

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

Т.И. Гавриш, Л.Н.Гайшун

Р Я Д Ы

Учебно-методическое пособие
для студентов 1-го курса
дневной и заочной форм обучения

МИНСК 2013

Литература

- 1) Высшая математика. Общий курс / Под ред. С. А. Самалы. Мн.: Вышэйш. шк., 2000
- 2) Высшая математика. Общий курс / Под ред. А. И. Яблонского. Мн.: Вышэйш. шк., 1993
- 3) Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Вышэйш. шк., 1998. ч. 2.
- 4) Гайшун Л.Н., Денисенко Н.В., Марков А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Минск: БГЭУ, 2009. – Ч.2.
- 5) Сборник индивидуальных заданий по высшей / Под ред. А. П. Рябушко. Мн.: Вышэйш. шк., 1991. ч. 2.
- 6) А.И. Астровский, М.П. Дымков Высшая математика. Учебное пособие (часть 2). Минск: БГЭУ, 2011.

Часть I. Числовые ряды

§ 1. Основные понятия

Определение 1. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Тогда формально составленная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1.1)$$

называется числовым рядом; слагаемые $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда; a_n – общим членом ряда.

Вообще говоря, ряд (1.1) задан, если известен его общий член $a_n = f(n)$, т.е. известно правило, по которому каждому номеру n ($n = 1, 2, 3, \dots$) ставится в соответствие определённый член ряда.

Пример 1. Написать первые пять членов ряда, если общий член задан формулой:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3) \cdot 5^{n-1}}$$

Решение.

$$\text{Если } n = 1, \text{ то } a_1 = \frac{(-1)^0}{(2+3) \cdot 5^0} = \frac{1}{5};$$

$$\text{если } n = 2, \text{ то } a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2 \cdot 2 + 3) \cdot 5^{2-1}} = -\frac{1}{7 \cdot 5};$$

$$\text{если } n = 3, \text{ то } a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{(2 \cdot 3 + 3) \cdot 5^{3-1}} = \frac{1}{9 \cdot 5^2};$$

$$\text{если } n = 4, \text{ то } a_4 = \frac{(-1)^{4-1}}{(2 \cdot 4 + 3) \cdot 5^{4-1}} = -\frac{1}{11 \cdot 5^3};$$

$$\text{если } n = 5, \text{ то } a_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{(2 \cdot 5 + 3) \cdot 5^{5-1}} = \frac{1}{13 \cdot 5^4};$$

Таким образом, данный ряд можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3) \cdot 5^{n-1}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7 \cdot 5} + \frac{1}{9 \cdot 5^2} - \frac{1}{11 \cdot 5^3} + \frac{1}{13 \cdot 5^4} + \dots$$

Пример 2. Найти формулу общего члена ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

Решение. Очевидно, что числитель каждой дроби — число чётное, а знаменатель — степень числа 3. Тогда

$$a_n = \frac{2^n}{3^n}.$$

Определение 2. Суммы вида

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, ... называются частичными суммами ряда.

Определение 3. Сумма конечного числа n первых членов ряда (1.1) называется n -ой частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то его называют суммой ряда (1.1) и говорят, что ряд сходится. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, то ряд (1.1) расходится и суммы не имеет.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленных из членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a ($a \neq 0$),

$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (1.3), который называется геометрическим рядом.

Решение. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad (a \neq 0; q \neq 1).$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} (1 - q^n) = \frac{a}{1 - q}.$$

Получим конечный предел, значит, ряд (1.3) сходится и его сумма равна

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует. Таким образом, ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (1.3) примет вид $a + a + a + \dots$. Тогда $S_n = n \cdot a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Значит, ряд (1.3) при $q = 1$ расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (1.3) примет вид $a - a + a + \dots$. В этом случае

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n - \text{четном,} \\ a & \text{при } n - \text{нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ предела не имеет, значит ряд расходится.

Пример 4. Показать, пользуясь определением, сходимость ряда и найти его сумму:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots \quad (1.4)$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{An^3 + 2An^2 + An + Bn^2 + 2Bn + B + Cn^3 + Cn^2 + Dn^2}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{n^3(A+C) + n^2(2A+B+C+D) + n(A+2B) + B}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

$$n^3 \quad A + C = 0$$

$$n^2 \quad 2A + B + C + D = 0$$

$$n \quad A + 2B = 2$$

$$n^0 \quad B = 1.$$

Решив систему, получим $A = C = 0$; $B = 1$; $D = -1$.

$$\text{Тогда } a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{3}{1 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$, т.е. ряд сходится и его сумма

равна 1.

Пример 5. Показать, пользуясь определением, сходимость ряда и найти его сумму:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \dots \quad (1.5).$$

Решение. Общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \text{ представляем в виде}$$

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{n(2A + 2B) + A - B}{(2n - 1)(2n + 1)}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для определения A и B .

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

В результате получим $A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Тогда } a_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$, т.е. ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Определение 3. Если в ряде (1.1) отбросить первые n членов, то получится ряд

$$\sum_{n=n+1}^{\infty} a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots, \quad (1.6)$$

называемый остатком ряда (1.1) после n -го члена и он обозначается r_n .

Тогда $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$

Теорема 1. Если ряд (1.1) сходится, то сходится и его остаток (1.6), и наоборот, если сходится остаток (1.6), то и сходится ряд (1.1).

Теорема 2. Для того, чтобы ряд (1.1) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

Следствие. Если в ряде (1.1) отбросить конечное число начальных членов, то это не повлияет на сходимость (расходимость) ряда.

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то сходитя также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C a_n$, где C – любое действительное число, а его сумма равна CS .

Теорема 4. Два сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

можно почленно складывать и вычитать, так что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

сходятся и их суммы равны соответственно $S_1 + S_2$; $S_1 - S_2$, где S_1 и S_2 – суммы исходных рядов.

ЗАДАЧИ

I. Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

1. $a_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$.

4. $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

2. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n^2}$.

5. $a_n = \frac{4+(-1)^n}{n^2+2}$.

3. $a_n = \frac{3^n}{n+3}$.

6. $a_n = \cos n\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$.

II. Написать формулу общего члена ряда:

7. $\frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \frac{5}{\ln 5} + \dots$.

$$8. 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$9. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$10. \frac{2}{1} + \frac{6}{1 \cdot 2} + \frac{12}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$11. -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots$$

$$12. \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 10} + \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 15} - \frac{5 \cdot 10}{10 \cdot 20} + \dots$$

$$13. 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 9} - \frac{1}{4 \cdot 27} + \dots$$

$$14. \frac{2}{1} + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \dots$$

$$15. \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 7} + \frac{1}{10 \cdot 11} - \dots$$

III. Пользуясь непосредственно определением, исследовать сходимость ряда и найти его сумму, если ряд сходится.

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-3)}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+5)}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

ОТВЕТЫ

$$7. a_n = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

$$10. a_n = \frac{n(n+1)}{n!}$$

$$8. a_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$11. a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$9. a_n = (-1)^{n-1}$$

$$12. a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)(2n+2)}{(3n-2) \cdot 5n}$$

13. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$.

14. $a_n = \frac{3n-1}{n^3}$.

15. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)}$.

16. $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right); S = \frac{1}{3}$.

17. $S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+3} \right); S = \frac{11}{18}$.

18. $S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right); S = \frac{23}{90}$.

19. $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right); S = \frac{1}{4}$.

20. $S_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right); S = \frac{1}{8}$.

21. $S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right); S = \frac{1}{4}$.

§ 2. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Обратное утверждение неверно. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Следствие. (Достаточный признак расходимости ряда).

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} + \dots$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ значит, ряд расходится на основании}$$

следствия из необходимого признака.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}$.

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n^2}{n^3+5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то на основании необходимого признака сходимости (расходимости) этого ряда ничего нельзя сказать. Далее будет показано, что данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5} \cdot 5} = e^5 \neq 0, \text{ значит ряд расходится.}$$

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя необходимый признак сходимости:

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-4}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{2n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10-n^2}{2n-5n^2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n+3}$.

ОТВЕТЫ

22. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{5}$. 26. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
23. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. 27. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.
24. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-\frac{1}{2}}$. 28. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$.
25. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. 29. Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{4}{3}}$.

§3. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ называется положительным, если все его члены положительны, то есть $a_n > 0$, и неотрицательным, если $a_n \geq 0$.

Интегральный признак Маклорена-Коши:

Рассмотрим положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$.

Если существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $f(x)$ задана на промежутке $[1; +\infty)$;
- 2) непрерывная;
- 3) монотонно-убывающая;
- 4) $a_n = f(n)$; $n = 1, 2, 3, \dots$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 9.

Рассмотрим *обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)* и исследуем его на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots; p \in R \quad (*)$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости. При $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Маклорена-Коши.

Рассмотрим три случая:

1. При $p = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим.

$$\text{Так как } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2. Если $0 < p < 1$, то

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится. Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится при $0 < p < 1$.

$$3. \text{ Если } p > 1, \text{ то } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

, т.е. несобственный интеграл сходится.

Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$.

Замечание 1. Интегральный признак Маклорена-Коши был высказан в геометрической форме еще в 1742г Маклореном, но остался незамеченным и вновь был открыт в 1827г Коши. В литературе этот признак часто встречается под названием просто интегральный признак.

Пример 10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям интегрального признака сходимости. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty$

Несобственный интеграл расходится, следовательно, и ряд расходится.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Рассмотрим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots. \quad (1.8)$$

Если, начиная с некоторого номера $n > N$, $a_n \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

ВТОРОЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ ($l \neq 0; l \neq \infty$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 2. Сходимость многих рядов может быть исследована сравнением с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ или с геометрическим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 10}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} + \dots$$

Решение.

Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, который сходится т. к. $p = \frac{3}{2} > 1$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, т. е. $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ следует

сходимость данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}$.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-\cos^2 na} = \frac{1}{2-\cos^2 a} + \frac{1}{3-\cos^2 2a} + \frac{1}{4-\cos^2 3a} + \dots + \frac{1}{n+1-\cos^2 na} + \dots$

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$.

Этот ряд является гармоническим, у которого отброшен первый член. Известно, что гармонический ряд расходится, но тогда в силу следствия из теоремы 1 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится. Так как в данном случае

$$a_n = \frac{1}{n+1-(\cos n\alpha)^2}, \quad b_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1-(\cos n\alpha)^2} \geq \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq (\cos n\alpha)^2 \leq 1, \text{ т.е.}$$

$a_n \geq b_n$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ следует расходимость данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-(\cos na)^2}.$$

Пример 13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{5n^4-3n^2+5}$.

Решение. В числителе стоит многочлен первой степени $3n-4$, а в знаменателе многочлен четвертой степени $5n^4-3n^2+5$.

Сравниваем данный ряд с обобщенным гармоническим рядом, у которого $p = 4 - 1 = 3$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Этот ряд сходится, т.к. $p = 3 > 1$.

Применим второй признак сравнения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{5n^4-3n^2+5} : \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4-n^3}{5n^4-3n^2+5} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Следовательно, второй признак сравнения выполняется и данный ряд сходится.

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя интегральный признак Маклорена-Коши:

30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3+n^2}.$$

33.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

36.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

31.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

34.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^3(n+2)}.$$

37.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}.$$

32.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

35.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

38.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}.$$

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения:

39.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}.$$

45.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

51.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n^4+3n^2+2}.$$

40.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

46.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)}.$$

52.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{\sqrt{n^3+2n^2+6}}.$$

41.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}.$$

47.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n^2+1}}.$$

53.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}.$$

42.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

48.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

54.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \frac{n+1}{n}.$$

43.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+5^{2n}}.$$

49.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n+n^2}.$$

55.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}.$$

44.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^5+4}.$$

50.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n^3-1)^2}.$$

ОТВЕТЫ

30. Сходится. 31. Расходится. 32. Сходится. 33. Сходится. 34. Сходится.
35. Сходится. 36. Расходится. 37. Расходится. 38. Сходится. 39. Расходится.
40. Расходится (указание: $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$). 41. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$).

42. Сходится (указание: сравнить с $\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}$). 43. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$). 44. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). 45. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$). 46. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 47. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 48. Сходится (указание: $|\sin 3^n| \leq 1$). 49. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$). 50. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$). 51. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). 52. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 53. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$). 54. Сходится (указание: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$). 55. Расходится (указание: $2 + \sin n \geq 1$, сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд сходится;

если $l > 1$ то ряд расходится;

если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным, в этом случае следует применить другие признаки сходимости.

Пример 14. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)5^{2(n+1)-1}} = \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)5^{2n-1}}{(2n+1)5^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{(2n+1)5^2} = \frac{1}{25} < 1$, следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)n!n!}{(n+1)(n+1)n!n!(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+6n+2}{(n+1)^2} = 4 > 1,$$

следовательно,

данный ряд расходится по признаку Даламбера.

Пример 16. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n n! (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

(использовали второй замечательный предел), значит, данный ряд расходится.

ПРИЗНАК КОШИ

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд сходится;

если $l > 1$ то ряд расходится;

если $l = 1$, то признак Коши ответа на вопрос о сходимости ряда не дает, в этом случае следует исследовать ряд с помощью других признаков сходимости.

Пример 17. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Применим признак Коши.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ следовательно, ряд сходится.}$$

Пример 18. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$.

Решение. Применим признак Коши.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2-3}{n+2}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+2}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+2}\right)^{\left(\frac{n+2}{-3}\right)\left(\frac{-3}{n+2}\right)(n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+3}{n+2}} = \end{aligned}$$

$= e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1$ (применили второй замечательный предел), следовательно, ряд сходится.

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя признак Даламбера:

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n(2n-1)}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}$.

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^n}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

65.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{4^{n+1}}.$$

66.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}3^n}.$$

67.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

ОТВЕТЫ

56. Сходится ($l = \frac{1}{3}$). 57. Сходится ($l = \frac{1}{5}$). 58. Сходится ($l = 0$).

59. Расходится ($l = 7$). 60. Сходится ($l = \frac{e}{3}$). 61. Расходится ($l = \frac{e}{2}$).

62. Сходится ($l = \frac{1}{3}$). 63. Сходится ($l = 0$). 64. Сходится ($l = \frac{1}{4}$).

65. Сходится ($l = \frac{1}{4}$). 66. Сходится ($l = \frac{1}{3}$). 67. Сходится ($l = \frac{1}{e}$).

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя признак Коши:

68.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

73.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}.$$

69.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+4}.$$

74.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}}.$$

70.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n + \sqrt{n} + 5}\right)^n.$$

75.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

71.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

76.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n}.$$

72.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

ОТВЕТЫ

68. Сходится ($l = \frac{1}{3e}$). 69. Сходится ($l = \frac{1}{8}$). 70. Расходится ($l = 3$).

71. Расходится ($l = e$). 72. Сходится ($l = \frac{e}{5}$). 73. Сходится ($l = 0$).

74. Расходится ($l = 5e^2$). 75. Расходится ($l = \frac{7}{2}$). 76. Сходится ($l = 0$).

§4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Признак Лейбница.

Определение 4. Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным.

Определение 5. Знакопеременным называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки.

Таким образом, знакопеременный ряд – это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{где } a_n > 0;$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

Замечание 1. Знакопеременные ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются рядами Лейбница.

Теорема Коши. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$$

Замечание 2. Теорема Коши является только достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Определение 6. Знакопеременный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из

абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд из абсолютных величин расходится, то знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Для знакочередующихся рядов применяется признак Лейбница.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится и его сумма меньше первого члена, т.е. $S < a_1$, а остаток ряда удовлетворяет неравенству $|r_n| < a_{n+1}$.

Пример 20. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2\sqrt{3}-1} - \dots$

Составим ряд их абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Так как $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$, то $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех n . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p = \frac{1}{2} < 1$).

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$, составленный из абсолютных величин расходится по первому признаку сравнения.

Применим признак Лейбница для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Условия признака Лейбница выполняются, т.к.

$$1) a_n > a_{n+1}, \text{ т.е. } \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} = 0.$$

Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, поэтому данный ряд сходится условно.

Пример 21. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$.

Решение. Исследуемый ряд является знакочередующимся. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Применим признак Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ по признаку Даламбера сходится, значит, исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 22. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2+1}{5n^2+2}$.

Решение. Исследуемый ряд является знакочередующимся. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5n^2+2}$.

Применим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{5n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Следовательно, ряд из абсолютных величин расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости.

Замечание 3. Для сходимости знакопередающего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ недостаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Условия $a_{n+1} < a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ означают, что знакопередающий ряд сходится, если абсолютная величина общего члена стремится к нулю монотонно.

Замечание 4. Признак Лейбница – это только достаточный признак, он не является необходимым, т.е. у сходящегося знакопередающего ряда абсолютная величина его общего члена может стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ и не монотонно.

Пример 23. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1}{(2n)^3} + \dots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{(2n)^3}$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, хотя и не монотонно, т.е. не выполнено условие $a_n > a_{n+1}$, т.е.

$$1 > \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^4}; \quad \frac{1}{3^4} < \frac{1}{4^3}; \dots$$

Однако данный ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд

$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \dots$, составленный из абсолютных величин данного ряда, и, каждый член которого не превосходит соответствующего члена сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($p = 3 > 1$).

§5. Приближенное вычисление с помощью рядов.

Пример 24. Найти приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n+1)!}$

с точностью до 0,001.

Решение. Запишем ряд в развернутом виде:

$$\frac{1}{1 \cdot 3!} - \frac{1}{2 \cdot 5!} + \frac{1}{3 \cdot 7!} - \frac{1}{4 \cdot 9!} + \dots$$

Данный ряд является знакочередующимся, который удовлетворяет признаку Лейбница, т.е. $a_n > a_{n+1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(2n+1)!} = 0$, следовательно, ряд сходится.

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,001, т.е. надо определить число n , равное количеству первых n членов ряда, которые надо оставить, чтобы заменить сумму ряда S его частичной суммой S_n , а остальные члены отбросить, оценив сумму отброшенных членов r_n .

По условию $|r_n| < 0,001$.

$$a_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0,167.$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 5!} = \frac{1}{240} = 0,00417.$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 7!} = \frac{1}{15120} = 0,00006 < 0,001.$$

Для получения приближенного значения суммы ряда с точностью до 0,001 надо взять сумму первых 2-х членов ряда, т.к. $r_2 < a_3 < 0,001$.

Следовательно, $S = a_1 - a_2 = 0,167 - 0,00417 \approx 0,163$.

Пример 25. Найти приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$ с точностью

до 0,01.

Решение. Запишем ряд в развернутом виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} + \dots$$

Данный ряд является знакочередующимся, удовлетворяющим условиям признака Лейбница, т.е. $\frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 2^2} > \frac{1}{3 \cdot 2^3} > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = 0$.

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Лейбница. Но этот ряд сходится абсолютно, т.к. ряд, составленный из абсолютных величин, сходится по признаку Даламбера, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$.

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,01, т.е. $\frac{1}{n \cdot 2^n} < 0,01$, $n \cdot 2^n > 100$. Следовательно, нужно взять сумму первых четырех членов ряда, т.к. $a_5 = \frac{1}{5 \cdot 2^5} = \frac{1}{160} = 0,00625 < 0,01$, то оценка для остатка будет $r_n < 0,01$ и $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0,5 - 0,125 + 0,0417 - 0,0156 \approx 0,40$.

Пример 26. Исследовать сходимость ряда и найти сумму ряда с точностью до 0,01:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} + \dots$$

Решение. Это знакочередующийся ряд, который удовлетворяет признаку Лейбница, т.е. $a_n > a_{n+1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^3} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Но этот ряд сходится абсолютно, т.к. ряд, составленный из абсолютных величин, сходится по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (обобщенный гармонический ряд, где $p=3>1$). Для того, чтобы найти с точностью до 0,01 сумму данного ряда, надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда весь остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет также меньше 0,01. Для данного ряда модуль четвертого члена $|a_4| = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0,01$.

Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых трех членов, что обеспечит заданную точность.

$$\text{Тогда } S = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} = 0,89.$$

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^3}.$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7^n \sqrt{n}}.$$

$$79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2^n}.$$

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (3^n + 1)}{n \cdot 3^n}.$$

81.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{e^{n+1}}.$$

82.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+2)}{5n+1}.$$

83.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+2}}.$$

84.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

85.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)^3}{3^{n-1}}.$$

86.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{n! \cdot 4^n}.$$

87.
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

88.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}.$$

ОТВЕТЫ

77. Расходится.

78. Сходится абсолютно.

79. Сходится абсолютно.

80. Сходится условно.

81. Сходится абсолютно.

82. Расходится.

83. Сходится условно.

84. Сходится абсолютно.

85. Сходится абсолютно.

86. Расходится.

87. Сходится условно.

88. Сходится абсолютно.

ЗАДАЧИ

Вычислить сумму ряда с заданной точностью.

89.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1}; \varepsilon = 0,01.$$

90.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3+3}; \varepsilon=0,01.$$

91.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n^2}; \varepsilon = 0,001.$$

92.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}; \varepsilon = 0,001.$$

93.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}; \varepsilon = 0,001.$$

94.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4n}{3n^3+5}; \varepsilon=0,01.$$

ОТВЕТЫ

89. 0,74.

90. 0,17.

91. 0,449.

92. 0,287.

93. 0,632.

94. 0,32.

§6. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0)^1 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots \quad (1.9),$$

членами которого являются степенные функции. Числа a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) называются коэффициентами степенного ряда.

Общий член степенного ряда будем обозначать $U_n(x) = a_n(x-x_0)^n$.

При $x_0 = 0$ степенной ряд (1.9) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2.0).$$

Ряд (1.9) называют степенным рядом по степеням $(x-x_0)$, а ряд (2.0) – степенным рядом по степеням x .

Область сходимости степенного ряда устанавливается следующей теоремой.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$),

то он сходится при всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Если же ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля утверждает, что если степенной ряд сходится при $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом x из интервала $(-|x_0|, |x_0|)$. Если же ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$.

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда (2.0) называется неотрицательное число R , такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится. Интервалом сходимости ряда (2.0) называется интервал $(-R, R)$ (рис. 1), а для ряда (1.9) – интервал сходимости $(-R + x_0, x_0 + R)$ (рис. 2).

Радиус сходимости можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \text{ отсюда следует}$$

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Следовательно, радиус сходимости определяется формулой

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Если к ряду (2.0) применить признак Коши, то получим следующую формулу для нахождения радиуса сходимости

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $R = 0$, то ряд (1.9) сходится только в одной точке $x = x_0$, а ряд (2.0) сходится только в одной точке $x = 0$.

Если $R = \infty$, то ряды (1.9) и (2.0) сходятся на всей числовой оси.

Таким образом, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R и интервал сходимости $(-R, R)$. При $x = \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда индивидуально.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда (2.0) является интервал сходимости $(-R, R)$ с возможно соединенной к нему одной или двумя точками в зависимости от того, как себя ряд на концах интервала, т.е. при $x = R$ и $x = -R$.

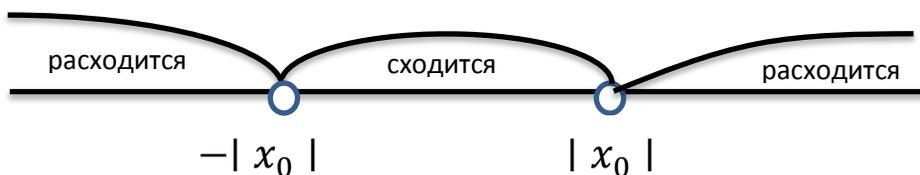


рис. 1

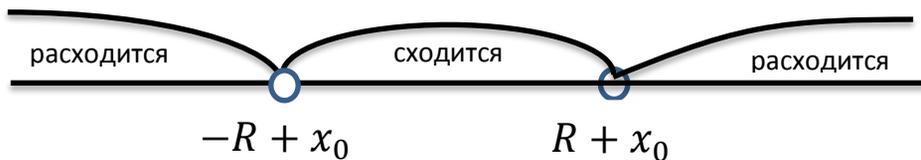


рис. 2

Пример 27. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$a_n = \frac{n!}{2^{n+1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! 2^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! 2^{n+2}}{2^n \cdot 2n!(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится только при $x - 3 = 0$, т.е. в одной точке $x = 3$.

Пример 28. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n+2}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2} 3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2} \cdot 3 \cdot 3^n} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2}} \right| = \frac{1}{3}.$$

$R = \frac{1}{3}$. Интервал сходимости ряда $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. Итак, при $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ – ряд расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала,

т.е. при $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$.

1) При $x = -\frac{1}{3}$ получим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}.$$

Это знакочередующийся ряд. Запишем его в развернутом виде

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dots$$

Применим признак Лейбница

1)
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \dots$$

2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} = 0.$$

Признак Лейбница выполняется, следовательно, ряд сходится. Проверим, как ведет себя ряд из абсолютных величин
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд, где $p = \frac{1}{3} < 1$, который расходится.

По признаку сравнения ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, а знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, следовательно, знакочередующийся ряд сходится условно.

2) При $x = \frac{1}{3}$ получим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot \frac{1}{3^n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}.$$

Этот ряд расходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Следовательно, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Пример 29. Найти область сходимости степенного ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{5^n (n+2)}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$

$$a_n = \frac{1}{5^n(n+2)}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}(n+3)}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}(n+3)}{5^n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot 5(n+3)}{5^n(n+2)} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 5.$$

Ряд сходится, если $|x - 2| < 5$;

$$-5 + 2 < x < 5 + 2;$$

$$-3 < x < 7.$$

Итак, интервал сходимости степенного ряда $(-3;7)$.

При $x \in (-3;7)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-3;7)$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

1) При $x = -3$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3-2)^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}}{(n+2)}.$$

Это знакочередующийся ряд. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+2)}$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

По признаку сравнения рядов в предельной форме имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n+2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot n}{n+2} = 5 \neq 0.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+2}$ также расходится.

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница:

$$1) a_n > a_{n+1}, \text{ т.е. } \frac{5}{n+2} > \frac{5}{n+3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+2} = 0.$$

Итак, для знакопередающего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \cdot 5$ выполнены оба условия

признака Лейбница, значит, данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин расходится, а знакопередающий ряд сходится, следовательно, данный знакопередающий ряд сходится условно.

2) При $x = 7$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-2)^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+2)}.$$

Данный ряд расходится по признаку сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (см. выше).

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $[-3; 7)$.

Пример 30. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n + 4^n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$a_n = \frac{5^n}{3^n + 4^n}; a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1} + 4^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n (3^{n+1} + 4^{n+1})}{5^{n+1} (3^n + 4^n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} (1 + (\frac{3}{4})^{n+1})}{5 \cdot 4^n ((\frac{3}{4})^n + 1)} \right| = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4 (1 + (\frac{3}{4})^{n+1})}{5 ((\frac{3}{4})^n + 1)} \right| = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ряд сходится для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{4}{5}$; т.е.

$$-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}.$$

Итак, интервал сходимости степенного ряда $(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5})$.

При $x \in \left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin \left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

1) При $x = -\frac{4}{5}$ получим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{4}{5}\right)^n}{3^n + 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{4^n}{5^n}}{3^n + 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{3^n + 4^n}.$$

Это знакочередующийся ряд. Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)} = 1 \neq 0.$$

Условие признака Лейбница не выполняется, следовательно, знакочередующийся ряд расходится.

2) При $x = \frac{4}{5}$ получим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(\frac{4}{5}\right)^n}{3^n + 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \frac{4^n}{5^n}}{3^n + 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 4^n}.$$

Применим необходимый признак сходимости
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n + 4^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $\left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Пример 31. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{x^n}{2^n}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ где } a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ тогда } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}}} =$$

$$\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}.$$

Интервал сходимости ряда $\left(-\frac{2}{e}; \frac{2}{e}\right)$.

Итак, при $x \in \left(-\frac{2}{e}; \frac{2}{e}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin \left(-\frac{2}{e}; \frac{2}{e}\right)$ – расходится.

Пример 32. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n^3 3^n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$a_n = \frac{1}{n^3 3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3 3^{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{n^3 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| = 3.$$

Получим $R = 3$. Найдем интервал сходимости степенного ряда

$$(x - 5)^2 < 3; \quad |x - 5| < \sqrt{3}.$$

Интервал сходимости ряда

$$-\sqrt{3} + 5 < x < \sqrt{3} + 5, \text{ т.е. } x \in (-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5).$$

Итак, при $x \in (-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5)$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $x = -\sqrt{3} + 5$; $x = \sqrt{3} + 5$.

1) При $x = -\sqrt{3} + 5$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3} + 5 - 5)^{2n}}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$

Этот ряд сходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле), где $p = 3 > 1$.

2) При $x = \sqrt{3} + 5$ получим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+5-5)^{2n}}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Этот ряд сходится (показано выше).

Следовательно, областью сходимости степенного ряда является закрытый промежуток $[-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5]$.

ЗАДАЧИ

Найти область сходимости степенных рядов:

95. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n!}.$

100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^{n-1}}.$

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}.$

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}.$

101. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}.$

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x+7)^n}{3^{n-1}}.$

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}.$

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}.$

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n (x+1)^n.$

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n} x^n}{4^n}.$

108. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}.$

99. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} \cdot n \ln^3 n}.$

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3n+4}.$

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{\sqrt{n+2}}.$

ОТВЕТЫ

95. $(-\infty; \infty).$

99. $[-8; -2].$

96. $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}).$

100. $[-5; 1).$

97. $(0; 6).$

101. $[-1; 1].$

98. $(-e; e).$

102. $(-\frac{5}{e}; \frac{5}{e}).$

(указание $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-\sqrt{n}} \sqrt{2\pi n}} = 1$).

103. $(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}).$

104. $(-4; -2)$.

107. $(-2; 0)$.

105. $[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$.

108. $[-2; 0)$.

106. $x = -7$.

109. $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

§7. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда на некотором промежутке, то говорят, что она разлагается в степенной ряд на этом промежутке, или степенной ряд сходится к функции $f(x)$ на указанном промежутке.

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x = x_0$ производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \quad (2.1)$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ – остаточный член формулы Тейлора (или остаток ряда), $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$, т.е. c заключено между x_0 и x .

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (2.1)$$

называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Если $x_0 = 0$, то получим ряд (2.2), который называется **рядом Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (2.2)$$

Теорема 1. Для того, чтобы ряд Тейлора (2.1) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаток ряда стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Теорема 2. (Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора).

Если производные любого порядка $n = 0, 1, 2, \dots$ функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, т.е. $|f^n(x)| \leq M$, то ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ для любого x из этой окрестности.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Пример 31. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \frac{1}{x}$ по степеням $(x - 2)$ и найти интервал сходимости полученного ряда.

Решение. Запишем ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$, где $x_0 = 2$.

Применим формулу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Вычислим значения функции и ее производных в точке $x = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(2) = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{2!}{2^3}.$$

.

$$f^n(x) = -\frac{n!}{x^{n+1}}, \quad f^n(2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Составляем ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{2!(x-2)^2}{2!2^3} - \frac{3!(x-2)^3}{3!2^4} + \dots - \frac{n!(x-2)^n}{n!2^{n+1}} - \dots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Найдём радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \right| = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x - 2| < 2$, $-2 < x - 2 < 2$;

$0 < x < 4$. Ряд сходится в интервале $(0;4)$.

Разложение функций в ряд Маклорена

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.3)$$

$$2) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.4)$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5)$$

$$4) (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (2.6)$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1 \quad (2.7)$$

$$6) \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad -1 < x < 1 \quad (2.8)$$

$$7) \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (2.9)$$

$$8) \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots, \quad -1 < x \leq 1 \quad (3.0)$$

$$9) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (3.1)$$

$$10) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (3.2)$$

Пример 33. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $f(x) = \ln(x+2)$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x=1$.

$$f(x) = \ln(x+2),$$

$$f(1) = \ln 3;$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)} = (x+2)^{-1},$$

$$f'(1) = \frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} = -(x+2)^{-2},$$

$$f''(1) = -\frac{1}{3^2};$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (x+2)^{-3},$$

$$f'''(1) = \frac{2!}{3^3};$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x+2)^{-n},$$

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{3^n}.$$

Следовательно, искомый ряд Тейлора функции $f(x) = \ln(x+2)$ имеет вид:

$$\ln(x+2) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3^2} \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^3} \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{3^n n} + \dots$$

Пример 34. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ функцию $f(x) = x^3 - 2x$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x, & f(2) &= 4; \\ f'(x) &= 3x^2 - 2, & f'(2) &= 10; \\ f''(x) &= 6x, & f''(2) &= 12; \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots,$$

получим ряд Тейлора данной функции:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x &= 4 + 10(x-2) + \frac{12}{2!} (x-2)^2 + \frac{6}{3!} (x-2)^3 = \\ &= 4 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3. \end{aligned}$$

Пример 35. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1).

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Заменим x на $\frac{x}{3}$ в формуле (3.1), тогда получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots \right); \text{ или}$$

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, т.е. $-3 < x < 3$.

Пример 36. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x, & f(0) &= 0; \\ f'(x) &= 2\sin x \cos x = \sin 2x, & f'(0) &= 0; \\ f''(x) &= 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= 2; \\ f'''(x) &= -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) &= 0; \\ f^{IV}(x) &= -2^3 \cos 2x = 2^3 \sin\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), & f^{IV}(0) &= -2^3; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n)}(x) &= 2^{n-1} \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right], & f^{(n)}(0) &= 0; \\ f^{(n+1)}(x) &= 2^n \sin\left[2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right]; \end{aligned}$$

Находим остаточный член:

$$R_n = \frac{2^n \sin\left(2c + \frac{\pi n}{2}\right)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \text{ где } c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1, \text{ т.е.}$$

$R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin\left(2c + \frac{\pi n}{2}\right)$. Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом x , а $\sin\left(2c + \frac{\pi n}{2}\right)$ – величина ограниченная, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Следовательно, функцию $f(x) = \sin^2 x$ можно представить в виде суммы ряда Маклорена:

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \dots$$

Задачу можно решить иначе. В равенстве $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \frac{2^7 x^8}{8!} + \dots$$

ЗАДАЧИ

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

$$110. f(x) = \frac{1}{x+8} \quad 113. f(x) = \cos^2 x \quad 116. f(x) = x^2 \cos \sqrt{x}$$

$$111. f(x) = \frac{1}{3-2x} \quad 114. f(x) = \frac{1}{4+3x} \quad 117. f(x) = x e^{\frac{x}{2}}$$

$$112. f(x) = 3^x \quad 115. f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$$

ОТВЕТЫ

$$110. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}} x^n, \quad (-8 < x < 8).$$

$$111. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}, \quad \left(-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}\right).$$

$$112. 1 + \frac{\ln 3}{1!} x + \frac{\ln^2 3}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!} x^3 + \dots + \frac{\ln^n 3}{n!} x^n + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$113. 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \frac{2^7 x^8}{8!} \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$114. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{4^{n+1}} x^n, \quad \left(-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}\right).$$

$$115. 5 - \frac{5^3 x^2}{3!} + \frac{5^5 x^4}{5!} - \frac{5^7 x^6}{7!} \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$116. x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^6}{8!} - \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$117. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^4 4!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

ЗАДАЧИ

Разложить в ряд Тейлора следующие функции:

118. $f(x) = \frac{1}{x+5}$ по степеням $x - 2$.

119. $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $x - 3$.

120. $f(x) = \cos x$ по степеням $x - \frac{\pi}{4}$.

121. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ по степеням $x - 2$.

122. $f(x) = 2^x$ по степеням $x - 3$.

123. $f(x) = e^{3x}$ по степеням $x - 1$.

124. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ по степеням $x - 1$.

ОТВЕТЫ

118. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{7^{n+1}} x^n, \quad (-5 < x < 9).$

119. $1 + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{(x-3)^3}{3!} - \frac{5}{16} \cdot \frac{(x-3)^4}{4!} + \dots =$
 $= 1 + \frac{x-3}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)}{2^n n!} (x-3)^n, \quad 2 \leq x \leq 4.$

120. $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!} - \dots \right].$

121. $1 - (x-2) + (x-2) - (x-2)^2 + \dots, \quad |x-2| < 1.$

122. $2^3 \left[1 + \ln 2 (x-3) + \frac{\ln^2 2}{2!} (x-3)^2 + \frac{\ln^3 2}{3!} (x-3)^3 + \dots \right], \quad -\infty < x-3 < +\infty.$

123. $e^3 \left[1 + 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} + \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \dots \right].$

124. $4 + 5(x-1) + \frac{6(x-1)^3}{3!} = 4 + 5(x-1) + (x-1)^3.$

§8. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Представление элементарных функций в виде степенных рядов позволяет применять эти ряды для приближенных вычислений. С заданной степенью точности можно вычислить значения тригонометрических функций, логарифмов, корней, определенных интегралов, которые не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, а также можно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример 37. Вычислить $\sin 12^\circ$, взяв два члена разложения функции в ряд. Оценить погрешность.

Решение. Переведем 12° в радианы:

$$\frac{\pi}{180} \cdot 12 = \frac{\pi}{15} = \frac{3,14}{15} = 0,2093.$$

Используем разложение синуса в степенной ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

который сходится на интервале $(-\infty; \infty)$.

Получим

$$\sin 12^\circ = \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!} + \dots$$

Действительно, если взять в этом равенстве два первых члена, то будем иметь приближенное равенство

$$\sin \frac{\pi}{15} \approx 0.2093 - \frac{(0.2093)^3}{6} = 0.20787,$$

погрешность которого равна сумме отброшенного знакочередующегося ряда

$$\Delta = \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^9}{9!} - \dots$$

Согласно признаку Лейбница погрешность не превзойдет по абсолютной величине абсолютного значения первого отброшенного члена ряда, т.е. a_3 , в нашем случае

$$|r_n| < a_3 = \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!} = \frac{(0.2093)^5}{5!} = 0.000003 < 0.0001.$$

Поэтому мы допускаем ошибку меньше 0,0001.

Итак, $\sin 12^\circ \approx 0,20787$.

В случае знакопостоянного ряда оценка погрешности сложнее. Во многих случаях можно использовать прием, когда ряд из отброшенных членов сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пример 38. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

Решение. Применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления интеграла не представляется возможным, так как соответствующий интеграл $\int \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ не выражается через элементарные функции. Тем не менее с помощью степенных рядов его можно вычислить с любой степенью точности.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Заменив в этом ряде x на x^2 , получим

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots}{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{5 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 5!} - \frac{1}{13 \cdot 7!} + \dots$$

Получим знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0.001, замечаем, что третий член ряда по абсолютной величине меньше 0.001. Согласно признаку Лейбница, остаток ряда не превзойдет по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда, т.е.

$$|r_n| < a_n = \frac{1}{9 \cdot 5!} = \frac{1}{1080} < 0.001.$$

Следовательно, для решения данной задачи достаточно взять сумму первых двух членов, что обеспечит требуемую точность.

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{5 \cdot 3!} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0,9667$$

Пример 39. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,6} e^{-0,4x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Заменив в этом ряде x на $-0,4x^2$, получим:

$$e^{-0,4x^2} = 1 - \frac{0,4x^2}{1!} + \frac{0,4^2x^4}{2!} - \frac{0,4^3x^6}{3!} + \frac{0,4^4x^8}{4!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^{0,6} e^{-0,4x^2} dx &= \int_0^{0,6} \left(1 - \frac{0,4x^2}{1!} + \frac{0,4^2x^4}{2!} - \frac{0,4^3x^6}{3!} + \frac{0,4^4x^8}{4!} - \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{0,4x^3}{3} + \frac{0,08x^5}{5} - \frac{0,4^3x^7}{6 \cdot 7} + \frac{0,4^4x^9}{24 \cdot 9} - \dots \right) \Big|_0^{0,6} = \\ &= 0,6 - 0,0288 + 0,0012 - 0,00004 + \dots \end{aligned}$$

Получили знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что 4-ый член ряда по абсолютной величине меньше 0,001. Согласно признаку Лейбница, остаток ряда не превзойдет по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда, т.е.

$$|r_n| < a_4 = 0,00004 < 0,001$$

Следовательно, для решения данной задачи, достаточно взять сумму первых 3-х членов ряда, что обеспечит требуемую точность

$$\int_0^{0,6} e^{-0,4x^2} dx \approx 0,6 - 0,0288 + 0,0012 = 0,5724$$

Пример 40. Вычислить $\ln 1,04$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд, т.е.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

В нашем случае

$$\ln 1,04 = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \dots$$

Получим знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда, замечаем, что 3-й член ряда по абсолютной величине меньше 0,0001. Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, достаточно взять сумму первых двух членов ряда, что обеспечит требуемую точность.

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 \approx 0,0392.$$

Пример 41. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 0,0001.

Решение. Для вычисления логарифмов эффективна формула

$$\ln(t+1) = \ln t + 2 \left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}} \right].$$

$$R_n = 2 \left[\frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \dots \right].$$

Заменяв каждый из множителей $(2n+3)$; $(2n+5)$; $(2n+7)$; ... меньшим числом $2n+1$, получим неравенство

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \left[\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \dots \right]$$

Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в квадратных скобках:

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}}}{1 - \frac{1}{(2t+1)^2}} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1} [(2t+1)^2 - 1]} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1} \cdot 4t(t+1)}, \text{т.е.}$$

$$R_n < \frac{1}{2(2n+1)t(t+1)(2t+1)^{2n-1}}.$$

$$\ln 5 = \ln(4+1) = \ln 4 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \dots \right);$$

$$R_n < \frac{1}{2(2n+1) \cdot 4(4+1)(2 \cdot 4+1)^{2n-1}} = \frac{1}{40(2n+1)9^{2n-1}}$$

$$\text{Если } n = 1, \text{ то } R_1 < \frac{1}{40 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{1}{1080};$$

$$\text{если } n = 2, \text{ то } R_2 < \frac{1}{40 \cdot 5 \cdot 9^3} = \frac{1}{10000}.$$

Значит, достаточно взять два члена ряда, чтобы вычислить с заданной точностью. Следовательно,

$$\ln 5 \approx 2 \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} \right) \approx 1,38628 + 0,22222 + 0,00090 = 1,60940.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить значения функции с точностью до 0,0001:

125. $\cos 20^\circ$.

126. $\sin 80^\circ$.

127. $\sqrt[3]{e}$.

ОТВЕТЫ

125. 0,9397.

126. 0,9868.

127. 1,3956.

ЗАДАЧИ

Вычислить определенные интегралы с точностью до 0,001:

128. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$.

129. $\int_0^{0,8} \frac{\sin 1,25x}{x} dx$.

130. $\int_0^{0,4} e^{-1,7x^2} dx$.

131. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

132. $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$.

ОТВЕТЫ

128. 0,608.

129. 0,946.

130. 0,367

131. 0,764.

132. 0,006.