = -6.$$

Это означает, что при цене 3(ден.ед.) повышение цены на 1% вызовет снижение спроса на 6%, т.е. спрос эластичен.

Пример 6.69. (Эластичность спроса относительно дохода). Пусть спрос на данный товар в зависимости от дохода потребителей выражается формулой $q = \sqrt{r}$, где r – доход. Тогда эластичность спроса относительно дохода есть

$$E_r(q) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{r}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Это означает, что повышение дохода потребителей на 1% вызовет повышение спроса на товар на 0,5%.

Пример 6.70. (Эластичность предложения относительно цены). Пусть $S = S(p)$ есть функция предложения (товара, труда, услуг) в зависимости от цены p , тогда $E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp}$ называется эластичностью предложения от цены.

Пусть $S(p) = \frac{3 \cdot (4 + p^2)}{1 + 8p}$. Найти эластичность предложения при цене товара $p = 4$ (ден.ед.).

Решение. $E_p(s) = \frac{p \cdot (1 + 8p)}{3 \cdot (4 + p^2)} \cdot \left(\frac{3 \cdot (4 + p^2)}{1 + 8p} \right)' = \frac{2p \cdot (p + 4p^2 - 16)}{(4 + p^2) \cdot (1 + 8p)}$. При $p = 4$

$E_p(s) = 0,7$, т.е. прирост предложения, соответствующий увеличению цены $p = 4$ (ден.ед.) на 1% составляет 0,7%.

Экстремум функции. Расчет максимальной прибыли, выбор оптимального размера партии и цены единицы продукции при оптовой торговле – это все примеры задач на экстремум, решаемых методами математического анализа. Рассмотрим подробнее несколько примеров.

Максимизация прибыли. Пусть x – количество реализованной продукции, $R(x)$ – функция дохода, $C(x)$ – функция затрат на производство продукции. В реальности вид этих функций зависит в первую очередь от способа производства, организации инфраструктуры и т.п. Прибыль от реализации произведенной продукции находится по формуле: $\Pi(x) = R(x) - C(x)$. В микроэкономике известно утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны:

$$R'(x) = C'(x).$$

Пример 6.71. Производитель реализует свою продукцию по цене $p=150$ (ден.ед.) за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x) = 6x + 3x^3$. Найти оптимальный объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

Решение. Пусть объем выпускаемой продукции x . Составим функцию прибыли $\Pi(x) = 150x - (6x + 3x^3)$, где px – доход от реализуемой продукции.

1. Найдем $C'(x) = 150 - (6 + 9x^2) = 144 - 9x^2$.

2. Найдем критические точки $C'(x) = 144 - 9x^2 = 0$, $x_1 = 4$ ($x_2 = -4 < 0$ – не рассматриваем по смыслу задачи).

3. Найдем $C''(x) = -18x$ и определим знак второй производной при $x=4$. Так как $C''(4) = -72 < 0$, то при $x=4$ прибыль $C(x)$ максимальна.

4. Находим максимум функции $C_{\max} = C(4) = 150 \cdot 4 - (6 \cdot 4 + 3 \cdot 64) = 384$ (ден.ед.).

Пример 6.72. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под 50% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 100%, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в $p\%$. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

Решение. Пусть x (млрд руб.) инвестируется в производство, а $(1-x)$ – размещается под проценты. Тогда размещенный капитал станет равным $(1-x) \cdot (1 + \frac{50}{100}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot x$, а капитал, вложенный в производство, $x \cdot (1 + \frac{100}{100}) = 2x$. Издержки составят ax^2 , т.е. прибыль от вложения в производство $C = 2x - ax^2$.

Налоги составят $(2x - ax^2) \cdot \frac{p}{100}$, т.е. чистая прибыль окажется равной $(1 - \frac{p}{100}) \cdot (2x - ax^2)$.

Общая сумма через год составит

$$A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + (1 - \frac{p}{100}) \cdot (2x - ax^2) = \frac{3}{2} + \left[2(1 - \frac{p}{100}) - \frac{3}{2} \right] \cdot x - ax^2 \cdot (1 - \frac{p}{100})$$

и требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке $[0; 1]$.

$$\text{Имеем } A'(x) = 2(1 - 0,01p) - \frac{3}{2} - 2a \cdot (1 - 0,01p) \cdot x.$$

$$A'(x) = 0 \text{ при } x_0 = \frac{2 \cdot (1 - 0,01p) - 3/2}{2a \cdot (1 - 0,01p)}, \quad A''(x) = -2a(1 - \frac{p}{100}) < 0, \text{ т.е., согласно}$$

второму достаточному условию экстремума, x_0 – точка максимума. Чтобы x_0 принадлежало отрезку $[0; 1]$, необходимо выполнение условия

$0 < 2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1$ или $p < 25$. Таким образом, если $p > 25$, то выгоднее ничего не вкладывать в производство и разместить весь капитал в банк. Если $p < 25$, то можно показать, что при $x = x_0$

$$A(x_0) = \frac{\left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1 - \frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

т.е. вложение в производство является более выгодным, чем чистое размещение под проценты.

Определение оптимального размера партии. Рассмотрим случай выпуска одного вида продукции в общем виде.

Пример 6.73. Пусть C_1 – затраты на хранение одного изделия в единицу времени; C_2 – общие затраты на производство одной партии; x – число изделий в партии; T – продолжительность производства одной партии. Требуется определить размер партии x , при котором обработка N изделий ($N > n$) за время t потребует минимальных затрат.

Решение. Составим функцию $y = f(x)$, выражающую зависимость суммарных затрат y от размера партии x . Общее число партий $\frac{N}{x}$, тогда

общие затраты на производство составят $C_2 \frac{N}{x}$. При определении затрат на хранение будем исходить из того, что партия изделий по мере изготовления поступает на хранение и поэтому за период ее изготовления T хранится в среднем $\frac{x}{2}$ изделий. Таким образом, затраты на хранение одной партии

составляет $C_1 \frac{x}{2} T$. Суммарные затраты на хранение составят $C_1 \frac{x}{2} T \frac{N}{x} = \frac{C_1 TN}{2}$.

Суммарные затраты на производство и хранение будут составлять.

$y = C_2 \frac{N}{x} + \frac{C_1}{2} TN$. Величины x и T взаимозависимые, очевидно, что

$\frac{t}{T} = \frac{N}{x} \Rightarrow NT = xt$. Подставляя в функцию y , получим $y = \frac{C_2 N}{x} + \frac{C_1 t}{2} x$.

Исследуем функцию $y = f(x)$ на минимум (C_1, C_2, N и t – заданные величины) как функцию вещественного аргумента x .

$$y' = -\frac{C_2 N}{x^2} + \frac{C_1 t}{2}, \quad y' = 0, \quad -\frac{C_2 N}{x^2} + \frac{C_1 t}{2} = 0, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2N}{t} \cdot \frac{C_2}{C_1}}.$$

$y'' = \frac{2C_2 N}{x^3} > 0$, при найденном x_0 функция достигает минимума. Итак, оп-

тимальным размером партии, минимизирующим суммарные затраты, будет

$$x_0 = \sqrt{\frac{2NC_2}{t \cdot C_1}} \text{ (точнее, одно из ближайших к нему целых чисел).}$$

Оптимальный размер капиталовложений.

Пример 6.74. Пусть планируется строительство и эксплуатация некоторого объекта, срок эксплуатации T лет. Первоначальные капиталовложения составляют K руб., а последующие ежегодные эксплуатационные расходы – x руб. Предположим, что первоначальные капиталовложения зависят от последующих ежегодных расходов $K = f(x)$. Определить оптимальный размер первоначальных капиталовложений, при котором суммарные расходы достигают минимума.

Решение. Суммарные расходы по строительству и эксплуатации данного объекта за T лет составят $y = K + x \cdot T = f(x) + xT$.

Исследуем функцию на минимум: $y' = K' + T = f'(x) + T$, $y' = 0$, $K' + T = 0$, $K' = -T$ – из уравнения следует, что $K' < 0$, т.е. начальные вложения убывают с ростом ежегодных эксплуатационных расходов. Если $K'' > 0$, то кривая $K = f(x)$ вогнутая, т.е. если с ростом годовых эксплуатационных расходов уменьшение начальных капиталовложений происходит с замедлением, то найденное значение x^* из уравнения $K' = -T$ определяет минимальные суммарные затраты $y_{\min}^* = f(x^*) + x^*T$.

Задачи для самостоятельного решения

- 6.138.** Зависимость управленческих расходов R от количества произведенной продукции P определяется формулой $R = aP + \frac{b}{c + p} + d$. При каком количестве выпущенной продукции управленческие расходы будут минимальны?
- а) $a = 3, b = 1452, c = 16, d = 17$; б) $a = 2, b = 2178, c = 16, d = 6$;
в) $a = 3, b = 588, c = 10, d = 3$; г) $a = 2, b = 1458, c = 20, d = 21$;
- 6.139.** Издержки производства $K(x) = 100x - \frac{1}{30}x^3$ (ден.ед.). Определить предельные издержки при объемах $x = 10, 20, 30$ единиц продукции.
- 6.140.** Себестоимость продукции y связана с объемом продукции x уравнением $y = 6 \ln(1+3x)$. Определить среднюю и предельную себестоимость продукции при объеме продукции 10 ед.
- 6.141.** Задана функция полных затрат в виде $y = x^3 - 2x^2$. При каком объеме производства x предельные и средние затраты совпадают?
- 6.142.** Зависимость между объемом выпуска готовой продукции однотипных предприятий y (млн руб.) и объемом производственных фондов x (млн руб.) выражается уравнением $y = 0,6x - 4$. Найти коэффициент эластичности выпуска продукции для предприятий, имеющих фонды 40 млн руб.
- 6.143.** Функция цен спроса $p = \frac{500}{q + 6}$ (ден.ед.), а суммарная выручка $U = \frac{500q}{q + 6}$.
Определить функции темпа роста выручки и эластичности относительно спроса.
- 6.144.** Себестоимость производства транзисторов описывается функцией $y = 0,01x^2 - 0,5x + 12, \quad 5 \leq x \leq 50$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс.шт.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 тыс.ед. и 40 тыс.ед. продукции.
- 6.145.** В среднем расход на питание y в зависимости от годового дохода x на душу населения описывается функцией $y = \sqrt{2x + 40}$. Вычислить:
а) скорость изменения расходов на питание при годовом доходе 12 000 000 руб. и 25 000 000 руб.; б) полагая, что некоторое время расход на питание будет изменяться с постоянной скоростью, найти функцию этого изменения.

- 6.146.** Функция цен спроса $p = \left(\frac{5}{q}\right)^2$ (ден.ед.). Определить виды функций спроса q (усл.ед.) и темпа роста q , а также вычислить эластичность спроса относительно цены.
- 6.147.** Предложение Z (усл.ед.) масла есть функция цены x (ден.ед.): $Z = a\sqrt{x}$, где a – постоянная. Определить эластичность предложения относительно цены.
- 6.148.** Функция предложения некоторого товара $S = \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p}$ (усл.ед.), а функция спроса $Q = \frac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}$ (усл.ед.). Определить цену, при которой спрос и предложение уравниваются, а также эластичность предложения для этой цены.
- 6.149.** Функция полных издержек $K = x^3 - 6x^2 + 15x$ (ден.ед.). Определить, при каких значениях x (усл.ед.) эластичность полных затрат $E_x(K) > 1$.
- 6.150.** Функция спроса от цены имеет вид $q = 100 - p$ (усл.ед.). Определить, для каких цен спрос эластичен.
- 6.151.** Функция спроса $q = \frac{500}{p + 4}$ (усл.ед.). Определить функции темпа роста и эластичности спроса относительно цены.
- 6.152.** Функция цен спроса на некоторый товар $p = \frac{600}{q + 20}$. Определить функцию спроса от цены и те ее значения, при которых спрос относительно цены эластичен.
- 6.153.** Себестоимость продукции C (тыс.руб.) описывается функцией.
 $C(x) = 0,00025x^3 + 0,0025x^2 + 0,58x + 19$, $15 \leq x \leq 50$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц. (тыс.ед.). Определить, при каком количестве продукции в месяц прибыль будет максимальной, если продукция реализуется по цене 2,1 руб. за 1 тыс.ед. Вычислить величину прибыли.
- 6.154.** Общая сумма расходов на перевозку и хранение деталей на складе определяется формулой $C(x) = S \cdot q(x) + bx/2$, где x – размер партии деталей, S – затраты на перевозку одной партии, $bx/2$ – затраты на хранение половины партии (условно средний запас). Определить оптимальный размер партии, при котором расходы будут минимальными. Вычислить это значение при $q=50$, $S=0,2$ руб., $b=0,1$ руб.

- 6.155.** Загрузка базы товаром и подготовка к его приему обходятся базе независимо от количества привозимого товара в $p = 100$ руб. Определить объем товара, который должна заказывать база, и интервалы его поставки, чтобы суточные затраты были минимальны. Очередной заказ поступает в момент израсходования предыдущего. При составлении функции суточных затрат учесть, что $T = g/r$.
- 6.156.** Зависимость расхода автомобилем горючего от скорости движения задается функцией $y = 20 - 0,4x + 0,005x^2$, где y – расход горючего (л) на 100 км пути, x – скорость автомобиля (км/ч). Как изменяется расход горючего в зависимости от скорости движения автомобиля?
- 6.157.** Трудоемкость проектирования микросхем $y(x)$ характеризуется зависимостью $y = 0,04x^2 - 1,84x + 25,1$; x – число элементов в микросхеме, $10 \leq x \leq 40$. Определить число элементов в микросхеме, при котором трудоемкость ее проектирования будет минимальной, и величину соответствующей трудоемкости. Определить оптимальный размер партии и длительность производного цикла, минимизирующего суммарные затраты из следующих условий: а) необходимо обеспечить суммарную годовую потребность в 1000 изделий; б) удельные затраты на хранение единицы изделия в течение месяца равны 0,5 руб.; в) производственные затраты на изготовление одной партии равны 10 руб.
- 6.158.** Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 30Q - 0,08Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции: а) $Q = 5$ ед.; б) $Q = 10$ ед.
- 6.159.** Функции долговременного спроса D и предложения S от цены p на мировом рынке нефти имеют вид $D = 30 - 0,9p$ и $S = 16 + 1,2p$ соответственно. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены. Как изменятся равновесная цена и эластичность спроса при уменьшении предложения нефти на рынке на 25%?
- 6.160.** Функция спроса D и предложения S от цены выражаются, соответственно, уравнениями $D = 9 - p$, $S = 1 + p$. Найти эластичность спроса и предложения при равновесной цене, а также изменение дохода в процентах при увеличении цены на 10%.

Ответы

Глава 1

$$1.2. \text{ а) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; \text{ б) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -8 & 17 & -7 \\ 6 & -7 & 34 \end{bmatrix}, A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & -11 \\ -11 & 29 \end{bmatrix}; \text{ г) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -6 \\ -11 & 17 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}, A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 3 \\ -12 & 16 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \text{ е) } A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ -10 & 25 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}, A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}.$$

$$1.3. \text{ а) } B \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 4 \\ 1 & 17 & 10 \end{bmatrix}, C \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -13 & 4 & -4 \end{bmatrix}; \text{ б) } B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 21 & 15 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}, B \cdot C = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 13 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A \cdot C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -4 \end{bmatrix}, B \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 8 & -4 & -6 \end{bmatrix}; \text{ г) } B \cdot A = \begin{bmatrix} 13 & 3 \end{bmatrix}, A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \\ 12 & -22 & 17 \end{bmatrix},$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}; \text{ д) } A \cdot B = \begin{bmatrix} 14 & -3 \end{bmatrix}, A \cdot C = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}. \quad 1.4. \text{ при любых } a \in \mathbb{R}.$$

$$1.5. \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -\frac{b_1}{3} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}. \quad 1.6. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad 1.7. \begin{bmatrix} 12 & 5 & 7 \\ 19 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad 1.8. \alpha = -4, \beta = -2.$$

$$1.9. \text{ а) } 7; \text{ б) } 32; \text{ в) } 0; \text{ г) } 1. \quad 1.10. \text{ а) } 36; \text{ б) } 7; \text{ в) } -133; \text{ г) } \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta).$$

$$1.11. \text{ а) } -45; \text{ б) } 18; \text{ в) } -18; \text{ г) } -3. \quad 1.12. \text{ а) } 10; \text{ б) } 65; \text{ в) } 13; \text{ г) } 15. \quad 1.13. \text{ а) } -43;$$

$$\text{б) } -64; \text{ в) } 47. \quad 1.14. \text{ а) } -2 \pm 2\sqrt{2}; \text{ б) } -4; \text{ в) } -2. \quad 1.15. \text{ а) } x = 3\frac{1}{4}, y = 0, z = 5\frac{3}{4};$$

$$\text{б) } x = 1, y = -2, z = -3; \quad \text{в) } x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}, z = -\frac{3}{8}. \quad 1.16. \text{ а) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 \\ \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}; \quad \text{е) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{ж) } A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{з) } A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{1.17.} \quad \lambda = 3. \quad \mathbf{1.18.} \quad \text{а) } (2; -1; -2); \quad \text{б) } (0,5; 2; -0,5);$$

$$\text{в) } (3; -2; -4). \quad \mathbf{1.19.} \quad \text{а) } X = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) нет решений}; \quad \text{в) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{г) нет}$$

решений. **1.20.** а) (1;0;2); б) (1;1;7); в) (-8;-4;-13); г) система несовместна;

$$\text{д) } (2;1;3); \quad \text{е) } \left(-\frac{6}{7} - 1\frac{1}{7}x_3, -1\frac{4}{7} - 1\frac{3}{7}x_3, x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{1.21.} \quad \text{а) } (1; -1; 1; -1);$$

$$\text{б) } (1,5x_4 + 5,5; -7,5 - 2,5x_4; 8 + 2x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}; \quad \text{в) } (0; 0; 1; 0); \quad \text{г) } (0; 4 - 2x_4; 3 - 2x_4; x_4),$$

$$x_4 \in \mathbb{R}; \quad \text{д) } \left(1\frac{1}{23}; \frac{14}{23}; \frac{11}{23}; -\frac{11}{23} \right); \quad \text{е) } (8x_3 - 7x_4 - 9; 5x_4 - 6x_3 + 7; x_3; x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R};$$

$$\text{ж) } (x_1; 2x_1 - 2x_4 + 4; 3 - 2x_4; x_4), x_1, x_4 \in \mathbb{R}; \quad \text{з) } \left(2 + 2x_4; \frac{4 - x_4}{5}; \frac{11 + 16x_4}{5}; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R}.$$

1.22. а) 1; б) 2; в) 2; г) 3; д) 2; е) 2; ж) 4; з) 4. **1.23.** единственное решение;

б) бесконечно много решений; в) несовместна; г) несовместна; д) единственное решение; е) бесконечно много решений.

Глава 2

$$\mathbf{2.2.} \quad \text{а) } \overline{CB} = -3\vec{q}; \overline{CB} = -4\vec{p}; \overline{AC} = 4\vec{p} + 3\vec{q}; \quad \text{б) } \overline{AM} = 4\vec{p} + 1,5\vec{q}; \overline{AN} = 3\vec{q} + 2\vec{p};$$

$$\overline{MN} = 1,5 - 2\vec{p}. \quad \mathbf{2.3.} \quad \text{а) } \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \text{б) } \vec{a} = 2\vec{c} - \vec{b}. \quad \mathbf{2.4.} \quad \vec{c} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\mathbf{2.5.} \quad \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}. \quad \mathbf{2.6.} \quad \overline{OA} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}; \quad \overline{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}; \quad \overline{OC} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

$$\mathbf{2.7.} \quad \overline{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \quad \overline{A_1C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}; \quad \overline{BD_1} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}; \quad \overline{B_1D} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}.$$

$$\mathbf{2.8.} \quad \overline{OA_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}; \quad \overline{OB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}; \quad \overline{OC_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}; \quad \overline{OD_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}.$$

$$\mathbf{2.9.} \quad x = -1. \quad \mathbf{2.11.} \quad C(10;4). \quad \mathbf{2.12.} \quad C(7;-2). \quad \mathbf{2.13.} \quad x = 5. \quad \mathbf{2.14.} \quad 7; \sqrt{69}. \quad \mathbf{2.15.} \quad 7.$$

$$\mathbf{2.16.} \quad \text{а) } (5;7,5;-2,5); \quad \text{б) } (4;6;-2); (6;9;-3). \quad \mathbf{2.17.} \quad 5. \quad \mathbf{2.18.} \quad B(11;3;1). \quad \mathbf{2.19.}$$

$$\text{а) } \vec{a} = -20\vec{p} + 11\vec{q}; \quad \text{б) } \vec{a} = 6\vec{p} - 7\vec{q}. \quad \mathbf{2.20.} \quad \text{а) } \vec{a} = -2\vec{p} + 4\vec{q} + \vec{r}; \quad \text{б) } \vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}.$$

2.21. $|\overline{OM}| = 5\sqrt{2}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos \beta = \frac{-3\sqrt{2}}{10}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.22.** $Pr_{Ox} \overline{AB} = 2$,
 $Pr_{Oy} \overline{AB} = -6$, $Pr_{Oz} \overline{AB} = 3$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{-6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{3}{7}$.

2.23. $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$. **2.24.** а) 120° ; б) $(1; -1; \sqrt{2})$. **2.25.** $(2; 2; 2)$. **2.26.** 10.

2.27. а) 3; б) -10 ; в) $2\sqrt{7}$. **2.28.** 5. **2.29.** 3. **2.30.** $\sqrt{7}$. **2.31.** $\sqrt{7}; \sqrt{13}$. **2.32.** 45° .

2.33. 60° . **2.34.** 45° . **2.35.** 120° . **2.36.** 60° . **2.37.** $\arccos 0,8$. **2.38.** $\arccos \frac{5}{6}$. **2.39.** $\frac{-4}{49}$.

2.40. $Pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; $Pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **2.41.** $\sqrt{3}$. **2.42.** 2. **2.43.** $(0; 0,8; 0,6)$;

$(0; -0,8; -0,6)$. **2.44.** $\left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}; 0\right)$. **2.45.** $\left(-\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **2.46.** $(2\alpha; 3\alpha; \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.47. 8. **2.48.** 6. **2.49.** а) $\vec{c} = -6\vec{j}$; б) $\vec{c} = -2\vec{k}$; в) $\vec{c} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$. **2.50.** $\sqrt{21}$.

2.52. 2,5. **2.53.** $50\sqrt{2}$. **2.54.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **2.55.** $\sqrt{26}$. **2.56.** $\frac{2\sqrt{21}}{3}$. **2.57.** -8 . **2.58.** а) да;

б) нет, левая; в) нет, правая. **2.59.** 14. **2.60.** а) да; б) нет. **2.61.** 6. **2.62.** $4\frac{1}{3}$.

2.63. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **2.64.** $2V$. **2.66.** У к а з а н и е : умножить скалярно обе части

равенства на $\vec{a}$. **2.67.** а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да. **2.68.** а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) да. **2.69.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 2; д) 4. **2.70.** а) $\vec{x}_1(1); \vec{x}_2(-2); \vec{x}_3(3)$; б) $\vec{x}_1(1;0); \vec{x}_2(0;1); \vec{x}_3(3;-2); \vec{x}_4(2;1)$; в) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(1;-2;0); \vec{x}_4(0;0;1)$; г) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(0;0;1); \vec{x}_4(-2;1;3)$; д) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(0;0;1); \vec{x}_4(-1;0;1)$. **2.71.** да. **2.72.** $\alpha \neq -8, \beta \neq 3$. **2.73.** а) да; б) нет.

Глава 3

3.3 1) $X=1, Y=3$; 2) $X=-4, Y=-2$; 3) $X=1, Y=-7$; 4) $X=5, Y=3$. **3.4.** $(3; -1)$.

3.5. $(-3; 2)$. **3.8.** 1) $X=-6, Y=6\sqrt{3}$ 2) $X=3\sqrt{3}, Y=-3$; 3) $X=\sqrt{2}, Y=-\sqrt{2}$.

3.9. 1) $d=2, \theta=\frac{\pi}{3}$; 2) $d=6, \theta=-\frac{\pi}{4}$; 3) $d=4, \theta=\frac{5}{6}\pi$. **3.10.** 1) $d=\sqrt{2}, \theta=-\frac{3}{4}\pi$;

2) $d=5, \theta=\arctg \frac{4}{3}-\pi$; 3) $d=13, \theta=\pi-\arctg \frac{12}{5}$; 4) $d=\sqrt{234}, \theta=-\arctg 5$.

3.11. а) 3; б) — 3. **3.12.** а) $(-15; -12)$; б) $(1; -12)$. **3.13.** —2. **3.14.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$.
3.15. 1) —5; 2) 5. **3.16.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **3.17.** 137 кв. ед.
3.18. $8\sqrt{3}$ кв. ед. **3.19.** 13, 15. **3.20.** 150 кв. ед. **3.21.** $4\sqrt{2}$. **3.26.** $\angle BAC = 45^\circ$,
 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$. **3.27.** 60° . Указание. Вычислить длины сторон треугольника,
а затем применить теорему косинусов. **3.26.** $M_1(0; 28)$ и $M_2(0; -2)$. **3.29.** $P_1(1; 0)$ и
 $P_2(6; 0)$. **3.30.** $M_2(3; 0)$. **3.31.** $B(0; 4)$ и $D(-1; -3)$. **3.32.** Условию задачи
удовлетворяют два квадрата, симметрично расположенных относительно
стороны AB . Вершины одного квадрата суть точки $C_1(-5; 0)$, $D_1(-2; -4)$,
вершины другого — $C_2(3; 6)$, $D_2(6; 2)$. **3.33.** 1) $M(1; 3)$; 2) $N(4; -3)$. **3.34.** $(1; -3)$, $(3;$
 $1)$ и $(-5; 7)$. **3.35.** $D(-3; 1)$. **3.36.** $(5; -3)$, $(1; -5)$. **3.37.13.** **3.38.** $(2; -1)$ и $(3; 1)$.
3.39. $(\frac{5}{2}; -2)$. **3.40.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **3.41.** $(-11; -3)$. **3.42.** 4. **3.43.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$;
 $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$ **3.44.** $A(3; -1)$ и $B(0; 8)$. **3.45.** 1) 14 кв. ед.; 2) 12 кв. ед.;
3) 25 кв. ед. **3.46.** 5. **3.47.** 20 кв. ед. **3.48.** 7,4. **3.49.** $x = -\frac{6}{11}$, $y = 4\frac{1}{11}$. **3.50.** $(0; -8)$
или $(0; -2)$. **3.51.** $C_1(-2; 12)$, $D_1(-5; 16)$ или $C_2(-2; \frac{2}{3})$, $D_2(-5; \frac{14}{3})$. **3.52.** Точки M_1 ,
 M_3 и M_4 лежат на данной прямой; точки M_2 , M_5 и M_6 не лежат на ней.
3.53. 3, —3, 0, —6 и —12. **3.54.** 1, —2, 4, —5 и 7. **3.55.** $(6; 0)$, $(0; -4)$. **3.56.** $(3; -5)$.
3.57. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$. **3.58.** $(1; -3)$, $(-2; 5)$, $(5; -9)$ и $(8; -17)$.
3.59. $S = 17$ кв. ед. **3.60.** $C_1(-1; 4)$ или $C_2(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7})$. **3.61.** 1) $2x - 3y + 9 = 0$;
2) $3x - y = 0$; 3) $y + 2 = 0$; 4) $3x + 4y - 12 = 0$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) $x + 3y - 2 = 0$.
3.62. 1) $k=5$, $b=3$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b=2$; 3) $k = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$; 4) $k = -\frac{3}{2}$, $b=0$; 5) $k=0$,
 $b=3$. **3.63.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **3.64.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **3.65.** $(2; 1)$, $(4; 2)$,
 $(-1; 7)$, $(1; 8)$. **3.66.** $(-2; -1)$. **3.67.** $Q(11; -11)$. **3.68.** 1) $5x + y - 7 = 0$; 2) $8x + 12y + 5 = 0$;
3) $5x + 7y + 9 = 0$; 4) $6x - 30y - 7 = 0$. **3.69.** а) $k = 7$; б) $k = \frac{7}{10}$; в) $k = -\frac{3}{2}$.
3.70. $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. **3.71.** $7x - 2y - 12 = 0$,
 $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$. **3.72.** $x + y + 1 = 0$. **3.73.** $2x + 3y - 13 = 0$. **3.74.** $(3; 4)$.
3.75. $x - 5 = 0$. **3.76.** Уравнение стороны AB : $2x + y - 8 = 0$; BC : $x + 2y - 1 = 0$;
 CA : $x - y - 1 = 0$. Уравнение медианы, проведённой из вершины A : $x - 3 = 0$; из
вершины B : $x + y - 3 = 0$; из вершины C : $y = 0$.

3.77. $3x - 5y + 4 = 0$; $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$; $x + 7y + 10 = 0$.

3.78. Уравнения сторон прямоугольника: $2x - 5y + 3 = 0$, $2x - 5y - 26 = 0$; уравнение его диагонали: $7x - 3y - 33 = 0$.

3.79. $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$.

Указание. Условию задачи удовлетворяют две прямые: одна из них проходит через точку P и середину отрезка, соединяющего точки A и B ; другая проходит через точку P параллельно отрезку AB .

3.80. $M_1(10; -5)$. **3.81.** $P(2; -1)$.

3.82. $P(2; 5)$. **3.83.** $x - 5y + 3 = 0$ или $5x + y - 11 = 0$.

3.84. Уравнение сторон квадрата: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$,

$4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; уравнение его второй

диагонали: $x + 7y - 31 = 0$.

3.85. $3x - 4y + 15 = 0$,

$4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

3.86. $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$.

3.87. 1) $2x - 3y - 13 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $y + 3 = 0$.

3.88. Перпендикулярны 2) и 3). **3.89.** $4x - y - 13 = 0$,

$x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$.

3.90. $BC: 3x + 4y - 22 = 0$; $CA: 2x - 7y - 5 = 0$; $CN: 3x + 5y - 23 = 0$.

3.91. $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

У к а з а н и е. Задача может быть

решена по следующей схеме: 1. Устанавливаем, что вершина A не лежит ни на

одной из данных прямых. 2. Находим точку пересечения медиан и обозначаем

её какой-нибудь буквой, например M . Зная вершину A и точку M , мы можем

составить уравнение третьей медианы. 3. На прямой, проходящей через точки

A и M , строим отрезок $MD = AM$. Затем определяем координаты точки D , зная

точку M — середину отрезка AD и один из его концов A . 4. Устанавливаем, что

четырёхугольник $BDCM$ — параллелограмм (его диагонали взаимно делятся

пополам), составляем уравнения прямых DB и DC . 5. Вычисляем координаты

точек B и C . 6. Зная координаты всех вершин треугольника, мы можем составить

уравнения его сторон. **3.92.** $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

3.93. $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$.

3.94. $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. **3.95.** $8x - y - 24 = 0$.

3.96. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$.

3.97. 1) $a = -2, 5y - 33 = 0$; 2) $a_1 = 3$, $x - 56 = 0$;

$a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$.

3.98. $m = -4$, $n = 2$;

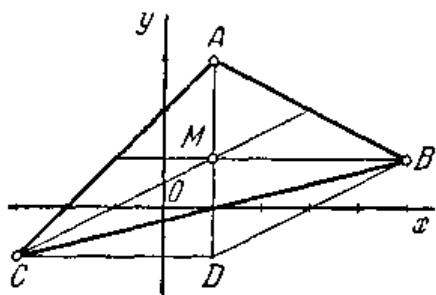
$x - 5 = 0$.

3.99. 1) $(5; 6)$; 2) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$; 3) $(2; -\frac{1}{11})$; 4) $(-\frac{5}{3}; 2)$.

291. 1) При $a \neq 3$; 2) при

$a = 3$ и $b \neq 2$; 3) при $a = 3$ и $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{49} = 0$.

3.102. 1) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$; 3) $m = 0$, где n — любое значение.



Черт. 80.

3.103. $m = \frac{7}{12}$. **3.104.** 1) пересекаются; 2) не пересекаются. **3.105.** $a = -7$. **3.106.**

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 8) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 9) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ или $\frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

10) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **3.107.** 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$; 2) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{25} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$;

5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1$; 6) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$. **3.108.** 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$;

4) $x = \pm \frac{25}{4}$. **3.109.** 16 кв. ед. **3.110.** $(-3; -\frac{8}{5})$, $(-3; \frac{8}{5})$. **3.111.** Точки A_1 и A_6 лежат

на эллипсе; A_2 , A_4 и A_8 — внутри эллипса; A_3 , A_5 , A_7 , A_9 и A_{10} — вне эллипса.

3.113. 20. **3.114.** 10. **3.115.** $(-5; 3\sqrt{3})$ и $(-5; -3\sqrt{3})$. **3.116.** 1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$; 3) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$; 6) $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$;

7) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. **3.117.** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$. **3.118.** $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

3.119. 1) $C(3; -1)$, полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$; уравнения директрис: $2x - 15 = 0$,

$2y + 3 = 0$; 2) $C(-1; 2)$, полуоси 5 и 4, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; уравнения директрис: $3x - 22 = 0$;

$3x + 28 = 0$; 3) $C(1; -2)$, полуоси $2\sqrt{3}$ и 4, $\varepsilon = \frac{1}{2}$; уравнения директрис: $y - 6 = 0$,

$y + 10 = 0$. **3.121.** 1) $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$; 3) $68x^2 + 48xy +$

$+82y^2 - 625 = 0$; 4) $11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0$. **3.122.** $4x^2 + 3y + 32x -$

$-14y + 59 = 0$. **3.123.** $4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0$. **3.124.** $(4; \frac{2}{3})$, $(3; 2)$. **3.125.**

1) Прямая пересекает эллипс; 2) проходит вне эллипса; 3) касается эллипса.

3.126. 1) При $|m| < 5$ — пересекает эллипс; 2) при $m = \pm 5$ — касается эллипса;

3) при $|m| > 5$ — проходит вне эллипса. **3.127.** $3x + 2y - 10 = 0$ и $3x + 2y + 10 = 0$.

3.128. $x + y - 5 = 0$ и $x + y + 5 = 0$. **3.129.** $M_1(-3; 2)$; $d = \sqrt{13}$. **3.130.** $x + y - 5 = 0$ и $x +$

$+4y - 10 = 0$. **3.131.** $4x - 5y - 10 = 0$. **3.132.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ или $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{5} = 1$.

- 3.133.** $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$. **3.134.** $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$. **3.135.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. **3.135.** (3; 2) и (3; -2).
- 3.137.** 1) $x^2 - y^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; 3) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$; 4) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; 5) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; 6) $x^2 + y^2 = 16$; 7) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; 8) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$; 9) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; 10) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.
- 3.140.** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ и $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$. **3.141.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$.
- 3.142.** $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$ и $(x-\frac{9}{5})^2 + (y-\frac{22}{5})^2 = 0$. **3.143.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$.
- 3.144.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ и $(x-\frac{22}{5})^2 + (y+\frac{31}{5})^2 = \frac{289}{5}$. **3.145.** Уравнения 1), 2), 4), 5), 8) и 10) определяют окружности; 1) $C(5; -2)$, $R = 5$; 2) $C(-2; 0)$, $R = 8$; 3) уравнение определяет единственную точку $(5; -2)$; 4) $C(0; 5)$, $R = \sqrt{5}$; 5) $C(1; -2)$, $R = 5$; 6) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 7) уравнение определяет единственную точку $(-2; 1)$; 8) $C(-\frac{1}{2}; 0)$, $R = \frac{1}{2}$; 9) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 10) $C(0; -\frac{1}{2})$, $R = \frac{1}{2}$.
- 3.147.** 1) Вне окружности; 2) на окружности; 3) внутри окружности; 4) на окружности; 5) внутри окружности. **3.148.** $2x - 5y + 19 = 0$.
- 3.149.** $M_1(-1; 5)$ и $M_2(-2; -2)$. **3.150.** 1) Пересекает окружность; 2) касается окружности; 3) проходит вне окружности. **3.151.** 1) $|k| < \frac{3}{4}$; 2) $k = \pm \frac{3}{4}$; 3) $|k| > \frac{3}{4}$.
- 3.152.** $\frac{b^2}{1+k^2} = R^2$. **3.153.** $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$. **3.154.** $7x - 4y = 0$.
- 3.155.** $x - 2y + 5 = 0$. **3.156.** $x_1x + y_1y = R^2$. **3.157.** 45° . **3.158.** 90° . **3.159.** 90° .
- 3.160.** $x+2y+5=0$. **3.161.** $d = 7,5$. **3.162.** 3. **3.163.** $2x + 4y - 1 = 0$ и $2x + y + 19 = 0$.
- 3.164.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 9) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **3.165.** 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; 3) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$; 4) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$; 5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. **3.166.** 1) $a = 1$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $b = 1$; 3) $a = 4$, $b = 2$; 4) $a = 1$, $b = 1$; 5) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$; 6) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{4}$.
- 3.167.** 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $F_2(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm \frac{3}{4}x$; 5) $x = \pm \frac{9}{5}$.
- 3.168.** 12 кв. ед. **3.170.** 12. **3.171.** 10. **3.172.** $(-6; 4\sqrt{3})$ и $(-6; -4\sqrt{3})$.

3.173. 1) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 16$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ или $\frac{x^2}{\frac{61}{9}} - \frac{y^2}{\frac{305}{16}} = 1$;

4) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **3.174.** $\varepsilon = \sqrt{2}$. **3.175.** $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. **3.176.** 1) $C(2; -3)$,

$a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$, уравнения директрис: $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, уравнения асимптот: $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; 2) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 1,25$; уравнения директрис: $x = -11,4$ и $x = 1,4$, уравнения асимптот: $3x + 4y + 11 = 0$ и $3x - 4y + 19 = 0$; 3) $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 1,25$, уравнения директрис: $y = -4,2$, $y = 2,2$, уравнения асимптот: $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$.

3.178. 1) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; 2) $24xy + 7y^2 - 144 = 0$; 3) $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$.

3.179. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **3.180.** 1) $C(0; 0)$, $a = b = 6$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$;

2) $C(0; 0)$, $a = b = 3$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$; 3) $C(0; 0)$, $a = b = 5$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$. **3.181.** $(\frac{25}{4}; 3)$ — прямая касается гиперболы.

3.182. 1) Касается гиперболы; 2) пересекает гиперболу в двух точках; 3) проходит вне гиперболы. **3.183.** 1) При $|m| > 4,5$ — пересекает гиперболу; 2) при $m = \pm 4,5$ — касается гиперболы; 3) при $|m| < 4,5$ — проходит вне гиперболы. **3.184.** $k^2 a^2 - b^2 = m^2$. **3.185.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **3.186.** $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. **3.187.** $2x + 5y - 16 = 0$. **3.188.** $d = \frac{5}{17}\sqrt{10}$.

3.189. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$, $\frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1$. **3.190.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. **3.191.** $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$.

3.192. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. **3.193.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **3.194.** 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$;

4) $x^2 = -6y$. **3.195.** 1) $p = 3$; в правой полуплоскости симметрично оси Ox ; 2) $p = 2,5$; в верхней полуплоскости симметрично оси Oy ; 3) $p = 2$; в левой полуплоскости симметрично оси Ox ; 4) $p = \frac{1}{2}$; в нижней полуплоскости симметрично оси Oy .

3.196. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$.

3.197. $x^2 = -12y$. **3.199.** $F(6; 0)$, $x + 6 = 0$. **3.200.** 12. **3.201.** $y^2 = -28x$.

3.202. 1) $A(2; 0)$, $p = 2$, $x - 1 = 0$; 2) $A(\frac{2}{3}; 0)$, $p = 3$, $6x - 13 = 0$; 3) $A(0; -\frac{1}{3})$, $p = 3$,

$6y - 13 = 0$; 4) $A(0; 2)$, $p = \frac{1}{2}$; $4y - 9 = 0$. **3.203.** 1) $A(-2; 1)$, $p = 2$; 2) $A(1; 3)$, $p = \frac{1}{8}$;

3) $A(6; -1)$, $p = 3$. **3.204.** 1) $A(-4; 3)$, $p = \frac{1}{4}$; 2) $A(1; 2)$, $p = 2$; 3) $A(0; 1)$, $p = \frac{1}{2}$.

3.206. $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$. **3.207.** $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **3.208.** $F(9; -8)$.

3.209. $(-4; 6)$ — прямая касается параболы. **3.210.** 1) Касается параболы; 2) пересекает параболу в двух точках; 3) проходит вне параболы.

3.211. 1) $k < \frac{1}{2}$; 2) $k = 1/2$; 3) $k > 1/2$. **3.212.** $p = 2bk$. **3.213.** $x + y + 2 = 0$.

3.214. $2x - y - 16 = 0$. **3.215.** $d = 2\sqrt{13}$. **3.216.** $3x - y + 3 = 0$ и $3x - 2y + 12 = 0$.

3.217. $5x - 18y + 25 = 0$. **3.218.** $(6; 12)$ и $(6; -12)$. **3.219.** $(10; \sqrt{30})$, $(10; -\sqrt{30})$,

$(2; \sqrt{6})$, $(2; -\sqrt{6})$. **3.220.** $(2; 1)$, $(-1; 4)$, $(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{7+\sqrt{13}}{2})$ и $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{7-\sqrt{13}}{2})$.

3.221. $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **3.222.** $2x - y - z - 6 = 0$ **3.223.** $x - y - 3z + 2 = 0$.

3.224. $x + 4y + 7z + 16 = 0$. **3.225.** $9x - y + 7z - 40 = 0$. **3.226.** $3x + 3y + z - 8 = 0$.

3.227. 1) $\vec{n} = \{2; -1; -2\}$, $\vec{n} = \{2\lambda; -\lambda; -2\lambda\}$; 2) $\vec{n} = \{1; 5; -1\}$, $\vec{n} = \{\lambda; 5\lambda; -\lambda\}$;

3) $\vec{n} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{n} = \{3\lambda; -2\lambda; 0\}$; 4) $\vec{n} = \{0; 5; -3\}$, $\vec{n} = \{0; 5\lambda; -3\lambda\}$;

5) $\vec{n} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{n} = \{\lambda; 0; 0\}$. 6) $\vec{n} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{n} = \{0; \lambda; 0\}$. **3.228.** 1) и 3) **3.229.** 1) и 2)

3.230. 1) $l=3$, $m=-4$; 2) $l=3$, $m=-\frac{2}{3}$; 3) $l=-3\frac{1}{3}$, $m=-1\frac{1}{5}$. **3.231.** 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$.

3.232. 1) $\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ и $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2}{15}$ и $\pi - \arccos \frac{2}{15}$.

3.233. $5x - 3y + 2z = 0$. **3.234.** $7x - y - 5z = 0$. **3.235.** $4x - y - 22 - 9 = 0$. **3.236.** $x = 1$; $y = -2$;

$z = 2$. **3.239.** 1) $a \neq 7$; 2) $a = 7$, $b = 3$; 3) $a = 7$, $b \neq 3$. **3.240.** 1) $z - 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$;

3) $x + 5 = 0$. **3.241.** 1) $2y + z = 0$; 2) $3x + z = 0$; 3) $4x + 3y = 0$. **3.242.** 1) $y + 42 + 10 = 0$;

2) $x - z - 1 = 0$; 3) $5x + y - 13 = 0$. **3.243.** $(12; 0; 0)$, $(0; -8; 0)$, $(0; 0; -6)$. **3.244.** $a = -4$, $b = 3$,

$c = \frac{1}{2}$. **3.245.** 240 кв.ед. **3.246.** 8 куб.ед. **3.247.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$.

3.248. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$. **3.249.** $x + y + z + 5 = 0$. **3.250.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$,

$2x - 3y - 22 + 12 = 0$. **3.251.** $x + y + 2 - 9 = 0$, $x - y - 2 + 1 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x + y - z - 5 = 0$.

3.252. $2x - y - 3z - 15 = 0$. **3.253.** $2x - 3y + z - 6 = 0$. **3.254.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$.

3.255. $\begin{cases} 5x - 7y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + 2z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 7y - 2z + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. **3.256.** $\begin{cases} 3x - y - 7z + 9 = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}$.

3.257. $(2; -1; 0)$; $(1\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3})$. **3.259.** 1) $D = -4$; 2) $D = 9$; 3) $D = 3$.

3.260. 1) $A_1 = A_2 = 0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля; 2) $B_1 = B_2 = 0$ и

хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля; 3) $C_1 = C_2 = 0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля. **3.261.** 1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 2) $\frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$;

4) $A_1=D_1=0, A_2=D_2=0$; 5) $B_1=D_1=0, B_2=D_2=0$; 6) $C_1=D_1=0, C_2=D_2=0$.

3.262. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$;

4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$. **3.263.** 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$;

2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ 3) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$. **3.264.** 1) $x=2t+1$,

$y=-3t-1, z=4t-3$; 2) $x=2t+1, y=5t-1, z=-3$; 3) $x=3t+1, y=-2t-1, z=5t-3$.

3.265. 1) $x=t+2, y=-2t+1, z=t+1$; 2) $x=t+3, y=-t-1, z=t$; 3) $x=0, y=t, z=-3t+1$.

3.266. (9; -4; 0), (3; 0; -2), (0; 2; -3). **3.267.** $x=5t+4, y=-11t-7, z=-2$.

3.268. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$. **3.269.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$. **3.270.** $x=3t+3, y=15t+1$,

$z=19t-3$. **3.271.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z}{4}$. **3.272.** 1) $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$ Р е ш е н и е.

Полагая, например, $z_0=0$, находим из данной системы: $x_0=2, y_0=-1$; таким образом мы уже знаем одну точку прямой; $M_0(2; -1; 0)$. Теперь найдём направляющий вектор. Имеем $n_1=\{1; -2; 3\}, n_2=\{3; 2; -5\}$; отсюда $a=[n_1, n_2]=\{4; 14; 8\}$, т.е. $l=4, m=14, n=8$. Канонические уравнения данной прямой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0 и l, m, n в равенства

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ или $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$.

3.273. 1) $x=t+1, y=-7t, z=-19t-2$; 2) $x=-t+1, y=3t+2, z=5t-1$.

3.276. 60° . **3.277.** 135° . **3.278.** $\cos \phi = \pm \frac{4}{21}$. **3.280.** $a=3$. **3.281.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

3.282. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$. **3.283.** 1) $2x+15y+7z+7=0$; 2) $9y+3z+5=0$;

3) $3x+3z-2=0$; 4) $3x-9y-7=0$. **3.284.** 1) $23x-2y+21z-33=0$; 2) $y+z-18=0$;

3) $x+z-3=0$; 4) $x-y+15=0$. **3.285.** $5x+5z-8=0$. **3.286.** $11x-2y-15z-3=0$.

3.287. $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$. У к а з а н и е. Прямая пересечения плоскостей $5x-y-2z-3=0, 3x-2y-5z+2=0$ перпендикулярна к плоскости $x+19y-7z-11=0$; следовательно, условию задачи будут удовлетворять все плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через эту прямую.

3.288. $9x+7y+8z+7=0$. **3.289.** Принадлежит. **3.290.** $l=-5, m=-11$. **3.291.** $4x-3y+6z-12=0, 12x-49y+38z+84=0$. **3.294.** 1) (2; -3; 6); 2) прямая

параллельна плоскости; 3) прямая лежит на плоскости.

3.295. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$. **3.296.** $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **3.297.** $x+2y+3z=0$.

3.298. $m = -3$. **3.299.** $C = -2$. **3.300.** $A = 3, D = -23$. **3.301.** $A = -3, B = 4\frac{1}{2}$.

3.302. $t = -6, C = \frac{3}{2}$. **3.303.** $(3; -2; 4)$. Р е ш е н и е. Искомую точку найдём,

решая совместно уравнения данной прямой с уравнением плоскости, проведённой из точки P перпендикулярно к этой прямой. Прежде всего заметим, что направляющий вектор данной прямой $\{3; 5; 2\}$ будет являться нормальным вектором искомой плоскости. Уравнение плоскости, которая проходит через точку $P(2; -1; 3)$ и имеет нормальный вектор $n=\{3; 5; 2\}$, будет иметь вид $3(x-2) + 5(y+1) + 2(z-3)=0$ или $3x+5y+2z-7=0$. Решая совместно

уравнения $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2, \\ 3x + 5y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ найдём координаты искомой проекции $x=3, y=-2,$

$z=4$. **3.304.** $Q(2; -3; 2)$. **3.305.** $Q(4; 1; -3)$. **3.306.** $(1; 4; -7)$. Р е ш е н и е. Искомую точку найдём, решая совместно уравнение данной плоскости с уравнениями прямой, проведённой из точки P перпендикулярно к этой плоскости. Прежде всего заметим, что нормальный вектор данной плоскости $\{2; -1; 3\}$ будет являться направляющим вектором искомой прямой. Параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $P(5; 2; -1)$ и имеет направляющий вектор $a=\{2; -1; 3\}$ будут иметь вид: $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = 3t -$

1. Решая совместно уравнения $\begin{cases} 2x - y + 3z + 23 = 0, \\ x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ найдем координаты искомой

проекции: $x=1, y = 4, z = -7$. **3.307.** $Q(-5; 1; 0)$. **3.308.** $P(3; -4; 0)$. У к а з а н и е. Задача может быть решена по следующей схеме: 1) устанавливаем, что точки A и B расположены по одну сторону от плоскости Ox ; 2) Находим точку, симметричную одной из данных точек относительно плоскости Oxy ; например, точку B_1 симметричную точке B ; 3) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки A и B_1 ; 4) Решая совместно найденные уравнения прямой с уравнением плоскости Oxy , получим координаты искомой точки. **3.309.** 1) 21; 2) 6; 3) 15. **3.310.** $d = 25$. **3.311.** $9x+11y+5z-16=0$. **3.312.** $4x+6y+5z-1=0$. **3.314.** $6x-20y-11z+1=0$. **3.315.** $(2; -3; -5)$. **3.316.** $Q(1; 2; -2)$. **3.317.** $13x-14y+11z+51=0$.

3.318. $x-8y-13z+9=0$. **3.319-3.332** Решением систем линейных неравенств являются графические изображения соответствующих областей декартовой плоскости $x_1 O x_2$.

Глава 4

4.1.: а) $(0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$ при $p < 0$, $(-\infty; 0]$ при $p > 0$, $(-\infty; +\infty)$ при $p = 0$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $[-1; 1]$; д) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; е) $(0; 3) \cup (3; +\infty)$.

4.2. а) $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; в) $[-3; 1) \cup (1; 3]$; г) $x \neq \frac{\pi k}{3}$, или $\left(\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi(k+1)}{3}\right)$,

$k \in \mathbb{Z}$; д) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; е) $[0; 2]$. **4.3.** а) $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; б) $\{1\}$;

в) $(-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$; г) $(3-2\pi; 3-\pi) \cup (3; 4]$; д) $[-4; -\pi] \cup [0; \pi]$; е) нигде не

определена ($D(y) = \emptyset$). **4.4.** а) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-1; 1]$; г) $x \neq \frac{\pi k}{2}$, или

$\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi(k+1)}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, или $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$,

$k \in \mathbb{Z}$. **4.5.** а) $[1; +\infty)$; б) $[1; +\infty)$; в) $[1; 7]$; г) $\left(-\frac{\pi^2}{2}; \frac{\pi^2}{2}\right)$; д) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; е)

$(3; +\infty)$. **4.6.** а) $\left(\frac{1}{64}; 0\right)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left[0; \frac{1}{7}\right]$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; е) $\{-1; 1\}$.

4.7. а) нечетная; б) четная; в) общего вида; г) четная; д) общего вида;

е) нечетная. **4.8.** а) нечетная; б) нечетная; в) общего вида; г) нечетная; д) четная;

е) четная. **4.9.** а) периодическая, наименьший положительный период $T = 8\pi$;

б) не является периодической; в) периодическая, $T = \frac{\pi}{2}$; г) периодическая,

$T = 12\pi$; д) периодическая, $T = \frac{\pi}{3}$; е) периодическая, $T = \pi$.

4.10. а) периодическая, $T = \pi$; б) не является периодической; в) периодическая,

$T = \frac{\pi}{2}$; г) не является периодической; д) периодическая, $T = \pi$; е) не является

периодической; ж) периодическая, $T = 6\pi$. **4.11.** а) x^9 , $x^3 - 1$, $(x-1)^3$; б) e^{e^x} , x ,

x ; в) $9x+4$, $15x+2$, $15x-8$; г) $|x|$, $\cos|x|$, $|\cos x|$; д) $\frac{x-3}{10-3x}$, $4-x$, $-\frac{x}{2x+1}$; е)

$\text{sign } x$, -2 , -1 ; ж) $[x]$, $\frac{1}{[x]^2+1}$, $\begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$. **4.12.** а) $y = x$; б) $y = \frac{6-x}{3}$; в),

г) функция не имеет обратной в естественной области определения;

д) $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$; е) $y = \frac{2}{1-x}$. **4.13.** а) $y = 5 + \log_4 x$; б), г) функция не имеет обратной

в естественной области определения; в) $y = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{при } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$; д) $y = -2 + 10^{x-1}$;

е) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$. **4.14.** а) монотонна, ограничена; б) ограничена; в) строго монотонна (возрастающая), ограничена; г) строго монотонна (возрастающая); д) не является ни монотонной, ни ограниченной; е), ж) строго монотонна (возрастающая). **4.15.** а) ограничена; б) ограничена; в) строго монотонна (убывающая); г) не является ни монотонной, ни ограниченной; д) монотонна (неубывающая); е) строго монотонна (убывающая); ж) ограничена.

Глава 5

5.2. а) $x_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $x_n = \frac{1}{n^3}$; в) $x_n = \frac{n+1}{n+2}$; г) $x_n = \frac{n+1}{n}$; д) $x_n = (-1)^n$. **5.3.**

а) $x_n = (-1)^n + 3$; б) $x_n = (-1)^n(n^2 + 1)$; в) $x_n = \frac{1}{3n-1}$; г) $x_n = \frac{1}{(n+1)!}$; д) $x_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$.

5.4. а) ограничена снизу, строго монотонна (возрастает); б) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); в) ограничена, не является монотонной; г) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); д) ограничена, строго монотонна (убывает). **5.5.** а) не является ни ограниченной сверху, ни ограниченной снизу, ни монотонной; б) ограничена, строго монотонна (убывает); в) ограничена снизу, не является монотонной; г) строго монотонна (убывает), начиная со второго члена; д) ограничена, не является монотонной.

5.9. $\frac{1}{6}$; **5.10.** $-\frac{1}{2}$; **5.11.** ∞ ; **5.12.** 0; **5.13.** $-\frac{1}{5}$; **5.14.** 0; **5.15.** $\frac{5}{8}$; **5.16.** $\frac{1}{6}$; **5.17.** $-\frac{4}{3}$;

5.18. $-\frac{7}{4}$; **5.19.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$; **5.20.** ∞ ; **5.21.** 0; **5.22.** ∞ ; **5.23.** 1; **5.24.** -1; **5.25.** $\sqrt{2}$; **5.26.** 5;

5.27. $\frac{1}{2}$; **5.28.** $\frac{4}{3}$; **5.29.** $\frac{1}{2}$; **5.30.** 3; **5.31.** 1; **5.32.** 0; **5.33.** e^2 ; **5.34.** e ; **5.35.** e^{-4} ;

5.36. 0; **5.41.** $\frac{1}{6}$; **5.42.** $\frac{1}{2}$; **5.43.** $\frac{2}{3}$; **5.44.** $\frac{2}{3a}$; **5.45.** $\frac{5}{9}$; **5.46.** -2; **5.47.** $-\frac{3}{2}$; **5.48.**

$-\sqrt{2}$; **5.49.** -2; **5.50.** $\frac{5}{4}$; **5.51.** $\frac{1}{6}$; **5.52.** -1; **5.53.** -4; **5.54.** 4; **5.55.** 2; **5.56.** $\frac{3}{2}$;

- 5.57.** 12; **5.58.** $\frac{3}{2}$; **5.59.** 7; **5.60.** $-\frac{1}{\sqrt{7}}$; **5.61.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$; **5.62.** $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; **5.63.** $\frac{1}{2}$; **5.64.** 0;
- 5.65.** $\frac{1}{3}$; **5.66.** $-\frac{1}{2}$; **5.67.** ∞ ; **5.68.** 2; **5.69.** 0; **5.70.** $\frac{a-c}{2}$; **5.71.** 0;
- 5.72.** $\begin{cases} 1 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; **5.73.** $\begin{cases} -49 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{3} & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; **5.74.** $\begin{cases} 1 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; **5.75.** $-\frac{1}{2}$;
- 5.76.** $\begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -\sqrt{2} & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; **5.77.** 0; **5.78.** $-\frac{3}{25}$; **5.79.** $\frac{1}{9}$; **5.80.** $\frac{4}{9}$; **5.81.** $\frac{2}{3}$; **5.82.** 2;
- 5.83.** $\frac{25}{9}$; **5.84.** $\frac{3}{2}$; **5.85.** 3; **5.86.** $\frac{1}{2}$; **5.87.** $\frac{1}{2}$; **5.88.** $\frac{3}{\ln 10}$; **5.89.** $\ln 6$; **5.90.** $\frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{6}{5}}$;
- 5.91.** 2; **5.92.** 2; **5.93.** $\ln a$; **5.94.** $\ln \frac{6}{3} = \ln 2$; **5.95.** e^{10} ; **5.96.** $e^{\frac{4}{3}}$; **5.97.** e^{15} ; **5.98.** $e^{\frac{4}{5}}$;
- 5.99.** e^{-4} ; **5.100.** e^{a-b} ; **5.101.** $\sqrt{e}$; **5.102.** $e^{\frac{3}{2}}$; **5.103.** e ; **5.104.** e ; **5.105.** $e^{\frac{26}{3}}$;
- 5.106.** $\frac{1}{4}$; **5.107.** -9; **5.108.** a ; **5.109.** $a \ln a$; **5.110.** e^{-1} ; **5.111.** $\frac{1}{a} \log_a e$; **5.112.** e ;
- 5.113.** 1; **5.114.** $\sqrt{e}$; **5.115.** $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$; **5.116.** $-\frac{\alpha}{\pi}$; **5.117.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; **5.118.** 1.
- 5.119.** $\alpha(x) \sim \beta(x)$, при $x \rightarrow 0$; **5.120.** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$; **5.121.** $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow 5$; **5.122.** $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow 1$; **5.123.** $\alpha(x) \sim \beta(x)$, при $x \rightarrow 0$; **5.124.** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$; **5.125.** 3; **5.126.** $\frac{3}{5}$; **5.127.** $\frac{2}{3}$; **5.128.** $\frac{1}{8}$; **5.129.** $-\frac{1}{16}$;
- 5.130.** $\frac{3}{8}$; **5.131.** $\frac{1}{4}$; **5.132.** $\frac{\pi}{4}$; **5.133.** $\frac{1}{12}$; **5.134.** $-\frac{1}{2}$; **5.135.** $\frac{a^2}{b^2}$; **5.136.** 1; **5.137.** 1;
- 5.138.** $\frac{3}{4}$; **5.139.** $\frac{\ln 7}{\ln 9}$; **5.140.** $-\frac{1}{2}$; **5.141.** $-\frac{1}{2}$; **5.142.** $\frac{3}{5}$; **5.143.** $-\frac{1}{2}$; **5.144.** $\frac{9}{25}$;
- 5.145.** 1,6; **5.146.** $\frac{1}{8}$; **5.147.** $\frac{2}{9}$; **5.148.** -2; **5.149.** e^{-2} ; **5.150.** 1; **5.151.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$;
- 5.152.** $e^{\frac{2}{\pi}}$; **5.153.** $f(a-0) = 0$, $f(a+0) = +\infty$; **5.154.** $f(3-0) = \frac{1}{3}$, $f(3+0) = 0$;
- 5.155.** а) $f(1-0) = -2 = f(1)$, $f(1+0) = 0,1$; б) $f(10-0) = f(10+0) = f(10) = 1$;

5.156. $f(1-0) = f(1+0) = 2$; **5.157.** $f(-0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; **5.158.** $f(1-0) = 3$,

$f(1+0) = 4$; **5.159.** $f(2-0) = f(2+0) = +\infty$; **5.160.** $f(-0) = \frac{1}{2}$, $f(+0) = 0$; **5.161.**

$f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = \frac{\pi}{2}$; **5.162.** $f(\frac{\pi}{2}-0) = +\infty$, $f(\frac{\pi}{2}+0) = -\infty$; **5.163.** $f(-0) = -1$,

$f(+0) = 1$; **5.164.** $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = 2$; **5.165.** $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = +\infty$;

5.166. функция не имеет односторонних пределов в точке $x_0 = 0$;

5.167. $f(\frac{\pi}{4}-0) = +\infty$, $f(\frac{\pi}{4}+0) = 0$; **5.168.** $f(\frac{\pi}{2}-0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}+0) = 2$;

5.169. $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$; **5.170.** $-\frac{1}{2}$; **5.171.** $-\sqrt{2\pi}$; **5.172.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; **5.173.** $\frac{1}{2}$.

5.178. а) $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < -1, \\ 1 & \text{при } x > -1 \end{cases}$; б) $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < -1, \\ x+1 & \text{при } x > -1 \end{cases}$. При $x=1$ функции имеют

разрыв первого рода (выполнено только первое условие непрерывности);

5.179. $x=0$ – точка устранимого разрыва, не выполнено только третье условие непрерывности; **5.180.** $x=0$ – точка разрыва I рода,

$\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ (см. рис.); **5.181.**

$x=0$ – точка разрыва II рода; **5.182.** $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ (n –

целое) – точки разрыва II рода; **5.183.** $x = \pm 2$ – точки

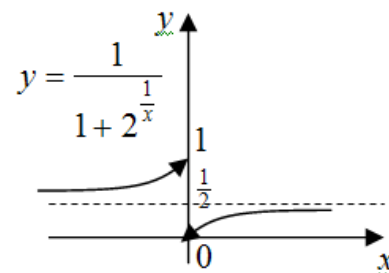
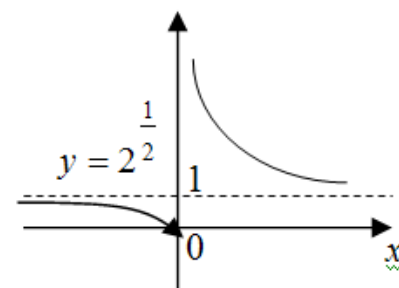
разрыва II рода; **5.184.** $x=0$ – точка разрыва I рода,

$f(+0) = 0$, $f(-0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (см. рис.); **5.185.** $x=a$ – точка

разрыва I рода,

$f(a+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(a-0) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;

5.186. $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{при } x < 1, \\ \frac{x^2}{2} & \text{при } x > 1 \end{cases}$, $x=1$ – точка разрыва I



рода, $f(1+0) = \frac{1}{2}$, $f(1-0) = -\frac{1}{2}$; **5.187.** $x=0$, $x=1$ – точки разрыва II рода;

5.188. $x=1$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен 1; **5.189.** $x=2$

– точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен 2; **5.190.** $x=-2$ – точка

разрыва I рода, скачок функции в точке равен 2; **5.191.** $x = -1$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен -4 ; $x = 0$ – точка разрыва I рода; **5.192.** $x = 0$ – точка устранимого разрыва, $f^*(0) = 1$, **5.193.** $x = \frac{\pi}{4}$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, в точках $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \pi$ функция непрерывна слева, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция непрерывна справа; **5.194.** $x = 0$ – точка устранимого разрыва, $f^*(0) = n$; **5.195.** $x = 1$ – точка разрыва II рода; **5.196.** $x = 5$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) – точки разрыва II рода; $x = 0$ – точка устранимого разрыва, $f^*(0) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}{5}$; **5.197.** $x = -2$, $x = -3$ – точки разрыва II рода; $x = -1$ – точка устранимого разрыва, $f^*(-1) = \frac{1}{2}$. **5.198.** $x = \pm 1$, $x = \pm 25$ – точки разрыва II рода.

Литература

1. Яблонский, А.И. /А.И. Яблонский; под общ. ред. С.А. Самалы. – Высшая математика. Общий курс. – Минск: Вышэйш. шк., 2000.
2. Кузнецов, А.В. /А.В. Кузнецов; под общ. ред. А.И. Яблонского – Высшая математика. Общий курс. – Минск: Вышэйш. шк., 1993.
3. Шилкина, Е.И. Высшая математика. /Е.И. Шилкина. – Минск: БГЭУ, 2003. – Ч.1.
4. Шилкина, Е.И. Высшая математика / Е.И. Шилкина, М.П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2005. – Ч.2.
5. Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс: Учеб. пособие /А.В Кузнецов А.В [и др]. – Минск: Вышэйш. шк., 1994.
6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник. /под ред. проф. В.И. Ермакова. – М. Инфра, 2007.
7. Высшая математика для экономистов /под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007.
8. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов. Второй семестр. Экспресс-курс /И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2006.
9. Карасев, А.К. Курс высшей математики для экономических вузов /А.К. Карасев [и др]. – М.: Высш. шк., 1982 – Ч.1, 2.
10. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии /Д.В. Клетеник. – М.: Наука, 1980.
11. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты /Л.А. Кузнецов. – СПб.: Лань, 2005.
12. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании /М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2006.
13. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2004.