М.П. Дымков
доктор физико-математических наук, профессор
БГЭУ (Минск)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ В УСЛОВИЯХ ПРОСТЕЙШЕГО РЫНКА

В первой части работы описаны результаты компьютерного эксперимента по моделированию процесса простейшей торговли в условном обществе. Во второй части работы приведена линейная дискретная двухпараметрическая (2Д) модель, с помощью которой можно описать распределение доходов членов общества, вовлеченных в простейшие торговые операции. Для данной модели рассмотрены традиционные для теории динамических систем задачи управления, изучены некоторые качественные характеристики этих систем.

The paper presents 2D system theory approach to simulate income distribution of people involved in the simplest marketing action. The market case represents the collisions/contacts for persons where the «two-way exchange» of money is happened. The aim of this paper is to simulate these effects using both computer and linear discrete dynamical models. In particular, an 2D model is used to describe income distribution among people involved in market relations. Also, for the introduced market model some stabilization and optimization problems are discussed.

Введение

Проблема неравномерного распределения доходов вызывает постоянный интерес в силу ее особой значимости для любого общества. Систематическое изучение данного вопроса, по-видимому, берет начало с исследований В. Парето. В частности, анализируя собранные статистические данные о распределении доходов в различных странах с XVI по XIX вв., он обнаружил, что распределение богатства в обществе подчиняется определенному закону: с удвоением размера контролируемой собственности/богатства количество людей, достигших соответствующего уровня, сокращается в геометрической прогрессии, причем с примерно постоянным множителем. Однако В. Парето изучал статистику доходов только богатых и очень богатых людей того времени, в то время как статистика людей с малыми и средними доходами была просто никому не известна. Когда же стали анализировать распределение доходов «простых» людей, то оказалось, что эта зависимость очень близка к экспоненциальной и имеет вид

$$N(x)=\frac{1}{M}e^{-\frac{x}{M}}\Delta x, \qquad (1)$$

где $N(x)$ — относительная доля людей, обладающих состоянием (в денежном выражении) больше x, но меньше $x + \Delta x$; M — средний доход «простых» людей.

Было подмечено [1], что эта формула похожа на формулу Гиббса—Максвелла, описывающую долю молекул газа, которые имеют заданную температуру M и механическая энергия которых колеблется в пределах $(x, x + \Delta x)$. Приведенные физические и экономические процессы имеют общее: в обоих случаях соблюдаются законы сохранения энергии. Общая механическая энергия при соударении двух молекул не изменяется, а переходит от одной молекулы к другой, так и в случае торговли, сумма денег продавца и покупателя не изменяется, а только переходит от одного к другому.

Цель данной работы — представить некоторые приложения математической теории управления дискретными динамическими системами в задачах экономического содержания. В первой части работы описаны результаты компьютерного эксперимента по моделированию процесса простейшей торговли в условном обществе. Во второй части работы приведена линейная дискретная двухпараметрическая (2Д) модель, с помощью которой можно описать распределение доходов членов общества, вовлеченных в простейшие торговые операции. Для данной модели рассмотрены традиционные для теории динамических систем задачи управления, изучены некоторые качественные характеристики этих систем.

Компьютерное моделирование простейшего рынка

В работе с помощью компьютерного моделирования построены графические диаграммы, иллюстрирующие динамику распределения доходов в условном обществе. А именно, как и в [1], получено[1], что простейшие торговые операции в течение длительного периода приводят к тому, что в руках меньшей части общества оказывается бóльшая часть его богатства.

Предположим, что в торговые операции моделируемого рынка вовлечено конечное число, например, 10 000 граждан. Заметим, что увеличение количества членов общества не оказывает существенного влияния на конечный результат, кроме роста использованного компьютерного времени при проведения расчетов. Таким образом, 10 000 человек выглядят вполне разумной и удобной величиной для моделирования.

Чтобы начать торговаться (продавать и покупать), участники должны иметь какой-то стартовый капитал и общие правила торговли. Поэтому первоначально раздадим всем гражданам по состоянию, эквивалентному, например, 100 р., и введем следующие правила торговли: а) один раз в день каждого гражданина оповещают о том, с кем ему сегодня встречаться для торговли, этот список генерируется компьютером и является случайным; б) когда происходит запланированная встреча продавца и покупателя, компьютер случайным образом определяет того, кто получает выгоду от торговли, и ее размер (он равен цене товара x), соответственно, богатство «неудачника» уменьшается на ту же величину; в) выгода от торговли может быть: В1 — постоянной величиной, как, например, в некоторых видах лотереи; В2 — случайно определяемой долей богатства «неудачника»; В3 — случайно определяемой долей суммарного богатства участников сделки.

Рассмотрим сначала такой вид торговли, когда каждый день продавец и покупатель случайным образом встречаются на рынке товара x. Пусть каждый продавец предлагает этот товар по цене 1 р. Следовательно, если произошла покупка товара, денежное богатство покупателя уменьшилось на 1 р., а продавца — увеличилось на эту же величину. Чтобы упростить анализ, мы абстрагируемся на некоторое время от товара и будем полагать, что при встрече двух участников рынка один из них отдает другому 1 р. (как будто бы покупает товар x). Назовем такое условное общество «В1» и всем его членам дадим по 100 р. Приступим теперь к компьютерной симуляции описанной торговли. На рис. 1 показано распределение богатств среди 10 000 членов общества «В1» на следующий день после начала торговли. Здесь по оси ординат отложено количество членов общества, обладающих богатством, обозначенным по оси абсцисс в рублях. Видно, что несколько тысяч членов общества увеличили или уменьшили свое состояние на один, два или даже три рубля. Приблизительно треть всех членов общества, похоже, вообще не участвова-

[1] Эксперимент из [1] повторили и обобщили студенты факультета МЭО БГЭУ В.О. Хропик, В.А. Карпинский, А.Л. Терещенко.

ли в торговле, так как в случайной выборке компьютера их номеров не оказалось, а другим пришлось поторговаться с соседями по обществу два или даже три раза.

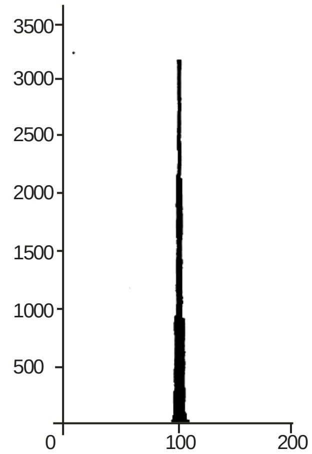

Рис. 1. Распределение денег через день после начала торговли

Однако следующие случайные выборки, очевидно, компенсируют этот «недочет», и, скажем, за год почти все члены общества сходят на импровизированный рынок по одному разу. На рис. 2 показано, как изменилось распределение богатства через 100 дней (или приблизительно через 3 месяца). Общество «В1» слегка расслоилось, и богатство нескольких самых удачливых его членов (150 р.) уже в три раза превышает состояние его самых бедных граждан (50 р.).

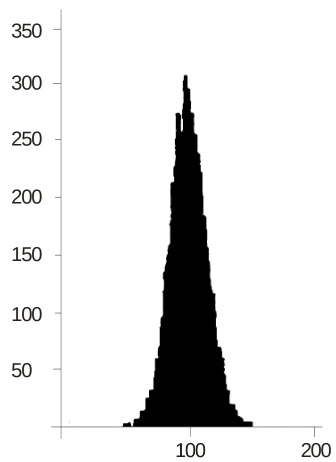

Рис. 2. Распределение денег в обществе «В1» через 100 дней

Заметим, что пик графика, или гистограммы, как и на рис. 1, находится на отметке 100 р., график по-прежнему остался симметричным и лишь стал шире, соответственно уменьшившись по высоте. Иными словами, 100 р. и через 3 месяца остались наиболее вероятной величиной состояния в обществе, а количество обедневших (площадь гистограммы слева от 100 р.) по-прежнему равно количеству обогатившихся (площадь гистограммы справа от 100 р.).

Гистограмма, иллюстрирующая распределение состояний в обществе «В1» через 3 года торговли (1000 дней), показана на рис. 3.

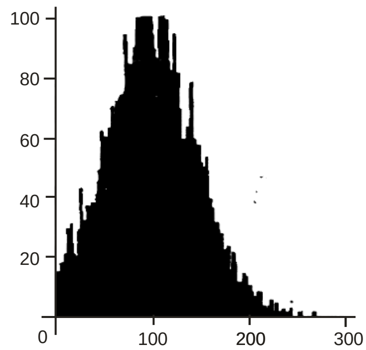

Рис. 3. Распределение денег через 1000 дней

Как видно, за это время расслоение в обществе стало еще более заметным, в нем даже появились граждане (их около 15), не имеющие никаких средств. Однако они могут принимать участие в актах торговли благодаря возможности брать взаймы. Но по-прежнему наиболее вероятным состоянием члена общества «В1» остается богатство в 100 р., и соответствующий график выглядит таким же симметричным. Со временем количество полностью разоренных продолжает увеличиваться: через 2000 дней (или через 5,5 лет) после начала жизни общества «В1» оно уже составляет более 40 человек (рис. 4). Однако гистограмма все еще имеет различимый пик на отметке 100 р. Через 3000 дней, как показывает гистограмма (рис. 5), количество полностью разоренных членов общества «В1» уже близко к 60, а распределение не имеет отчетливого максимума.

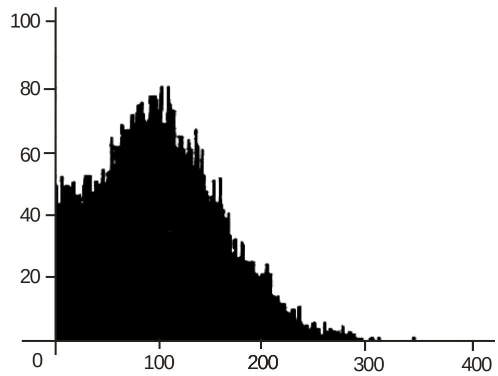

Рис. 4. Распределение денег через 2000 дней

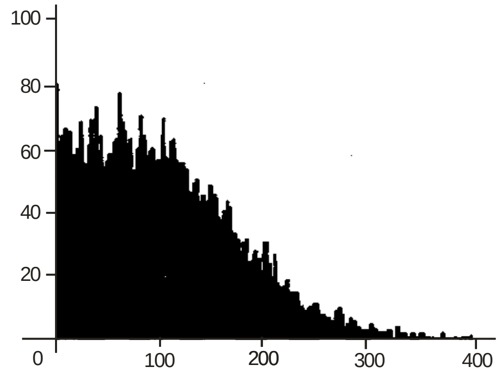

Рис. 5. Распределение денег через 3000 дней

Кроме того, гистограмма уже не выглядит симметричной и представляет собой монотонно убывающую функцию. Распределение богатств через 20 000 дней (или 55 лет) после начала торговли представлено на рис. 6.

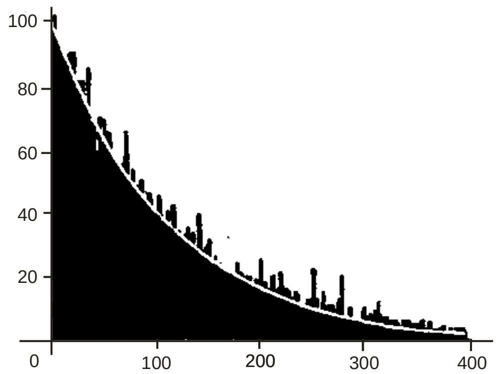

Рис. 6. Распределение денег через 20 000 дней после начала торговли

Отметим сначала, что это распределение практически не отличается от распределений, полученных после 5000 или 10 000 дней. Поэтому можно полагать, что распределения, соответствующее 100 000 дням или даже 1 млн дней, тоже не будут отличаться от показанной на рис. 6 гистограммы.

Из рис. 1—6 видно, что в течение первой тысячи дней случайный обмен рублями между гражданами приводит к расплыванию (размыванию) первоначального пика распределения, но его максимум остается на прежнем месте. Однако уже через 2000 дней распределение богатств своим левым (нищим) краем наталкивается на вертикальную ось, к которой начинают «прилипать» точки. В результате количество людей с малым состоянием начинает непропорционально расти, и распределение становится экспоненциальным. Таким образом, торговые отношения в обществе приводят к такому перераспределению богатств в нем, что гистограмма становится похожей на экспоненту (см. белую кривую на рис. 6).

Этот эксперимент был повторен около 80 раз, и каждый раз результат был одинаковый: график распределения всегда имел экспоненциальный вид. Данные результаты свидетельствуют о том, что функционирование элементарного рынка при вышеуказанных допущениях в долгосрочном периоде неизбежно приводит в увеличению числа обедневших участников и уменьшению числа «счастливчиков». Другими словами, количество бедных растет, а богатых падает. Причем основная масса денег скапливается в руках нескольких участников. Но этот процесс продолжается не бесконечно, иначе бы остался только один «миллионер», а все остальные потеряли свои сбережения и стали «бедняками». Об этот свидетельствует тот факт, что с увеличением количества осуществляемых на рынке сделок (в два, десять, пять тысяч раз), кривая распределения (см. рис. 6) остается относительно стабильной.

Таким образом, эксперимент показал, что в долгосрочном периоде распределение доходов стремится к определенному равновесному состоянию в виде кривой, имеющей экспоненциальный характер. В реальности накопленные денежные богатства людей различны. Поэтому с целью приблизить модель к реальности некоторые из допущений, принятых в описанной выше модели, были ослаблены. В частности, считается, что сумма денег у каждого участника до начала торговли не является фиксированной. В алгоритме это условие можно определить следующим образом: компьютер с помощью генератора случайных величин присваивает до начала торговли каждому участнику рынка любую сумму денег в интервале, например, от 70 до 110 р. В этом случае графическая интерпретация состояния общества «В1» будет иметь вид, как на рис. 7. Компьютерные расчеты для этого случая дали результат, аналогичный предыдущему случаю (рис. 8).

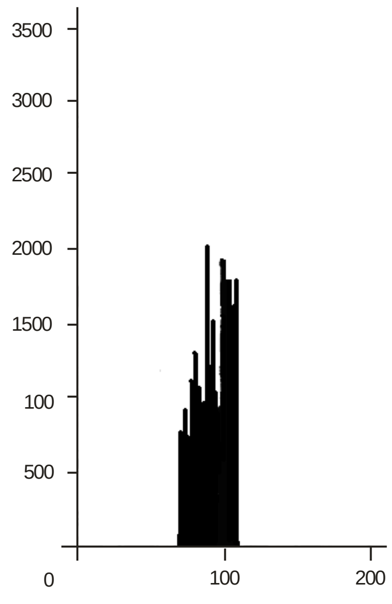

Рис. 7. Распределение денег до начала торговли

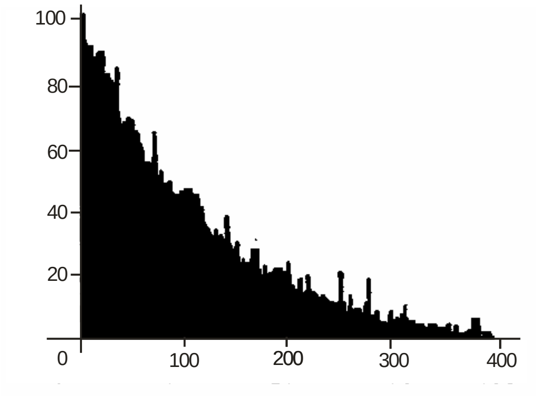

Рис. 8. Распределение денег через 20 000 дней

Компьютерная симуляция процесса накопления и распределения доходов условных торговых обществ осуществлялась при самых различных начальных ситуациях. В частности:

1) при равномерном распределении богатств перед началом торговли, т.е. когда доля людей, имеющих богатство x, не зависит от его величины;

2) при искусственном делении всего общества перед началом торговли на несколько подобществ, внутри которых доходы одинаковы;

3) в ситуации В2, когда выигрыш может составлять случайную долю состояний граждан;

4) в ситуации В3, когда выигрыш определяется долей суммарного богатства участников сделки.

Кроме того, была проанализирована и смоделирована ситуация, когда на рынке присутствует не один товар, а несколько (до 10), каждый из которых имеет свою цену. Компьютер случайным образом определял, каким товаром торгует выбранный продавец. И результаты оказались идентичны предыдущим — экспоненциальный характер распределения при относительно большом количестве сделок на рынке в долгосрочном периоде.

Двухпараметрическая (2Д) модель простейшего рынка

Пусть торговое сообщество состоит из N членов (не исключается случай, когда $N \to \infty$). Предположим, что члены общества участвуют в простейшей торговле. Для того, чтобы каждый имел возможность торговать, считаем, что в начальный момент все члены общества имели первоначальный капитал. Кроме того, установим следующие простейшие правила торговли: на каждый день торговли количество лиц, список выбранных лиц и порядок встреч для торговли определяются случайным образом; когда происходит запланированная встреча, лицо, получающе «выгоду» от торговли и ее размер, определяется также случайно. «Выгода» от торговли может быть постоянной величиной (например, при «неисправном» кассовом аппарате) либо случайно определяемой долей богатства неудачника или суммарного богатства продавца и покупателя и др. Ниже приводится формальная модель такой торговли.

Обозначим через $X(m, t)$ количество членов общества, суммарное состояние которых после t дней торговли равно m, m = 0, 1, 2, 3, … . Тогда величина $p(m,t) = \dfrac{X(m,t)}{N}$ означает относительную долю общества или вероятность найти в обществе тех, у кого ровно m рублей после t дней торговли. Можно показать, что изменение величины $p(m, t)$ определяется уравнением

$$p(m,t+1) = p(m+1,t) + (p(0,t)-1)(p(m,t) - p(m-1,t)) \cdot \tag{2}$$

Если предположить, что для каждого m, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, при $t \to \infty$ существует предельное значение $p(m, \infty)$, то можно доказать, что разностное уравнение (2) имеет экспоненциальное решение вида (1).

Приведенная выше модель при некоторых дополнительных соглашениях (например, в случае «банкротства» участник имеет возможность получить кредит и быть допущенным к торговле) представляет собой частный случай следующей линейной двухпараметрической системы управления [2—6]:

$$x(t+1,m) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(t,m+i) + Bu(t,m), t \in Z_+, m \geq 0, \tag{3}$$

заданной на пространстве функций, определенных на целочисленной решетке $(t, m) \in Z_+^2$, где $x(t,m) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t,m) \in R^r$ — управляющие воздействия, A_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ и B — заданные $(n \times n)$ и $(r \times n)$ матрицы соответственно, N — некоторое натуральное число. Для нахождения состояния системы (3) необходимы начальные данные, которые зададим в виде

$$x(0, m) = \varphi(m), \quad m \in Z_+, \tag{4}$$

где φ — известная функция.

Отметим, что введение многомерного вектора состояний $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin R^n$ в модели торговли (2) можно интерпретировать как деление сообщества на подклассы, например, в соответствии с их социальным статусом и т.п.

Правая часть системы управления (3) порождает оператор сдвига [2, 4, 10] $D: l^2(Z_+, R^n) \to l^2(Z_+, R^n)$, задаваемого формулой

$$(D\varphi)(s) = \sum_{i=0}^{N} A_i \varphi(s+i), \quad s \in Z_+, \tag{5}$$

где $l^2(Z_+, R^n)$ — пространство последовательностей из R^n суммируемых с квадратом.

Исследование качественных характеристик системы управления (3), таких как устойчивость, стабилизируемость, управляемость, наблюдаемость и других, существенным образом опирается на свойства введенного выше оператора сдвига. Отметим, что свойства этого оператора зависят от тех пространств, в которых он определен. Пространства квадратичных последовательностей являются естественными при решении задач оптимизации с квадратичными функционалами, которые и рассматриваются в данной работе.

Оператору сдвига (5) поставим в соответствие его представление $D(z)$ в кольце полиномиальных матриц по формуле $D(z) = \sum_{i=0}^{N} A_i z^i$. Можно показать, что имеет место следующее утверждение [2, 3]:

Лемма 1. Оператор сдвига $D: l^2(Z_+, R^n) \to l^2(Z_+, R^n)$ биективен тогда и только тогда, когда *rank* $D(z) = n$ $\forall z \in C, |z| \le 1$.

Приведенное выше утверждение также является следствием инъективности и сюръективности [8] введенного оператора сдвига, которые можно также использовать при изучении структурных характеристик данной системы управления. В частности, к числу таких характеристик, важных с практической точки зрения, относятся свойства управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и устойчивости объекта управления [6, 8]. Некоторые факты, касающиеся перечисленных свойств систем (2, 3), приводятся ниже.

Управляемость в широком смысле слова понимают как возможность перевести объект управления из одного состояния в любое другое. Наличие такого свойства является важной качественной характеристикой экономической системы. Формальное определение управляемости в данном случае может быть дано следующим образом [2]:

Определение 1. Говорят, что система (3) управляема, если существует такое целое число $t_0 \in Z_+$, что для любой пары функций $\alpha \in s(Z_+, R^n)$ и $\beta \in s(Z_+, R^n)$ ($s(Z_+, R^n)$) обозначает пространство всех последовательностей из R^n) найдется допустимое управление $u_{\alpha,\beta} \in s(Z_+, R^m)$, $t = 0, ..., t^0 - 1$, $s \in Z_+$, такое, что $x(t_0, s, \alpha, u_{\alpha,\beta}) = \beta(s)$, $s \in Z_+$, где $x(t, s, \alpha, u_{\alpha,\beta})$ обозначает решение системы уравнений (3), соответствующее начальному условию α и управлению $u_{\alpha,\beta}$.

Теорема 1. Система (3) управляема тогда и только тогда, когда *rank* $\{B, D(z)B, \dots, D(z)^{n-1}(z)B\} = n$ для некоторого $z \in C$.

Предположим, что динамическая система (3) имеет выходную функцию вида

$$y(t, s) = Cx(t, s), \tag{6}$$

где C — заданная $(r \times n)$ матрица.

В ряде случаев, когда, например, невозможно прямое измерение состояния системы, требуется по значениям выходной функции восстановить состояние (чаще всего исходное) системы.

Определение 2. Говорят, что система наблюдаема по выходу (6), если существует такое целое число $t_0 \in Z_+$, что из условия

$$Cx(t, s) = 0 \quad \forall\ (t, s), s \in Z_+, 0 \le t \le t_0 \tag{7}$$

следует

$$\varphi(s) = 0 \quad \forall\ (s), s \in Z_+, \tag{8}$$

где φ — начальное состояние (4).

Теорема 2. Система (3) наблюдаема по выходу (6) тогда, и только тогда, когда

$$rank\ \{C^T, D^T(z)C^T, \dots, D^T(z)^{n-1}(z)C^T\} = n \text{ для всех } z \in C. \tag{9}$$

Для модели (2) простейшего рынка функция $u(t, m)$ может быть интерпретирована как управляющие воздействия на процесс торговли с целью обеспечения «некоторого желаемого» уровня доходов. Такими воздействиями могут быть, например, меры правительства в области налоговой политики, кредитования, организации фондов поддержки и т.д. Интересными с практической точки зрения являются функции управления $u(t, m)$, которые зависят от текущего состояния объекта $x(t, m)$, достигнутого в момент (t, m), а также от предыдущих состояний, достигнутых в моменты $(t, m + i)$, $i = 1, 2, \ldots, L$, где L — некоторое заданное число. Другими словами, требуется найти управление в виде обратной связи

$$u(t, m) = \sum_{i=0}^{N} K_i x(t, m+i). \qquad (10)$$

Тогда задача стабилизации может быть сформулирована следующим образом: найти матрицы K_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, такие, что замкнутая обратными связями система вида

$$x(t+1, m) = \sum_{i=0}^{N} (A_i + BK_i) x(t, m+i) \qquad (11)$$

является устойчивой. Устойчивость системы будем понимать так, как это определено, например, в [6].

Определение 3. Будем говорить, что система (3) (управление отсутствует) устойчива, если любое ее решение $x(t, m)$, порожденное ограниченным начальным условием $x(0, m) = \phi(m)$, $m \geq 0$, равномерно для всех $m \geq 0$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, m) = 0$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. 1) Система (3) устойчива тогда и только тогда, когда

$$\det(D(z) - \lambda I) \neq 0 \text{ для всех } \|z\| \leq 1 \| \lambda \| \geq 1. \qquad (12)$$

2) Если система (3) управляема, то существует такое целое число $L \geq N$, что система (3) стабилизируема с помощью управлений в форме обратной связи вида

$$u(t, m) = \sum_{i=0}^{L} K_i x(t, m+i).$$

Таким образом, последнее означает, что при решении задачи стабилизации структура исходной динамической системы, вообще говоря, нарушается, так как система требует дополнительных состояний $x(t, m + N + 1), \ldots, x(t, L)$, $L > N$. Другими словами, для стабилизации системы (3), а значит, и простейшего рынка (2), надо использовать регуляторы более высокого порядка, чем исходная система.

Перейдем теперь к изучению оптимизационных задач. В модели (3) можем считать, что заранее предписаны желательное значение вектора состояний $x^*(t, m)$ (например, уровень суммарного дохода), а также желательное (или приемлемое на этапе предварительного планирования) значение управляющих воздействий $u^*(t, m)$ (например, меры правительства по поддержке населения через ставки налогов, социальные фонды поддержки, кредиты и т.п.). В модели (3) можно также допустить переменные вида $x(t, -m)$ с отрицательными значениями второго параметра, что можно трактовать как возможность для участников рынка брать, например, деньги в долг (кредиты и т.д.). В этом случае можно сформулировать следующую задачу оптимизации: найти такие управляющие воздействия $u^0(t, m)$, что соответствующее решение системы уравнений

$$x(t+1, m) = \sum_{i=-N}^{N} A_i(t, m+i) + Bu(t, m), \quad t = 0, 1, \ldots, T; \quad m \geq 0 \tag{13}$$

с начальными данными вида (4) минимизирует отклонение от предписанных значений, которые задаются функционалом вида

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T} \sum_{m=0}^{\infty} Q[x(t, m) - x^*(t, m)]^2 + R[u(t, m) - u^*(t, m)]^2 \to \min. \tag{14}$$

В работе получены различные представления оптимального решения, а именно операторное, посредством двойственных переменных, в виде обратной связи. Их наличие дает возможность выбрать наиболее удобный в зависимости от условий, в которых требуется принимать решение.

Пусть T обозначает горизонт планирования (не исключается случай $T \to \infty$). Как и ранее, $l^2(R^n)$ и $l^2(R^m)$ обозначают пространство суммируемых с квадратом последовательностей в R^n и R^m соответственно. Обозначим через $u^0 = \{u_t^0, t = 0, 1, \ldots, T\}, u^0 \in (l^2(R^m))^{T+1}\}$, где $u_t^0 = \{u^0(t, 0), y(t, 1), \ldots\} \in l^2(R^m)\ \forall t,\ \phi\{\phi(0), \phi(1), \ldots\} \in l^2(R^n)$.

Можно показать [3, 9], что решение сформулированной задачи можно записать в операторной форме как

$$u^0 = -\left(R + L^*QL\right)^{-1} L^*Q\phi. \tag{15}$$

Здесь оператор $L : l^2(R^m))^{T+1} \to l^2(R^n))^{T+1}$ задается формулой

$$(L\gamma)_t = B\gamma_{t-1} + AB\gamma_{t-2} + \ldots + A^{t-1}B\gamma_0,\ (L\gamma)_0 = 0,\ t > 0. \tag{16}$$

Оператор $A : l^2(R^n) \to l^2(R^n)$ есть $(A\alpha)(m) = \sum_{i=-N}^{N} A_i\alpha(m+i),\ m \geq 0,$ а операторы R, Q определяются очевидным образом посредством матриц R, Q (в целях экономии мы сохранили их обозначения для соответствующих им операторов). Далее нам понадобится сопряженный оператор L^*, который определяется по формуле

$$\left(L^*\beta\right)_t = B^*\beta_{t+1} + B^*A^*\gamma_{t+2} + \ldots + B^*A^{*T-t-1}\gamma_T, \tag{17}$$

где $A^*: l^2(R^n) \to l^2(R^n)$ — сопряженный оператор, который задается выражением $(A^*)(\psi) = \sum_{i=-N}^{N} A_i^* \psi(m-i)$; A_i^* — матрица, сопряженная к матрице A_i.

Полученное операторное представление оптимального решения неудобно и трудно реализуемо в практической работе. Поэтому ниже предлагаются другие формы представления найденного решения.

Теорема 4. Оптимальное управление в задаче (13), (14) задается формулой

$$u^0(t, m) = R^{-1}B^T z(t, m),\ t = 1, \ldots, T;\ m \geq 0,$$

где $z(t, m)$ — решение следующей краевой задачи;

$$x(t+1, m) = \sum_{i=-N}^{N} A_i x(t, m+i) - BR^{-1}B^T z(t, m),\ x(0, m) = \varphi(m),\ m \in Z_+,$$

$$z(t, m) = \sum_{i=-N}^{N} A_i^T z(t+1, m-i) + Qx(t+1, m),\ z(T, m) = 0,\ m \in Z_+$$

с граничными условиями вида $x(0, m) = \varphi(m)$, $z(T, m) = 0$, $m \in Z_+$.

Горизонт планирования T может быть достаточно большим, так что можно допустить, что $T \to \infty$. При некоторых предположениях можно доказать следующее утверждение [9].

Теорема 5. Пусть $T \to \infty$, тогда оптимальное в задачах (13), (14) управление представимо в виде

$$u_t^0 = -B^* P x_t^0,\ t > 0, \tag{18}$$

где $x_t^0, t \in Z_+$ — единственное решение уравнения

$$x_{t+1} = (A - BB^*P)x_t,\ x_0 = \varphi, \tag{19}$$

а линейный ограниченный оператор $P: l^2(E) \to l^2(E)$ удовлетворяет уравнению

$$P = (R + A^*P)(A - BB^*P). \tag{20}$$

При этом минимальное значение функционала равно $I^0 = (P\varphi, A\varphi)$.

Еще один способ представления оптимального решения в частотной области дается следующей теоремой.

Теорема 6. Преобразование Фурье $U_t(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} u^0(t, s) e^{-is\omega}$, $\omega \in [0, 2\pi]$ для оптимального в задачах (13), (14) управления $u^0(t, s)$ (для $T \to \infty$) представимо в виде $U_t(\omega) = K(\omega)X_t(\omega)$, где $X_t(\omega)$ — преобразование Фурье оптимальной траектории системы

$x^0(t, s)$, $K(\omega) = -[R + B^*P(\omega)B]^{-1}BP(\omega)A(\omega)$, $A(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\omega} A_k$. Здесь P(ω), $\omega \in [0, 2\pi]$, удовлетворяет уравнению

$$P(\omega) = Q + A^*P(\omega)A(\omega) - A^*P(\omega)B\left[R + B^*P(\omega)B\right]^{-1}B^*P(\omega)A(\omega),$$

а минимальное значение функционала качества равно

$$J(u^0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(X_0(\omega), P(\omega)X_0(\omega)\right)d\omega .$$

Замечание. Можно показать, что $K(\omega)$ разложимо в ряд Лорана и, следовательно, обратное преобразование Фурье, примененное к функции $U_t(\omega) = K(\omega)X_t(\omega)$, доказывает, что оптимальное управление в исходном пространстве состояний можно представить в виде $u(t, m) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K_j x(t, m + j)$, где K_j — коэффициент разложения в ряд Лорана функции $K(\omega)$.

Литература

1. *Богданов, К.* Путешествуем вместе с физикой / К. Богданов // Приложение к журналу «Квант». — 2006. — Т. 98. — С. 159—171.
2. *Гайшун, И.В.* Многопараметрические системы управления / И.В. Гайшун. — Мiнск: Навука i тэхнiка, 1996.
3. *Дымков, М.П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М.П. Дымков. — Минск: БГЭУ, 2005.
4. *Dymkov, M.* Constrained Optimal Control Theory for Differential Linear Repetitive Processes / M. Dymkov, E. Rogers, K. Galkowski, S. Dymkou // SIAM Journal Control and Optimization. — 2008. — Vol. 47. — № 1. — P. 396—420.
5. Optimal Control of Non-Stationary Differential Repetitive Processes / M. Dymkov [et all] // Integral Equations and Operator Theory. — 2008. — Vol. 60. — P. 201—216.
6. Exponential stability of discrete linear repetitive processes / M.P. Dymkov [et al.] // International Journal of Control. — 2002. — Vol. 75(12). — P. 861—869.
7. *Sethi, S.* Optimal Control theory: applications to management science and economics / S. Sethi, G. Thompson. — Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
8. Z-transform and Volterra operator based approach to controllability and observability of discrete linear repetitive processes / M. Dymkov [et al.] // Multidimensional Systems and Signal Processing. — 2003. — Vol. 14. — № 4. — P. 365—395.
9. *Дымков, М.П.* Линейно-квадратичные задачи оптимизации композитных дискретных 2Д систем управления / М.П. Дымков, И.В. Гайшун // Автоматика и Телемеханика. — 2002. — № 2. — С. 71—83.
10. *Dymkov, M.* Linear Optimal Control Problem for Discrete 2D Systems with Constraints / M. Dymkov // Mathematical Methods of Operations Research. — 1998. — Vol. 47. — № 1. — P. 117—129.

Статья поступила в редакцию 21.12.2013 г.