Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. И. Астровский

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

$$y = f(x), \quad y' = \frac{df}{dx}, \quad E_x[y] = \frac{df}{dx}\frac{x}{f(x)};$$

$$u = u(x_1, x_2), \quad M_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad M_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2};$$

$$u(x_1, x_2) \longrightarrow \max_{x_1, x_2},$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq K, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

$$A = (a_{ij}), \quad x = Ax + y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$$

$$Q = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad K \geq 0,\ L \geq 0.$$

Минск БГЭУ 2015

Астровский, А. И.

А91 Лабораторный практикум по математической экономике : учеб. пособие / А. И. Астровский — Минск : БГЭУ, 2015. — 48 с.

Описаны лабораторные работы по дисциплине «Математическая экономика», которые включают разделы математической теории потребления, теории производственных функций, статической модели Леонтьева, а также применение теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Описаны простейшие приемы решения математических задач в системе Mathcad.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начинающий не должен смущаться, если он обнаружит, что у него не хватает предварительных знаний даже для чтения предварительных сведений
П. ХАЛМОШ

Развитие экономической науки за последнее время проходит под флагом мощного вторжения в нее высшей математики. Исключительную роль математики и в других отраслях знания уже давно осознали гениальные исследователи в области экономической науки. По свидетельству Поля Лафарга, «К.Маркс считал, что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой.» Современный специалист должен хорошо владеть основными математическими понятиями, идеями и методами исследования задач, принятия решений на основе математического моделирования.

Математические модели и методы их исследования, широкое применение информационных технологий открывают новые возможности для успешного использования силы и мощи математических понятий в различных областях человеческой деятельности.

Для специалистов по экономике и управлению математика в большей мере является инструментом обработки и анализа информации, принятия решений и управления. Овладение основными математическими понятиями и методами позволит будущему специалисту свободно ориентироваться в разнообразных математических моделях и методах, успешно применять их для рационального и даже оптимального решения сложных экономических задач, активно осваивать и использовать современные информационные технологии.

Современные экономические процессы слишком сложны, поэтому для их изучения создают модели — приблизительные копии реальных процессов. С одной стороны, эти модели должны быть доступны для изучения, что влечет определенные упрощения и предположения. Но с другой — желательно, чтобы выводы, полученные при исследовании моделей, распространялись на реальные процессы и объекты. Следовательно, модель должна отражать их существенные черты. Таким образом, построение моделей во многом является искусством. Чем удачнее будет подобрана модель, тем лучше она будет отражать существенные черты реального объекта и, следовательно, полезнее будут выводы и рекомендации, вытекающие из исследования этой модели. Именно через создание и изучение математических моделей математика применяется в научных исследованиях, различных областях человеческой деятельности, в том числе и в экономике.

Существует широко распространенное заблуждение, что математика полезна для приложений лишь постольку, поскольку она дает средства для вычислений. На самом деле математика играет гораздо более важную роль. Когда создается удачная математическая модель физического явления или экономического процесса, которая позволяет делать вычисления и предсказания, то сама математическая структура этой модели открывает новые стороны изучаемого явления или процесса. Иными словами, когда, например в экономике, математическая модель удачна, то естественно думать об экономических величинах на языке математического аппарата и интерпретировать сходные процессы и явления на языке той же модели.

В результате исследования математической структуры модели можно существенно расширить представление об экономическом или физическом процессе. Примером удачных математических моделей может служить модель линейного программирования. Математические уравнения, созданные Ньютоном, Кеплером, служат классическими примерами удачных математических моделей в естествознании, с помощью которых дана столь ясная и совершенная картина движения небесных тел, что ею стали пользоваться и для объяснения многих физических явлений.

Синтез математических методов и современных информационных технологий позволяет исследовать сложные экономико-математические задачи на основе программных пакетов математических вычислений. Следует подчеркнуть, что компьютерные пакеты — лишь инструменты, которые помогают тем, кто хорошо владеет математикой.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества еще со времен Ф. Кенэ (1694–1774), А. Смита (1723–1790) пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вобрала в себя большое число математических методов. Возникла математическая экономика — математическая дисциплина, предметом которой являются модели экономических объектов и процессов, а также методы их исследования.

Современная экономика широко использует матричные методы, теорию вероятностей и математическую статистику, специальные методы оптимизации, составляющие основу математического программирования, дифференциальные уравнения, теорию игр, сетевое планирование, теорию массового обслуживания и т.д.

Отметим, что за разработку экономических моделей на основе линейного программирования Л. В. Канторович и американский ученый К. Купманс в 1975 г. получили Нобелевскую премию по экономике. Ученые Я. Тинберген, Р. Фриш, П. Самуэльсон, Д. Хикс, К. Эрроу, В. Леонтьев, Г. Саймон, Л. Клейн, Ж. Дебре, Р. Солоу, Т. Хаавельмо, Г. Марковиц, Р. Зелтен, Д. Нэш и другие за применение математических методов в экономических исследованиях в разные годы также были удостоены Нобелевской премии.

Для научного понимания значения современной математики в экономических исследованиях следует иметь в виду ряд обстоятельств, делающих ее применение в экономике весьма эффективным.

1. Математика вынуждает экономистов неясное содержание вводимых ими терминов, расплывчатые выражения и многословные словоизлияния заменять четкими понятиями, точным перечислением заданных величин, строгой формулировкой предпосылок, условий и выводов.

2. Она позволяет путем ряда математических выкладок прийти к математическому (количественному) выражению таких соотношений, которые нелегко и иногда даже невозможно было бы вывести путем логических рассуждений или простых арифметических примеров.

3. Математика дает возможность установить связи между явлениями, факторами, интуитивно не ощущаемыми и не могущими быть обнаруженными без нее даже в самой общей форме. Например, математическое исследование уравнений электромагнитного поля показало, что они имеют решение колебательного характера, что, как известно, послужило основой для создания электромагнитной теории света.

Но математика сама по себе не может обосновать какую-либо теоретическую концепцию, и математика просто ведет от предпосылок к выводам и что последние будут верны, если предпосылки правильны, правильность же выводов проверяется согласием их с действительно наблюдаемыми явлениями. Но сами предпосылки или система исходных положений, аксиом должны быть сформулированы извне. Они должны вытекать из содержания исследуемого предмета, т.е. в данном случае из области экономики. Поэтому острие критики математико-экономических построений должно быть направлено на анализ правомерности предпосылок положенных в их основание, на экономическую интерпретацию получаемых каждый раз математических решений и соответствие их фактам экономической действительности.

Вопрос о возможности и необходимости применения математики в экономике обсуждался уже много раз. Сколько-нибудь интересные результаты в области математической экономии может дать лишь экономист, использующие математический инструментарий. Довольно широко распространены неправильные представления о сущности математики и методах ее приложения. Иногда рассматривают чистую математику как своего рода «язык» , подразумевая при этом, что его легко перевести на обычный. Такое представление абсолютно неверно. Математика представляет собой скорее специальную форму логики, рассуждения. Математические доказательства могут совершенно не поддаваться «переводу» , хотя их исходные предпосылки и получаемые выводы могут и должны излагаться в «литературной» форме. Математика просто ведет от предпосылок к выводам, но сами эти предпосылки могут быть любой совместной системой кем-то сформулированных аксиом. Теории возникают лишь из особого содержания предмета независимо от того, идет ли речь об экономике или электротехнике. Так обстоит дело и в прикладной математике. Следовательно, теоретические концепции облекают в плоть и кровь первоначальные предпосылки, и таким же образом обстоит дело при логической или математической интерпретации выводов. Не допуская логической ошибки, можно сказать, что выводы будут верны, если предпосылки правильны. Но это не является доказательством какой-либо теории ни в экономии, ни в какой-либо другой области знаний. Теории проверяются фактами: либо проверяются предпосылки, либо же, что бывает чаще, - выводы. Проверка теории может окончиться тем, что последняя будет отвергнута как не соответствующая фактам. Но такая проверка никогда не может служить «доказательством» теории, а может привести лишь к предварительному принятию этой теории как не противоречащей фактам. Поэтому математическую экономию лучше всего рассматривать как процесс выведения следствий из специфической системы совместных аксиом экономического содержания. Испытание системы состоит в получении следствий из аксиом, а не в установлении обоснованности теории. Но, если математика есть лишь форма логического рассуждения, то может возникнуть вопрос: зачем применять математику, которую понимают немногие, вместо общедоступной логики? Это лишь вопрос эффективности, подобно тому как предприниматель решает применять землеройные машины вместо кирки и лопаты. Часто проще пользоваться киркой и лопатой, и всегда мыслимо с их помощью выполнение той или иной работы. Но столь же часто механическая лопата экономичнее. Математика является «механической лопатой» логического мышления; в одних случаях ее выгодно использовать, в других - нет. Дело в том, что экономические факты чрезвычайно сложны, и можно ожидать, что «механическая лопата» математики будет наиболее эффективным способом их изучения. Математическая форма обычно надежнее для максимального приближения теории к фактам, для наименьшего упрощения действительности.

Ясно, что экономика,
если она является наукой,
должна быть математической.
У. С. Джевонс[1]

Математики как французы: все, что вы
им говорите, они переводят на свой
язык, и это тотчас же становится
чем-то совершенно иным.
И. Гете[2]

. . . высшим торжеством науки является
применение математических конструкций
к исследованию конкретных явлений.
В. А. Базаров[3]

---

[1] У.С. Джевонс (1835–1882) — английский экономист.

[2] И.В. фон Гете (1749–1832) — немецкий поэт, мыслитель и естествоиспытатель.

[3] В.А. Базаров (1874–1930) — русский философ и экономист.

Раздел 1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Цель работы: овладеть основами графического анализа типичных производственных функций на основе использования предельных величин, средних величин и эластичностей по отдельным переменным; научится работать с поверхностями и линиями уровня (изоквантами) для заданных производственных функций.

В данной работе предлагается рассмотреть

функцию Кобба-Дугласа:

$$f(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha};$$

функцию с постоянной эластичностью замещения:

$$f(x_1, x_2) = a\left(\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta) x_2^{-\rho}\right)^{-\dfrac{\gamma}{\rho}};$$

$$a > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 < \gamma \le 1, \quad \rho > -1;$$

линейную функцию:

$$f(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2;$$

функцию Бернулли:

$$f(x_1, x_2) = a_1 \ln(x_1 - b_1) + a_2 \ln(x_2 - b_2);$$

квадратичную функцию:

$$f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Выполнение работы.

1. Ввести необходимую текстовую информацию.

2. Определить числовые значения параметров, которые задают производственную функцию.

3. Провести вычисления значений функции в заданной точке, а также для значений переменных их заданного интервала.

4. Зафиксировав значение второй переменной, получить функцию одной переменной, для которой найти функцию средних значений, предельную функцию и функцию эластичности.

5. Построить графики найденных функций в одной декартовой системе координат на плоскости.

6. С помощью маркеров найти характерные точки и описать экономический смысл указанных точек.

7. Изобразить в пространственной системе координат графики указанных функций.

8. Построить график функции полезности для задачи производственного потребления, взяв для примера выпуск трех товаров при использовании двух ограниченных ресурсов. Матрицу затрат сгенерировать самостоятельно.

Раздел 2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Цель работы: научится работать с основными элементами статической модели межотраслевого баланса (валовый выпуск, конечный продукт, матрица прямых затрат, мультипликатор Леонтьева); создать исходя из реальных данных учебную статическую модель Леонтьева экономики Беларуси за определенный год; провести расчет конечного продукта исходя из построенной модели, а также проанализировать возможность увеличения конечного продукта путем планирования выпуска валового продукта по отраслям.

Статическая модель Леонтьева.

$$X = AX + Y, \quad X \geq 0, \quad Y \geq 0.$$

Здесь

X — n-вектор **валового выпуска**;

Y — n-вектор **конечного продукта**;

A — $(n \times n)$-матрица **прямых затрат**;

$B = (E - A)^{-1}$ — **матрица полных затрат или мультипликатор Леонтьева**.

Предположения: экономика закрытого типа, рассматривается n отраслей, производящих однородный продукт, выраженный в денежном эквиваленте.

Выполнение работы.

1. Ввести необходимую текстовую информацию.

2. На примере экономики Японии за 1980 год ввести данные по 7 отраслям,

для чего задать матрицу прямых затрат и вектор конечного выпуска:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1078 & 0.1645 & 0.0004 & 0.0012 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0078 \\ 0.1156 & 0.2311 & 0.0433 & 0.1980 & 0.0035 & 0.0343 & 0.0439 \\ 0.0683 & 0.0980 & 0.4529 & 0.1935 & 0.3869 & 0.1435 & 0.0326 \\ 0.0018 & 0.0011 & 0.0012 & 0.0003 & 0.0086 & 0.0026 & 0.0183 \\ 0.0346 & 0.0370 & 0.0647 & 0.0192 & 0.1630 & 0.1953 & 0.0236 \\ 0.0376 & 0.0440 & 0.0283 & 0.0612 & 0.0248 & 0.1125 & 0.0541 \\ 0.0666 & 0.1246 & 0.1173 & 0.1231 & 0.0655 & 0.1431 & 0.1494 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 89 \\ 31625 \\ 30634 \\ 49670 \\ 3077 \\ 15919 \\ 117240 \end{pmatrix}.$$

Здесь

1. Сельское, лесное и рыбное хозяйство.
2. Тяжелая промышленность.
3. Легкая промышленность.
4. Строительство.
5. Энергетика.
6. Транспорт и связь.
7. Услуги.

3. Найти вектор валового выпуска.
4. Вычислить мультипликатор Леонтьева.
5. Изменяя вектор конечного потребления на α процентов ($\alpha = 5, 10, 15, 20$), найти вектор планируемого валового выпуска и дать ему экономическую интерпретацию.
6. С помощью реальных экономических данных по Республике Беларусь за определенный период построить матрицу прямых затрат, записать учебную модель Леонтьева и провести расчеты, аналогичные описанным выше.
7. Провести экономический анализ и сделать выводы.

Раздел 3

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Цель работы: научится находить численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений с различными правыми частями; графически представлять найденные решения и проводить экономический анализ полученных результатов; исследовать модели экономического роста.

Для следующих дифференциальных уравнений найти решения и построить их графики. Дать экономический анализ полученных решений.

1. Задача о выбытии фондов.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 10],$$

для $k(t) = 1, \quad k(t) = 2t + 3$.

2. Вычисление вероятности $y(t)$ дожить до определенного возраста (формула Макегама).

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 10],$$

для $k(t) = \alpha + \beta \exp(\gamma t)$.

3. Рост производства с учетом инвестиций.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(y)y(t) + u(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

для различных способов инвестиций: $u(t, y) = \alpha t + \beta$.

4. Логистическое уравнение.

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(1 - \frac{y(t)}{b})y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

5. Прогнозирование численности населения Земли.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{cy(t)}{(1995 - y)^2 + t^2}, \quad y(0) = 6 \cdot 10^9, \quad t \in [1995, 2100], \quad c = 163 \cdot 10^9.$$

Выполнение работы. Для расчетов применяется программа

$$\mathbf{rkfixed}(y_0, x_1, x_2, n, f),$$

которая выдает результат решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде таблицы. Ее можно использовать для решения как одного дифференциального уравнения, так и системы дифференциальных уравнений. Эта функция имеет пять аргументов:

y_0 — вектор начальных значений искомых функций;

x_1 — начальное значение независимой переменной;

x_2 — конечное значение независимой переменной;

n — фиксированное число шагов интегрирования;

f — правая часть дифференциального уравнения в нормальной форме.

Раздел 4

ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В СИСТЕМЕ MATHCAD

4.1 Общие сведения

Система Mathcad — это интерактивная программа, позволяющая проводить вычисления и аналитические преобразования, снабженная средствами двухмерной и трехмерной графики, имеющая язык программирования и богатую библиотеку математических формул, сведений и примеров. Работа с Mathcad заключается в том, что пользователь вводит математические выражения и инструкции (команды), а система их выполняет и дает ответ.

В системе Mathcad все действия организуются на рабочих листах (областях), изначально пустых, на которых можно записывать формулы, текст, математические выражения и т.д. Рабочий лист называется документом Mathcad и сохраняется в отдельном файле с расширением mcd. Новый документ создается автоматически при запуске Mathcad, а работа с файлами такая же, как и в любом приложении Windows. Система Mathcad имеет интерфейс со свободной формой записи (как на школьной классной доске) с возможностями комбинирования текста, математических выкладок и графики в любом месте экрана.

Система Mathcad является мощным универсальным средством для работы с математическими задачами разного уровня сложности. Он позволяет не только закрепить основные математические понятия, но и способствует более глубокому самостоятельному изучению высшей математики и ее методов исследования различных прикладных задач. Естественный математический язык пакета дает возможность формулировать математическую постановку задач, а мощные графические возможности с наличием текстового редактора позволяют визуализировать расчеты и получать готовый итоговый документ высокого качества.

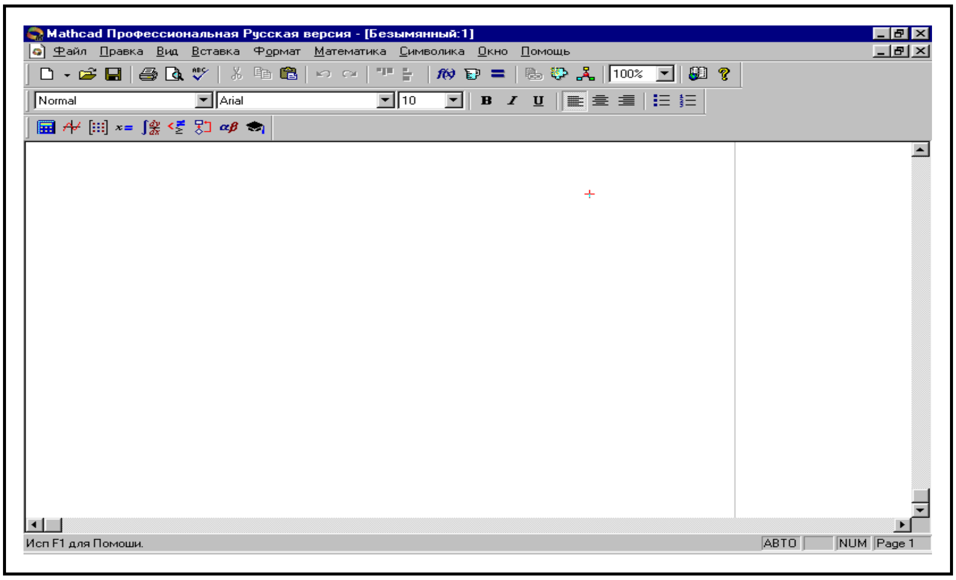
Возможность производить практически любые операции с действительными и комплексными числами и большой набор векторных и матричных операций делают Mathcad хорошим инструментом в руках студентов всех специальностей при выполнении различных самостоятельных заданий.

Приведем краткий перечень вычислительных инструментов, доступных в среде Mathcad.

1. Работа с векторами и матрицами.
2. Решение систем уравнений.
3. Нахождение в аналитическом виде производных и неопределенных интегралов.
4. Вычисление определенных интегралов.
5. Разложение функций в ряды.
6. Поиск экстремумов функций одной и нескольких переменных.
7. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.
8. Статистическая обработка данных, интерполяция, экстраполяция, аппроксимация и др.

Символьный процессор может выполнять основные алгебраические преобразования, аналитические вычисления пределов, производных, интегралов и разложений в ряд, а также решение алгебраических уравнений.

После того как Mathcad установлен на компьютере и запущен на исполнение, на экране появляется основное окно, которое имеет ту же структуру, что и большинство приложений Windows.



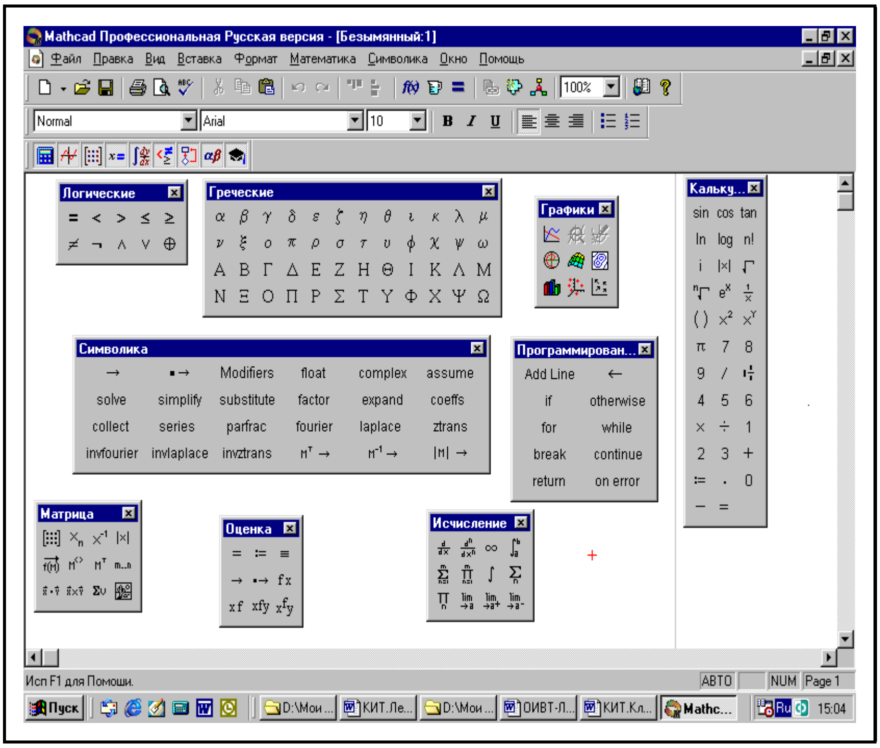
Верхняя строка предназначена для записи названия программы и имени загруженного документа. Под ней находится строка **Главного меню**, а ниже – панели инструментов: **Стандартная** (содержит кнопки наиболее общих команд и опций) и **Форматирование** (отвечает за вид вводимой текстовой информации). Внизу окна располагается **Строка состояния**, отображающая различного рода служебные сообщения. Большую часть окна программы занимает **Рабочая область**, которая для удобства работы разбита на листы. Mathcad предоставляет пользователю разнообразные панели инструментов, ряд кнопок которых совпадают по изображению и назначению с аналогичными кнопками других приложений Windows. Отметим некоторые особенности интерфейса пакета:

+ **крестик красного цвета**, символизирующий курсор ввода, который отмечает место в тексте, куда можно вводить информацию;

⌟ **уголок синего цвета**, обозначающий линию ввода, выделяющий в формуле ее часть;

: **местозаполнитель**, появляющийся при незавершенном наборе формулы и указывающий место, куда следует вводить информацию (операторы и символы).

Перед началом работы с пакетом Mathcad рекомендуется настроить удобный интерфейс программы. Для этого надо, прежде всего, открыть необходимые панели инструментов (Toolbars).



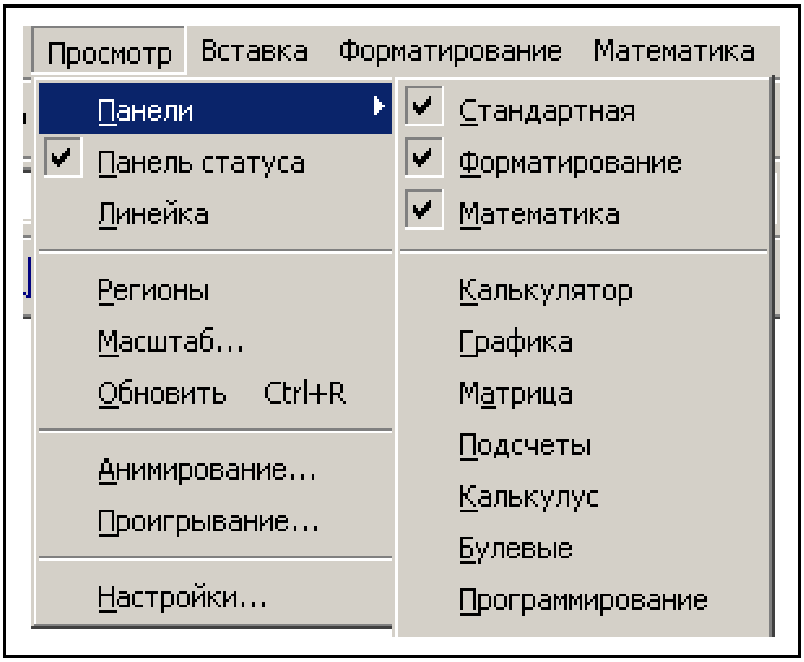
При первой загрузке пакета в рабочей области окна программы видна панель **Математика**(Math). Эта панель содержит ссылки на все остальные панели Mathcad: **Калькулятор**, **Графики** и др.

Например, панель **Калькулятор**(Calculator) или **Арифметика** содержит различные арифметические операторы: возведение в степень, извлечение корня, нахождение факториала, и наиболее часто используемые функции: логарифмические, тригонометрические, показательную, степенную и др., а также цифры, знаки арифметических операций и другие специальные символы.

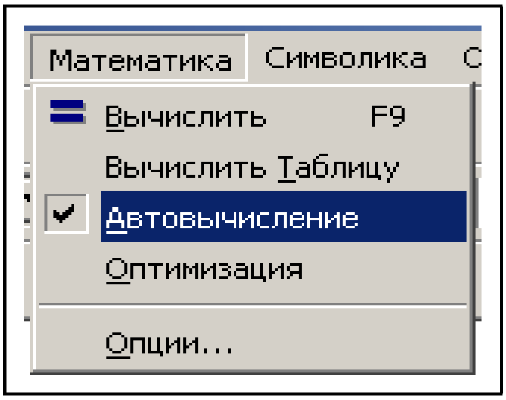
Панель **Исчисление**(Calculus) или **Матанализ** содержит различные операторы анализа: знаки интеграла и производной, знаки суммирования и умножения, знаки предела, а также символ бесконечности.

Панель **Символика**(Symbolic) содержит операторы различного рода аналитических преобразований и вычислений.

Для удобства работы подключим панели инструментов: **Стандартная, Форматирование и Математика**, для чего выполним последовательно действия: **Просмотр — Панели** и установим флажки: **Стандартная, Форматирование и Математика**:



Установим также режим автоматического выполнения вычислений, для чего, щелкнув по панели **Математика**, активизируем флажок **Автовычисление**.



4.2 Простейшие вычисления и текстовые области

Для выполнения простых арифметических вычислений необходимо сделать следующее.

1. После щелчка мышью в любом месте рабочего листа появляется красный крестик, начиная с которого будут размещаться введенные с клавиатуры символы.

2. Напечатать арифметическое выражение.

3. После ввода знака равенства «=» система Mathcad вычисляет значение введенного выражения и выводит на экран результат.

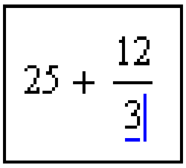
Система Mathcad снабжена средствами для ввода и редактирования математических выражений, одним из которых является панель **Математика**.

Для ввода текста в рабочую область (например, «Простейшие вычисления»), нужно щелкнуть мышью в нужном месте документа и выполнить последовательно действия: **Вставка** — **Текстовый регион**. В поле **Шрифт** выберем, например, **Times New Roman Cyr**, в поле **Размер** выберем, например, **14** и переключимся на русский шрифт. Введем текст: «Простейшие вычисления».

Приведем пример вычисления значения арифметического выражения: $25+\dfrac{12}{3}$.

1. Щелкнем мышью по любому месту в рабочем документе — в поле появится красный крестик, отмечающий позицию, с которой начинается ввод.

2. Введем с клавиатуры символы в следующей последовательности: $25+\dfrac{12}{3}$ и получим

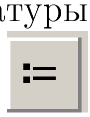


3. Введем с клавиатуры знак равенства, нажав клавишу «=». После этого Mathcad вычисляет выражение и выводит справа от знака равенства результат:
$$25+\frac{12}{3}=29.$$

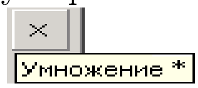
4.3 Вычисление значений выражений с переменными

При помощи переменных и функций моделируются разнообразные прикладные задачи, в том числе и экономические. Система Mathcad позволяет решать достаточно сложные математические задачи с переменными величинами и функциями.

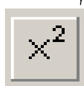
Приведем пример вычисления значения выражения $\dfrac{a\cdot t^2}{2}$ при $t=5$, $a=9.8$ (отметим, что в системе Mathcad принято отделять целую часть от дробной при помощи точки). Сначала определим значения переменных a и t, для чего щелкнем мышью по свободному месту в рабочем документе и, после появления красного крестика, введем с клавиатуры символ a.

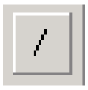
На панели **Калькулятор** нажмем кнопку 

и введем число 9.8. Далее щелкнем по свободному месту вне поля ввода и аналогичным образом определим $t := 5$. На рабочем листе получим
$$a := 9.8 \quad t := 5.$$

Щелкнув ниже по свободному месту в рабочем документе, введем a, на панели **Калькулятор** нажмем кнопку 

и введем символ t.

Далее на панели **Калькулятор** нажмем кнопку 

. Выделим рамкой синего цвета выражение t^2, для чего нажмем клавишу **Пробел**. На панели **Калькулятор** нажмем кнопку 

и введем число 2. После этого будем нажимать клавишу **Пробел** до тех пор, пока не появится выделяющая рамка синего цвета, окружающая все выражение. Введем с клавиатуры знак равенства «=» и щелкнем по свободному месту вне поля ввода. Получим

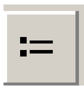
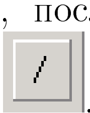
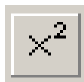
$$a \cdot \frac{t^2}{2} = 122.5.$$

Если при вводе выражения была допущена ошибка, следует выделить неправильный символ синей угловой рамкой (щелкнув мышью справа внизу возле символа), удалить выделенный символ и ввести в помеченной позиции исправление.

Mathcad выполняет действия слева направо и сверху вниз, поэтому нужно следить за тем, чтобы выражение для вычисления располагалось правее или ниже определенных для него значений переменных.

4.4 Вычисление значения функции в точке

На примере функции
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$
вычислим ее значение при $x = 1.2$.

Для того, чтобы задать указанную функцию, щелкнем по свободному месту в рабочем документе и введем с клавиатуры $f(x)$. Далее на панели **Калькулятор** нажмем кнопку , после чего введем $x+1$. Опять на панели **Калькулятор** нажмем кнопку , введем x и нажмем кнопку . Окружим рамкой синего цвета (нажав клавишу **Пробел**) выражение x^2 и введем $+1$. На этом задание функции $f(x)$ закончено.

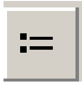
Вычислим значение заданной функции $f(x)$ в точке $x = 1.2$. Для этого щелкнем ниже по свободному месту в рабочем документе и введем с клавиатуры $f(1.2)$ и знак равенства «=». После этого сразу в рабочем документе должен появиться результат

$$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}$$
$$f(1.2) = 0.902.$$

4.5 Создание таблицы значений функции

Создадим таблицу значений выше заданной функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ при изменении аргумента $x \in [0,\ 10]$ с шагом 1.

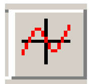
Для того чтобы определить дискретные значения аргумента $x \in [0,\ 10]$ с шагом 1, щелкнем по свободному месту в рабочем документе и введем с клавиатуры x.

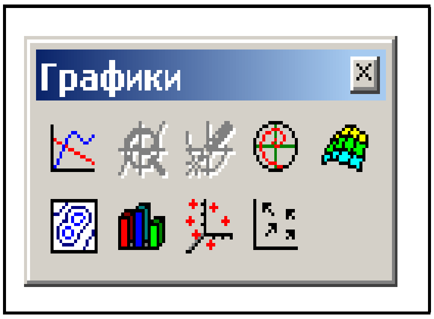
На панели **Калькулятор** нажмем кнопку  и далее на этой панели нажмем кнопку . В поле ввода (черный прямоугольник, окруженный синей рамкой) введем с клавиатуры $0, 1$. Для заполнения второго поля ввода, нажмем кнопку **Вправо** и введем 10.

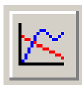
Для вычисления значений функции $f(x)$ для $x \in [0,\ 10]$ с шагом 1 щелкнем вне поля ввода мышью и введем с клавиатуры «$f(x) =$». Под именем функции появится таблица значений указанной функции.

4.6 Построение графика функции

Построим график функции $f(x) = x \cdot \sin\sqrt{|x|}$.

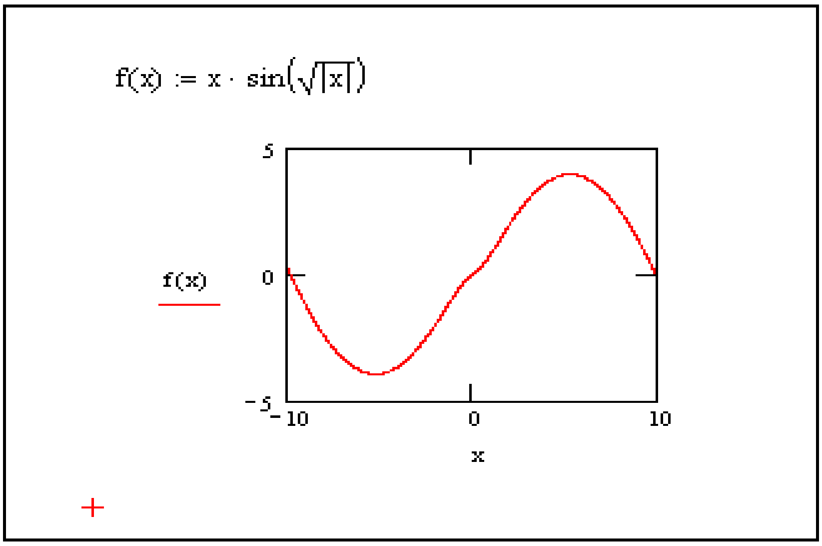
Для этого зададим функцию $f(x) := x \cdot \sin\sqrt{|x|}$ с помощью панели **Математика**. Щелкнем по свободному месту в рабочем документе правее и ниже определения функции $f(x)$ и на панели **Математика** нажмем кнопку . На экране появится панель **Графики**



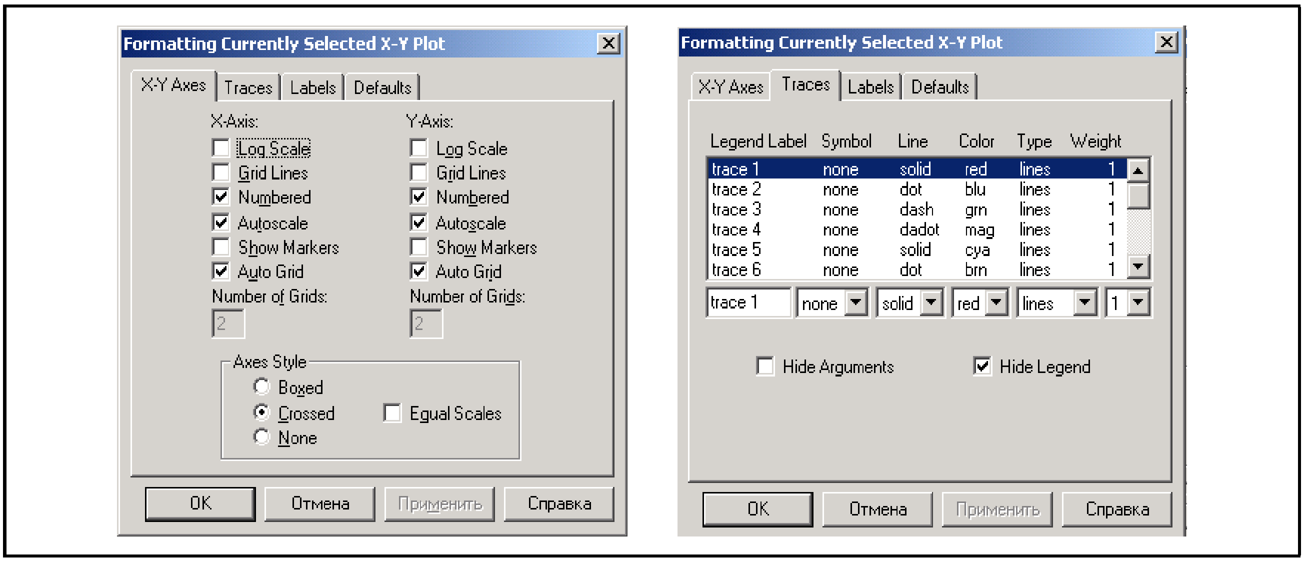
1. На панели **Графики** нажмем кнопку  построения графика в декартовой прямоугольной системе координат.

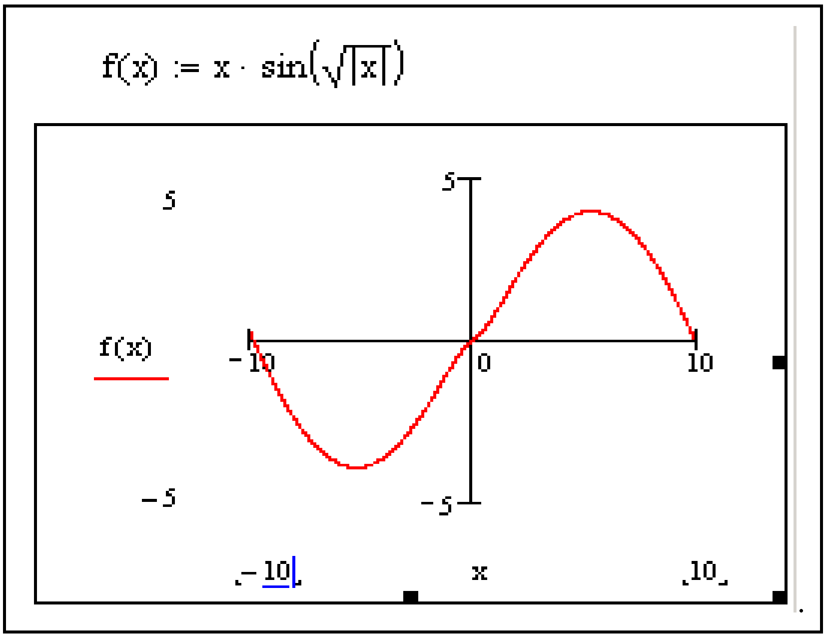
2. Введем в позиции, указанной меткой возле оси абсцисс, имя аргумента x, а в позиции, указанной меткой возле оси ординат, имя функции $f(x)$.

3. График будет построен после щелчка по рабочему документу вне поля графиков.



Вид графика можно изменить, щелкнув дважды по полю графиков и определив параметры



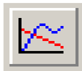


4.7 Решение уравнений

Для нахождения решения уравнения $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ графическим способом выполним следующие действия.

1. Определим функцию $f(x) := x^3 + 3x^2 - 2$.

2. Построим график функции $f(x)$.

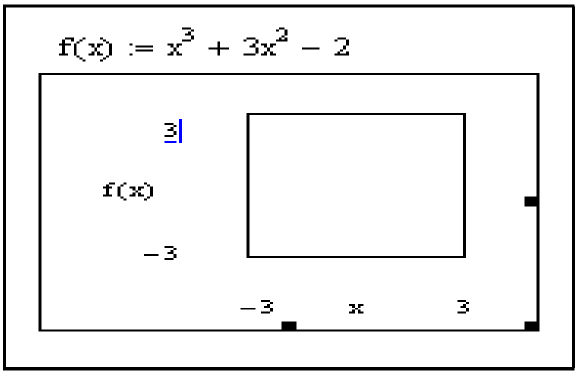
   a) на панели **Графики** нажмем кнопку  ;

   b) в позиции возле оси абсцисс введем x;

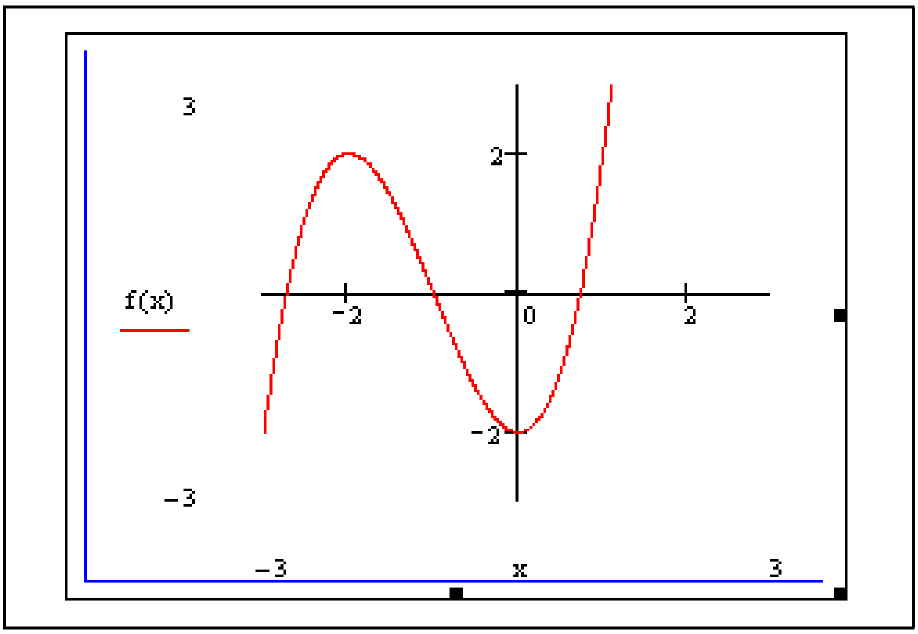
   c) в позиции возле оси ординат введем $f(x)$;

   d) в позициях возле оси абсцисс введем значения -3 и 3, так как мы считаем, что корни расположены в интервале $(-3, 3)$;

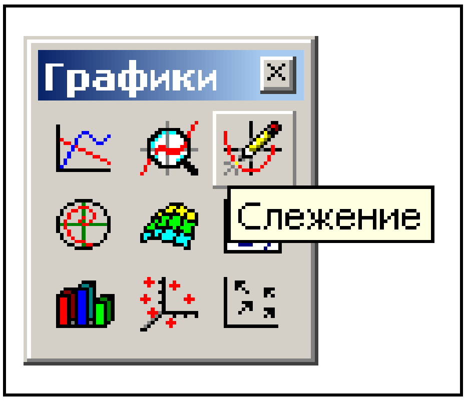
   e) в позициях возле оси ординат введем, например, значения -3 и 3, хотя можно ввести и любые другие значения;



   f) график будет построен после щелчка по рабочему документу вне поля графиков.

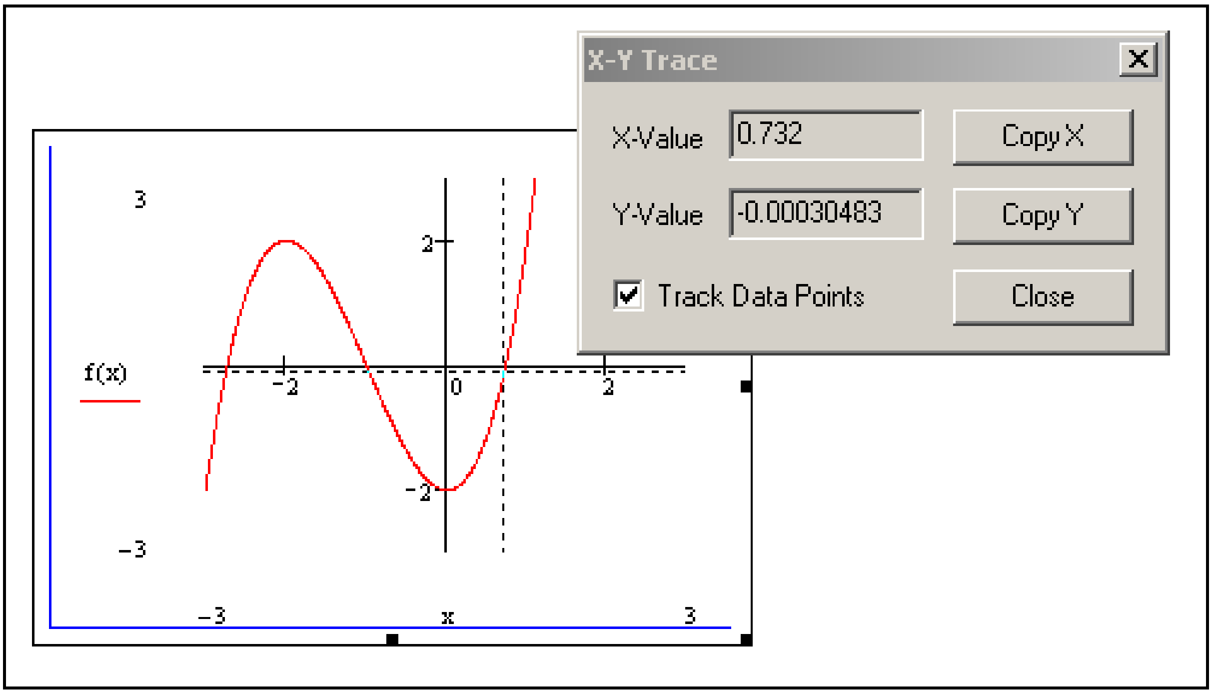


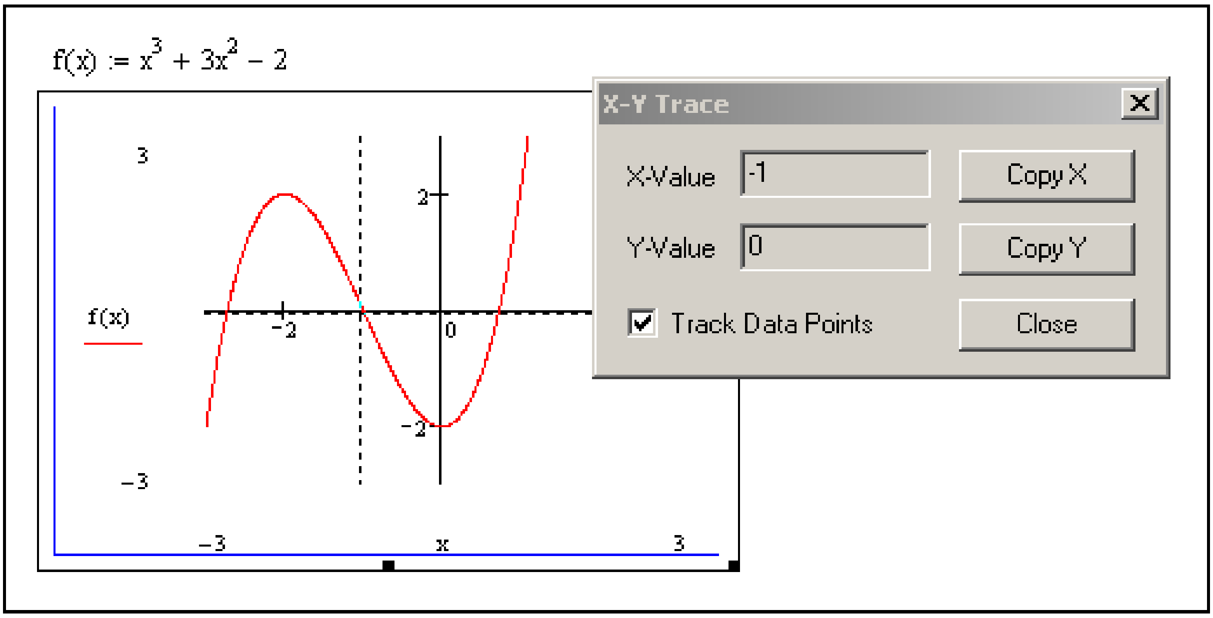
Корни уравнения будем находить как абсциссы точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью O_y. Для этого щелкнем мышью в поле графика. На панели **Графики** нажмем кнопку

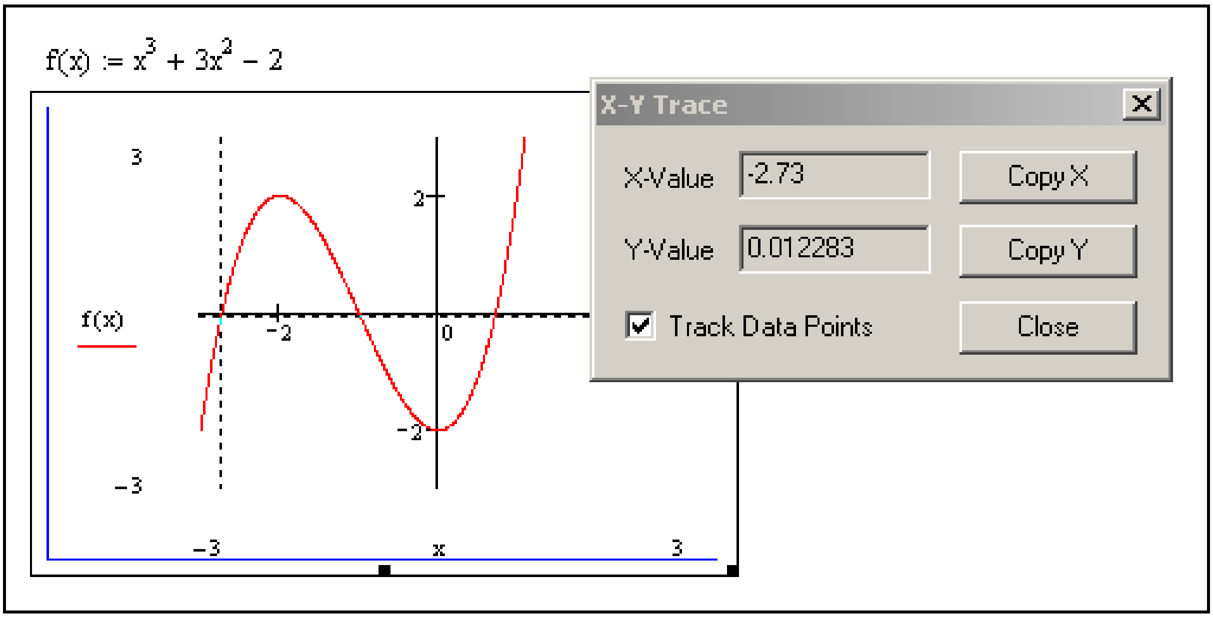


Щелкнем по полю графика и установим (стрелками клавиатуры или мышью) маркер (перекрещивающиеся пунктирные линии) в точке пересечения графика функции с осью абсцисс.

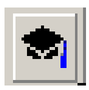
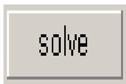
В окне диалога отображаются координаты маркера. Если значение координаты y в окне близко к нулю, то значение координаты x и есть искомое приближенное значение корня, вычисленное графическим способом.







Решим это же уравнение аналитически.

1. На панели **Математика** нажмем кнопку  символьных вычислений.
2. На панели **Символика** нажмем кнопку  решения уравнений.
3. Введем в помеченной позиции слева от ключевого слова **solve** выражение для левой части уравнения.
4. Введем в помеченной позиции справа от слова **solve** имя переменной, относительно которой решаем уравнение.
5. Щелкнем по свободному месту в рабочем документе и получим вектор, в котором первая компонента — это первый корень, вторая компонента — второй корень и т.д.

$$x^3 + 3x^2 - 2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Для получения значений корней в вычисленном виде (в виде обыкновенной или десятичной дроби — это определяется через панель **Формат — Результат**) сделаем следующее.

1. Щелкнем по полю уравнения и, используя кнопку **Пробел**, выделим все выражение синей угловой рамкой

$$x^3 + 3\cdot x^2 - 2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2. Введем с клавиатуры знак равенства «=» и получим

$$x^3 + 3\cdot x^2 - 2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.732 \\ -2.732 \end{pmatrix}$$

4.8 Дифференцирование

Для вычисления производной

$$\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)\right)'$$

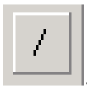
сначала зададим функцию $f(x) := \operatorname{tg}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)$. Для этого

1. Введем с клавиатуры $f(x)$ и нажмем кнопку [:=].

2. На панели **Калькулятор** нажмем кнопку [tan], затем [$\times^2$] и введем x.

3. Окружим выражение x^2 выделяющей рамкой синего цвета, для чего нажмем клавишу **Пробел**.

4. Введем с клавиатуры $+3$ и выделим рамкой синего цвета выражение $x^2 + 3$.

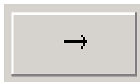
5. Нажмем , введем x и щелкнем по свободному месту в рабочем документе.

6. На панели **Калькулус** нажмем кнопку $\dfrac{d}{dx}$.

7. В нижнюю выделенную позицию введем x.

8. Переместим синюю угловую рамку в следующее поле ввода, для чего нажмем клавишу **Tab**, и введем с клавиатуры $f(x)$.

9. Выделяющей рамкой синего цвета окружим все выражение, для этого нажмем **Пробел**.

10. На панели **Символика** нажмем кнопку  символической операции.

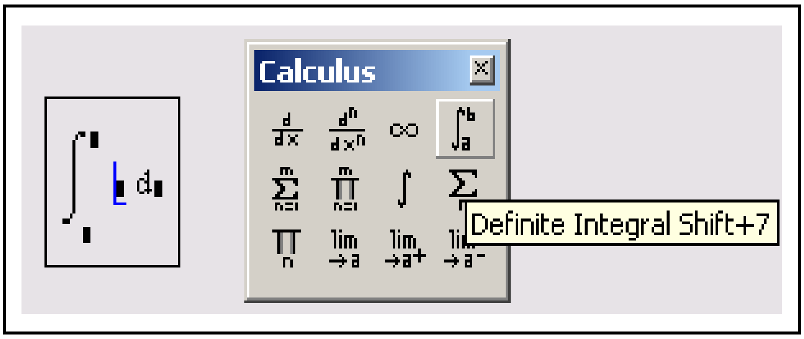
11. Шелкнем по свободному месту в рабочем документе и получим результат

$$f(x) := \tan\left(\frac{x^2+3}{x}\right),$$

$$\frac{df(x)}{dx} \to \left[1 + \tan\left[\frac{(x^2+3)}{x}\right]^2\right] \cdot \left[2 - \frac{(x^2+3)}{x^2}\right].$$

4.9 Вычисление определенных интегралов

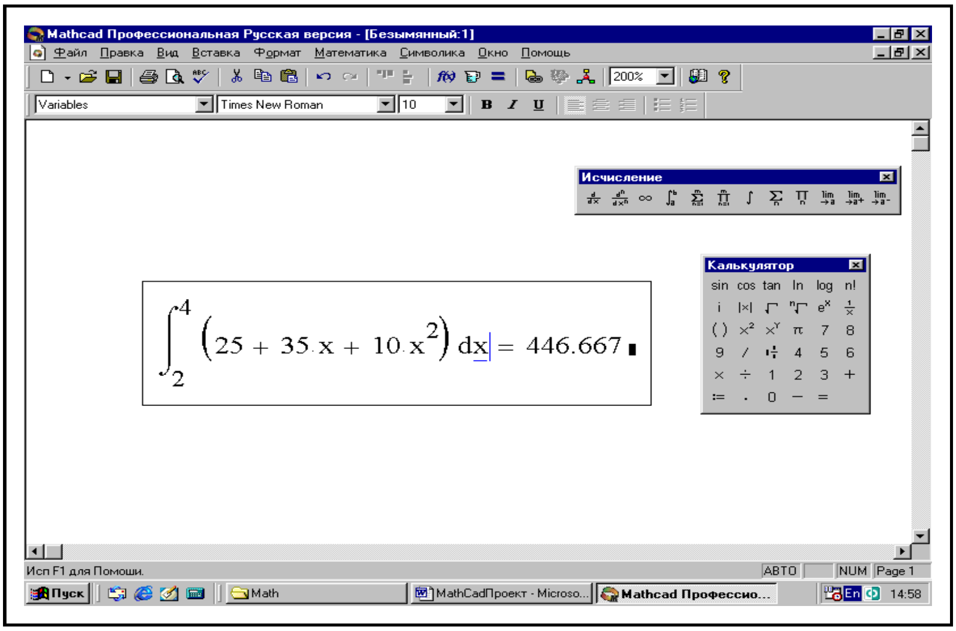
Интегрирование, дифференцирование, как и ряд других математических действий, устроено в Mathcad по принципу «как пишется, так и вводится». Нахождение определенных и неопределенных интегралов осуществляется с помощью панелей: **Исчисление(Calculus)**, **Калькулятор**, **Символика**. Для записи выражения с интегралом используется кнопка **Определенный интеграл** на панели **Исчисление**, нажатие которой вызывает появление на экран шаблона интеграла. Далее следует с клавиатуры ввести в черные прямоугольники шаблона пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования.



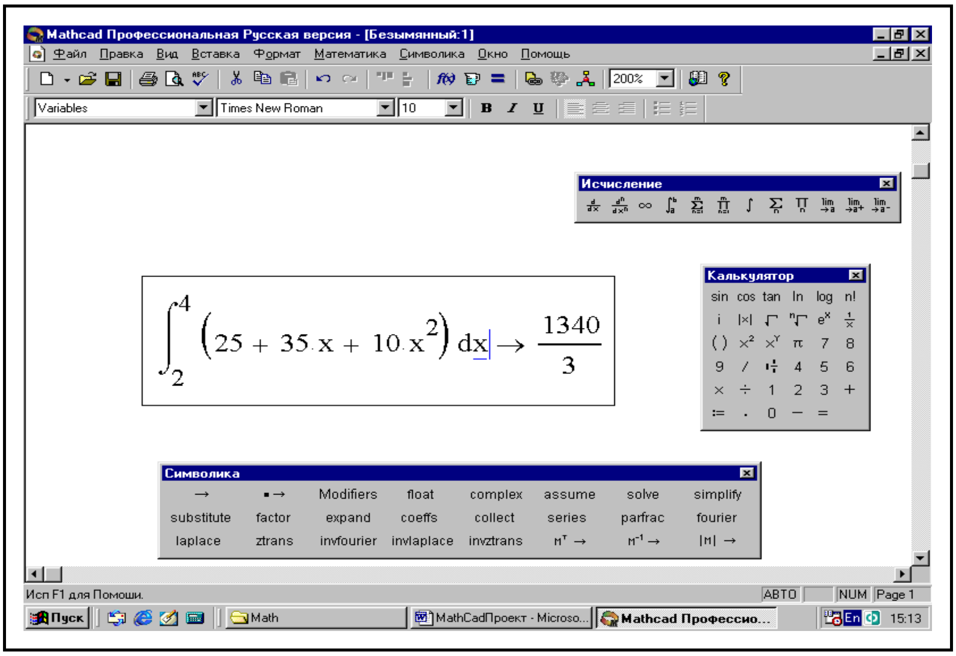
Чтобы вычислить интеграл численно, надо нажать на панели **Калькулятор** знак равенства $=$. Для символьного вычисления нажать кнопку **Символическое вычисление** на панели **Символика** и щелкнуть по рабочему документу вне выделяющей рамки. Вычисленное значение интеграла будет отображено в рабочем документе справа от стрелки.

Например, найдем определенный интеграл на отрезке $[2,4]$ для подынтегральной функции $f(x) = 10x^2 + 35x + 25$ в численном и символьном виде. Для этого выполним следующие действия.

1. Вызовем панель **Исчисление**.
2. Установим курсор в нужное место на экране и нажмем знак определенного интеграла на панели **Исчисление**.
3. Введем в соответствующие поля появившегося знака интеграла: пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования (при этом можно использовать панель **Калькулятор**).
4. Введем знак равенства и на экране появится численный результат.



Для символьного вычисления интеграла вызовем панель **Символика** и после набранного выражения для интеграла введем знак символьного вычисления (стрелку). Результат такого вычисления появится на экране.



Для того, чтобы вычислить определенный интеграл с одним или обоими бесконечными пределами, достаточно ввести, пользуясь панелью **Calculus**, символ бесконечности в нужные место заполнители пределов интегрирования. Если интеграл расходящийся, то Mathcad сообщит и об этом.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \to \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

Особый интерес представляет вычисление интегралов с переменным верхним (или нижним) пределом. Интеграл с переменным пределом является обычным определенным интегралом, зависящим от дополнительного параметра.

$$\int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \to 2\cdot z^{\frac{1}{2}}$$

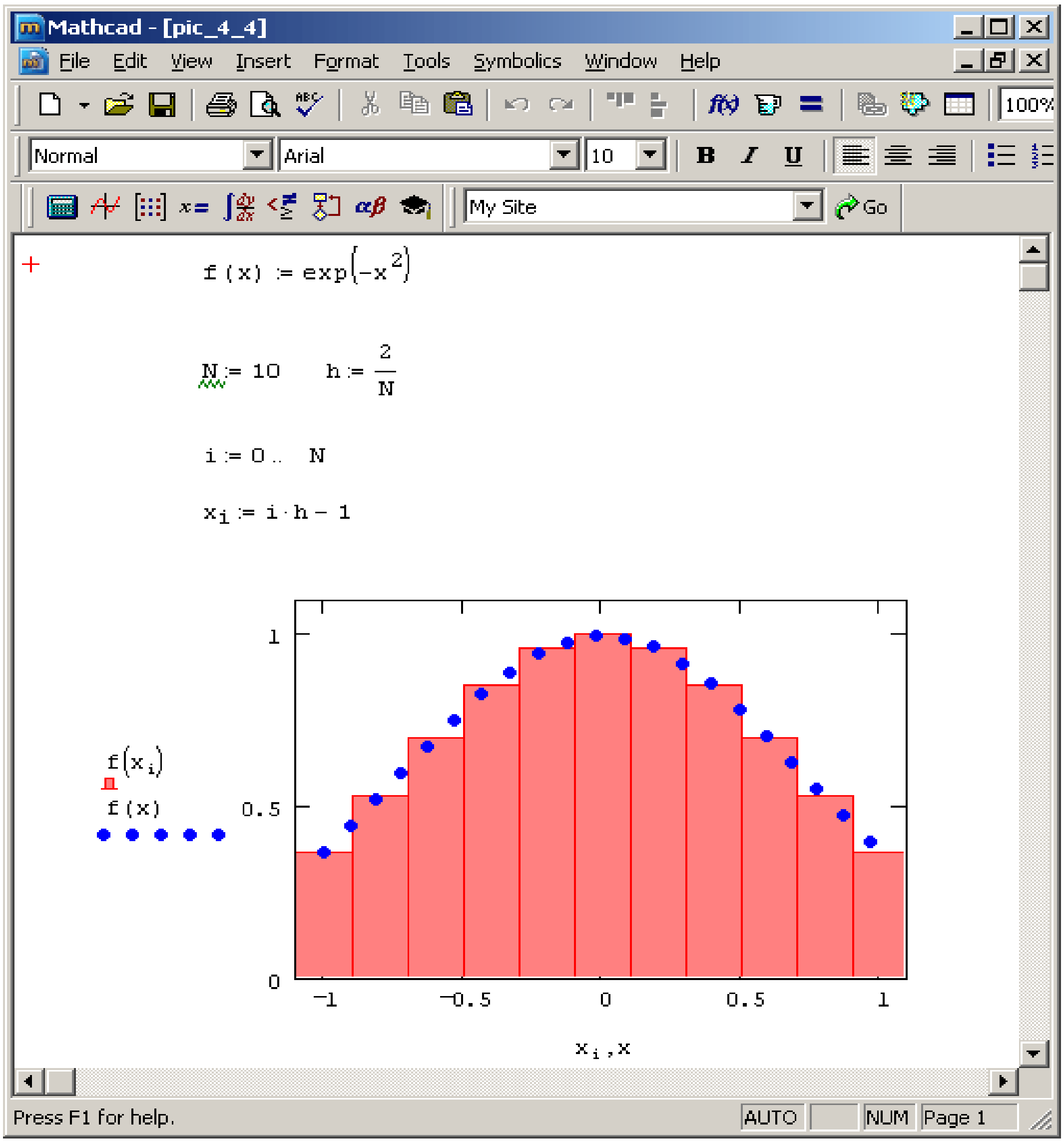
Ниже приведены примеры вычисления одного из широко используемых в теории вероятностей «интеграла ошибок».

$$\int_0^{\pi} \exp(-x^2)\,dx = 0.886$$

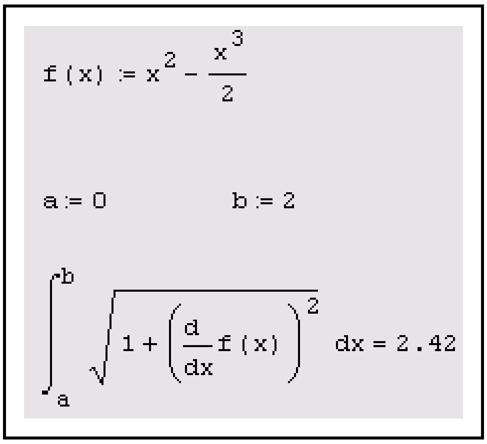
$$\int_0^{\pi} \exp(-x^2)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}(\pi)\cdot \pi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}(\pi)\cdot \pi^{\frac{1}{2}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx \rightarrow \pi^{\frac{1}{2}}$$

Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства или символьного равенства. В первом случае интегрирование будет проведено численным методом, во втором — найдено точное значение интеграла с помощью символьного процессора Mathcad.

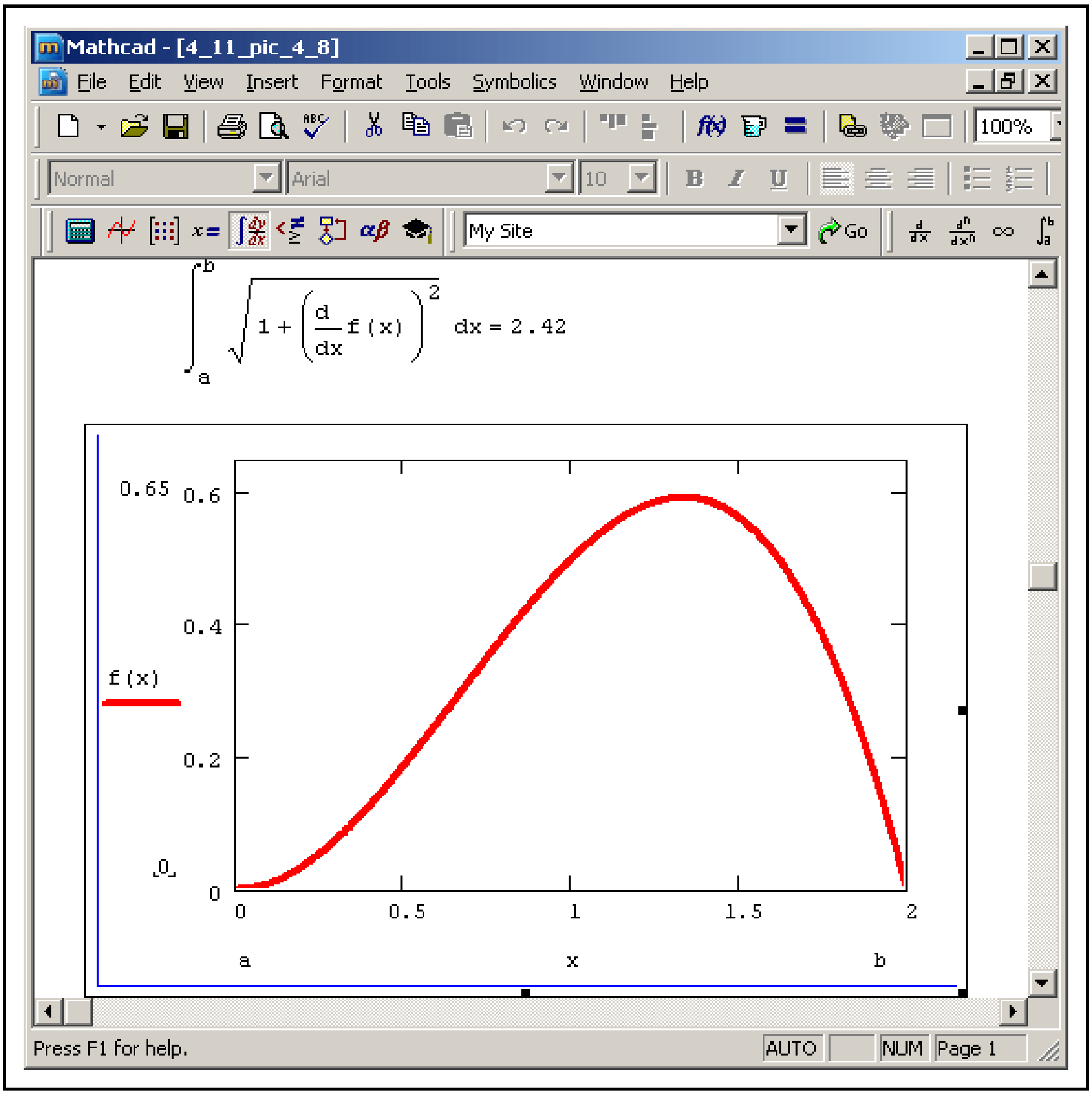
Ниже демонстрируется понятие интегральной суммы.



Приведем пример вычисления длины кривой, заданной функцией $f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{2}$ на промежутке $[a, b] = [0, 2]$. Заметим, что для получения результата применяется и оператор дифференцирования.

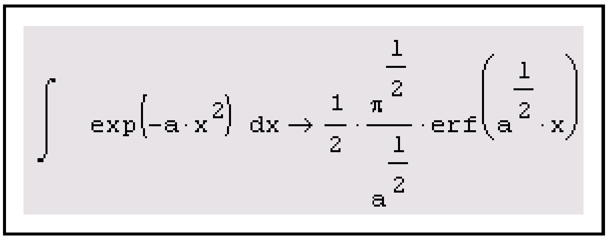


Для наглядности приведен и график данной функции.



4.10 Нахождение неопределенных интегралов

Для того чтобы найти неопределенный интеграл от заданной функции, следует ввести с панели **Calculus** символ неопределенного интеграла. Затем в появившемся шаблоне заполнить черные прямоугольники и ввести знак символьного равенства. По истечении некоторого времени справа от введенного выражения появится его аналитический результат.



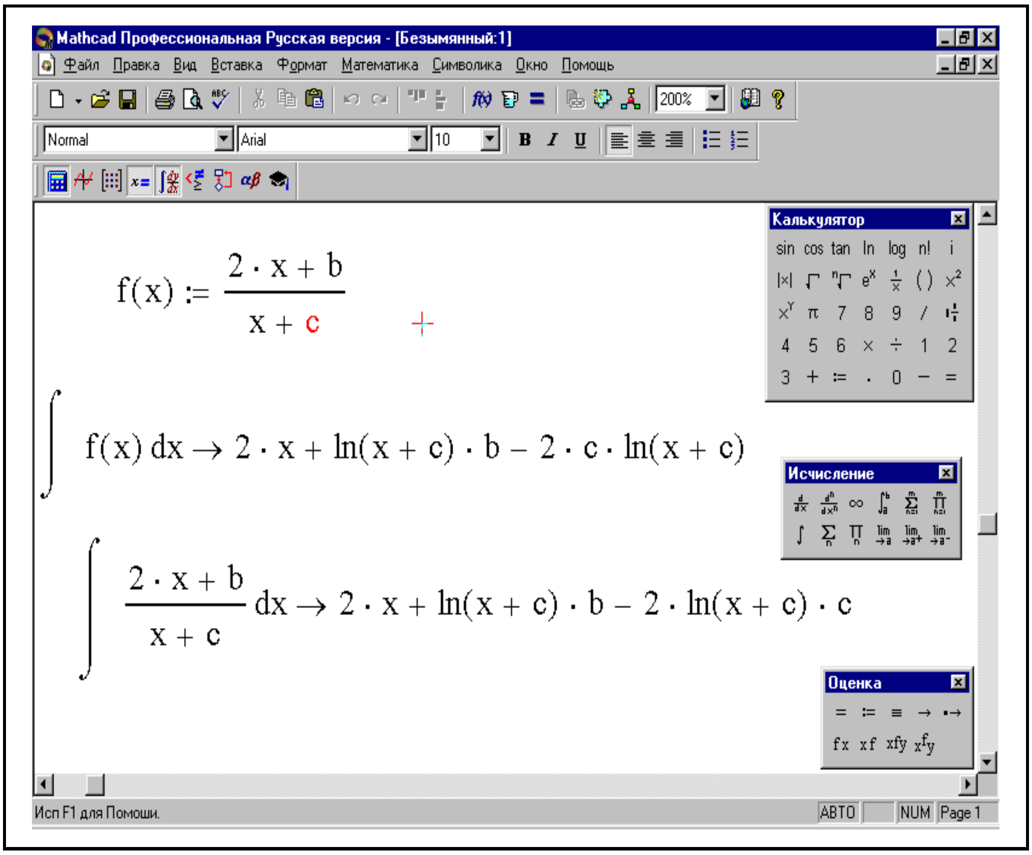
Покажем как найти неопределенный интеграл на примере функции

$$f(x) = \frac{2x+b}{x+c}.$$

1. Установим курсор, вызовем панель **Калькулятор** и наберем подынтегральное выражение.

2. Окружив набранное выражение выделяющей рамкой, скопируем его и вставим под знак интеграла, который ввели на экран с помощью панели **Исчисление**.

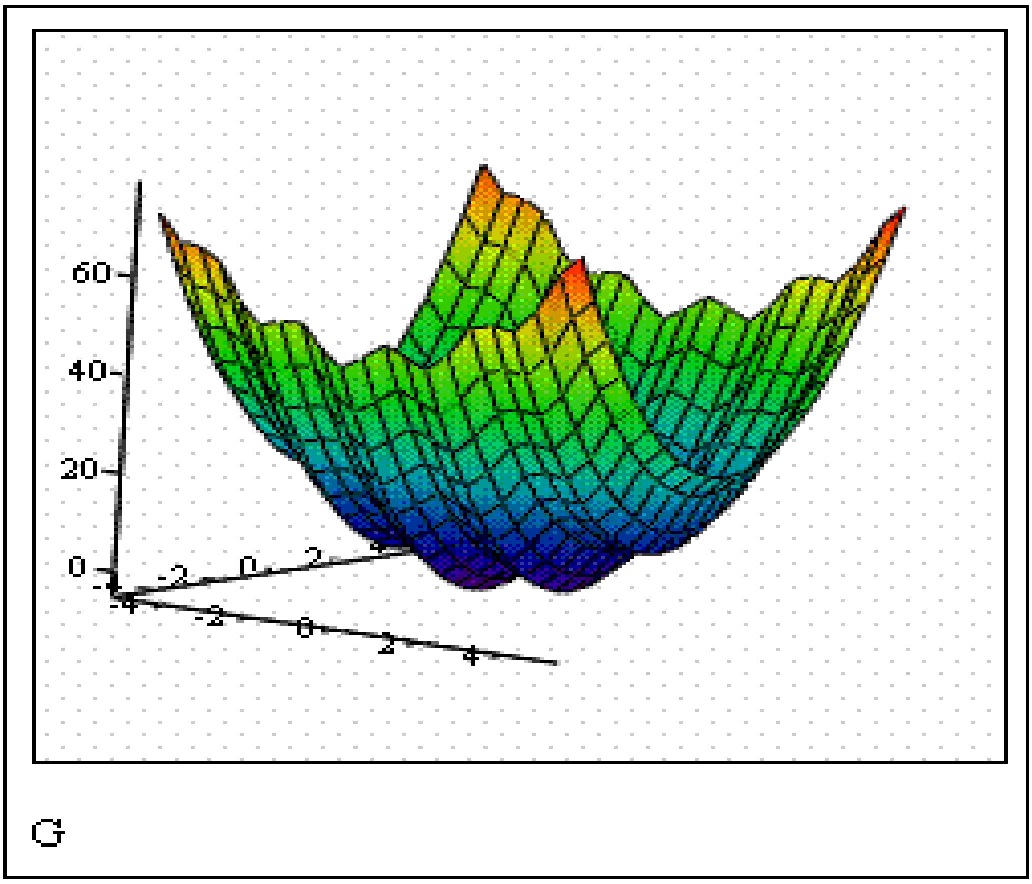
3. Выделив всю формулу выделяющей синей рамкой и введя стрелку с помощью кнопки **Символическое вычисление**, получим на экране результат.



4.11 Построение графика функции двух переменных

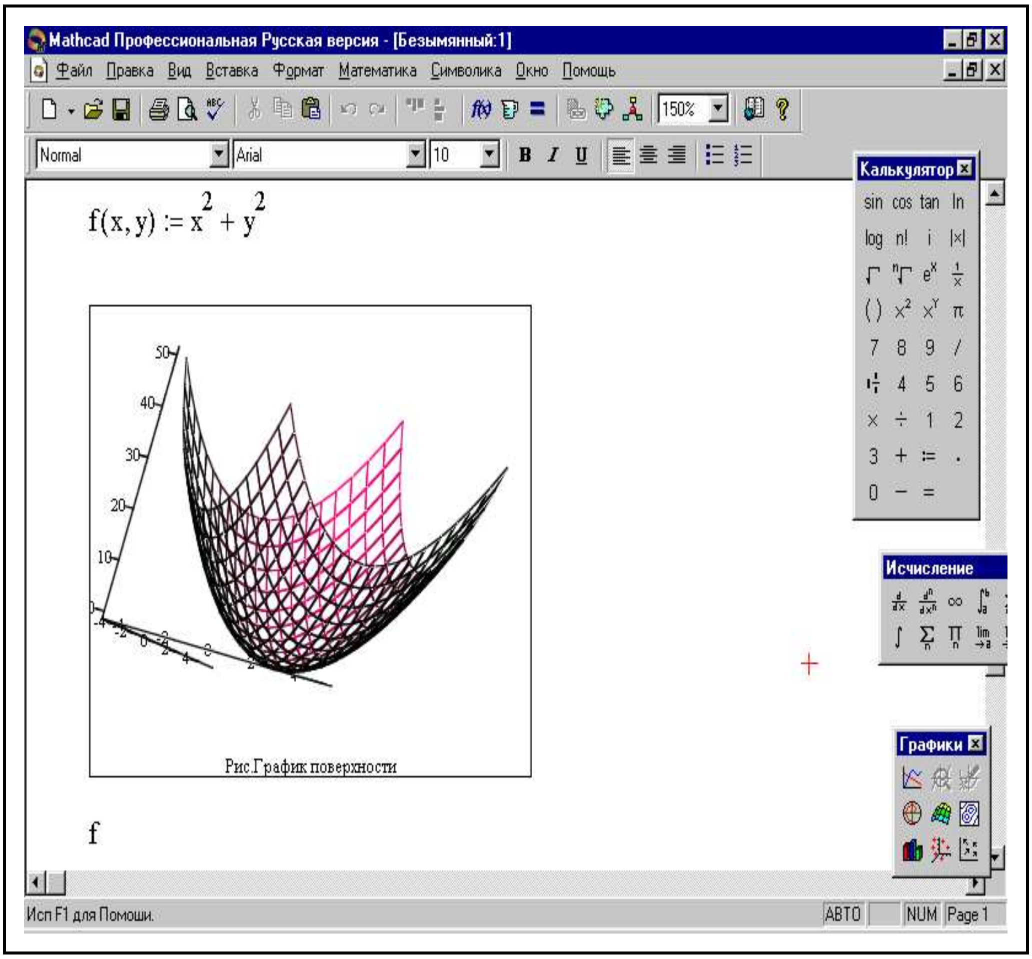
Рассмотрим построение графика функции $z = f(x, y)$.

1. Для записи функции выведем на экран панель **Калькулятор**, выполнив команду: **Вид: Панели: Вычисления.**
2. Для работы с графиками выведем на экран панель **Графики**, выполнив команду: **Вид: Панели: Графики.**
3. Установим курсор в нужное место рабочей области, на экране появится красный крестик.
4. Запишем заданную функцию, используя клавиатуру и панель **Калькулятор**. Установим курсор ниже формулы в том месте, где будет расположен график.
5. Нажмем на панели **Графики** кнопку **Поверхностный график**. Появится блок графика с координатными осями и с одним шаблоном для ввода.
6. В этот шаблон запишем имя функции без аргументов, и щелкнем мышью за пределами блока. В результате появится график поверхности.



7. Установим указатель мыши внутрь блока, нажмем левую кнопку мыши и, не отпуская ее, подвигаем мышью — график начнет вращаться. Повернем график таким образом, чтобы лучше проявились его характерные особенности. Для наглядности размеры графика можно изменять, а поверхность графика сделать сплошной.

Используя вышеописанную процедуру построим график функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.



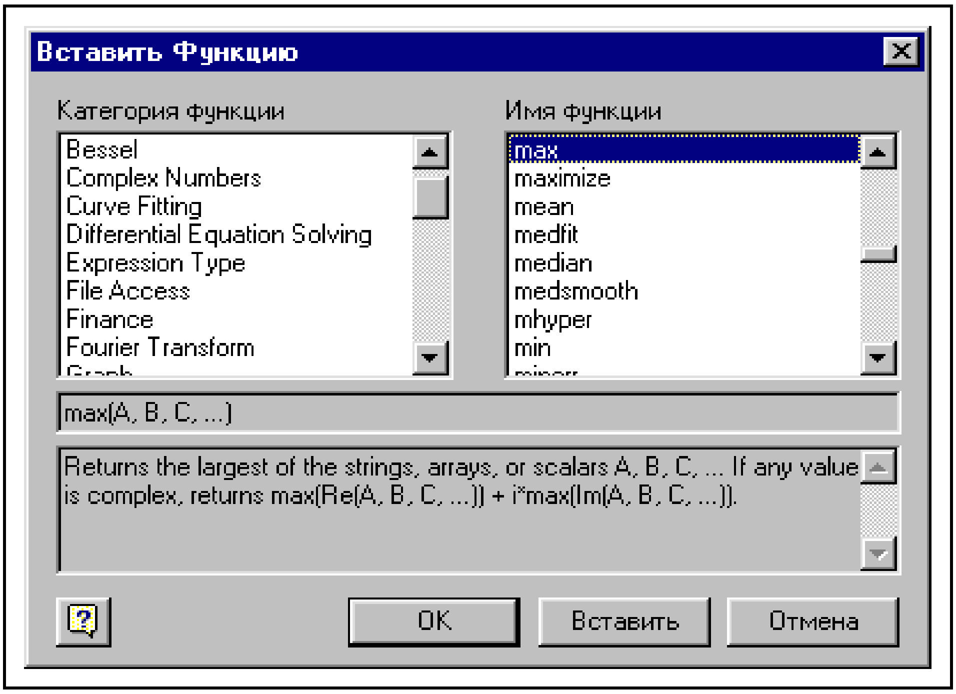
4.12 Нахождение экстремумов функций

В системе Mathcad имеется ряд средств для нахождения экстремумов как последовательностей, так и функций: **Max**, **Min**, **Maximize**, **Minimize**.

Например, найдем максимум и минимум заданной последовательности чисел: $25, 38, 10, 70$. Для этого

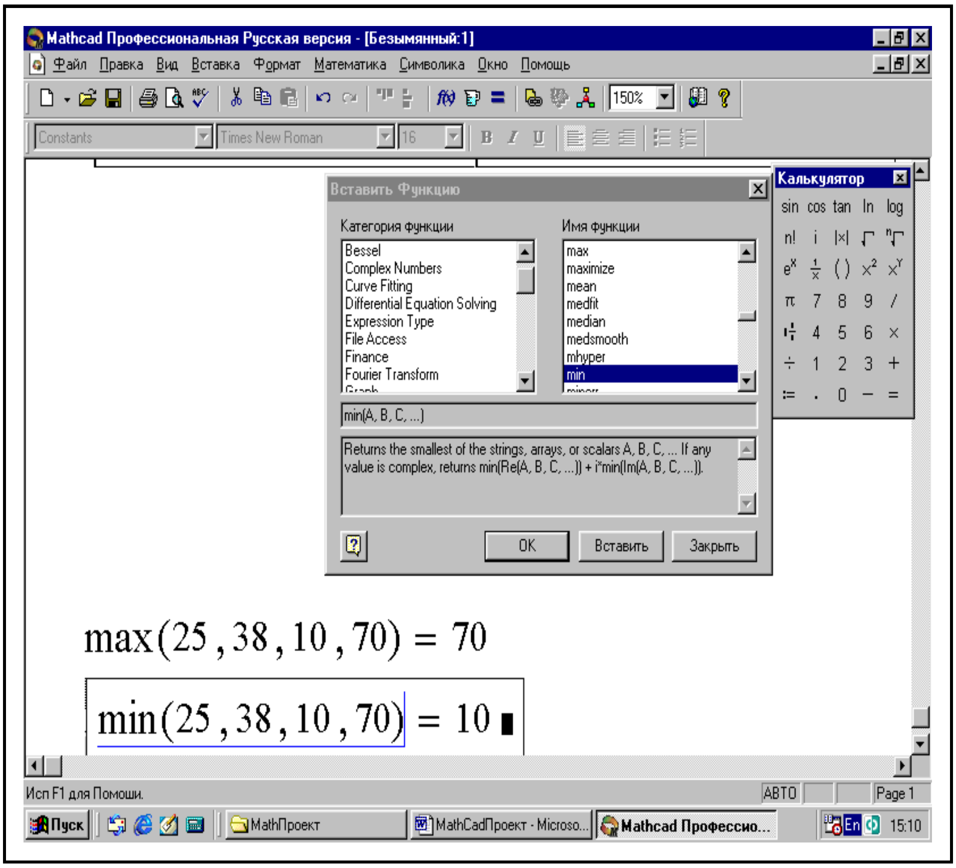
1. Установим курсор и активизируем панель **Калькулятор**.

2. Нажмем кнопку **Вставить функцию** на панели инструментов и выберем **max** (соответственно **min**) в окне **Вставить функцию**.



3. В появившиеся в рабочей области маркеры-шаблоны этой функции вставим заданную последовательность чисел: $25, 38, 10, 70$.

4. Нажмем знак равенства на панели **Калькулятор** и искомый результат отобразится на экране.



Рассмотрим задачи на поиск локальных экстремумов функций, которые означают нахождение ее максимума (наибольшего значения) или минимума (наименьшего значения) в некоторой области определения ее аргументов.

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции, которые могут применяться как в пределах вычислительного блока, так и автономно.

Minimize$(f, x_1, x_2, ..., x_n)$ выдает вектор значений аргументов, при которых функция f достигает минимума;

Maximize$(f, x_1, x_2, ..., x_n)$ выдает вектор значений аргументов, при которых функция f достигает максимума.

Здесь $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функция от n независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, по которым производится минимизация (максимизация). Всем аргументам функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ предварительно следует присвоить некоторые начальные значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения.

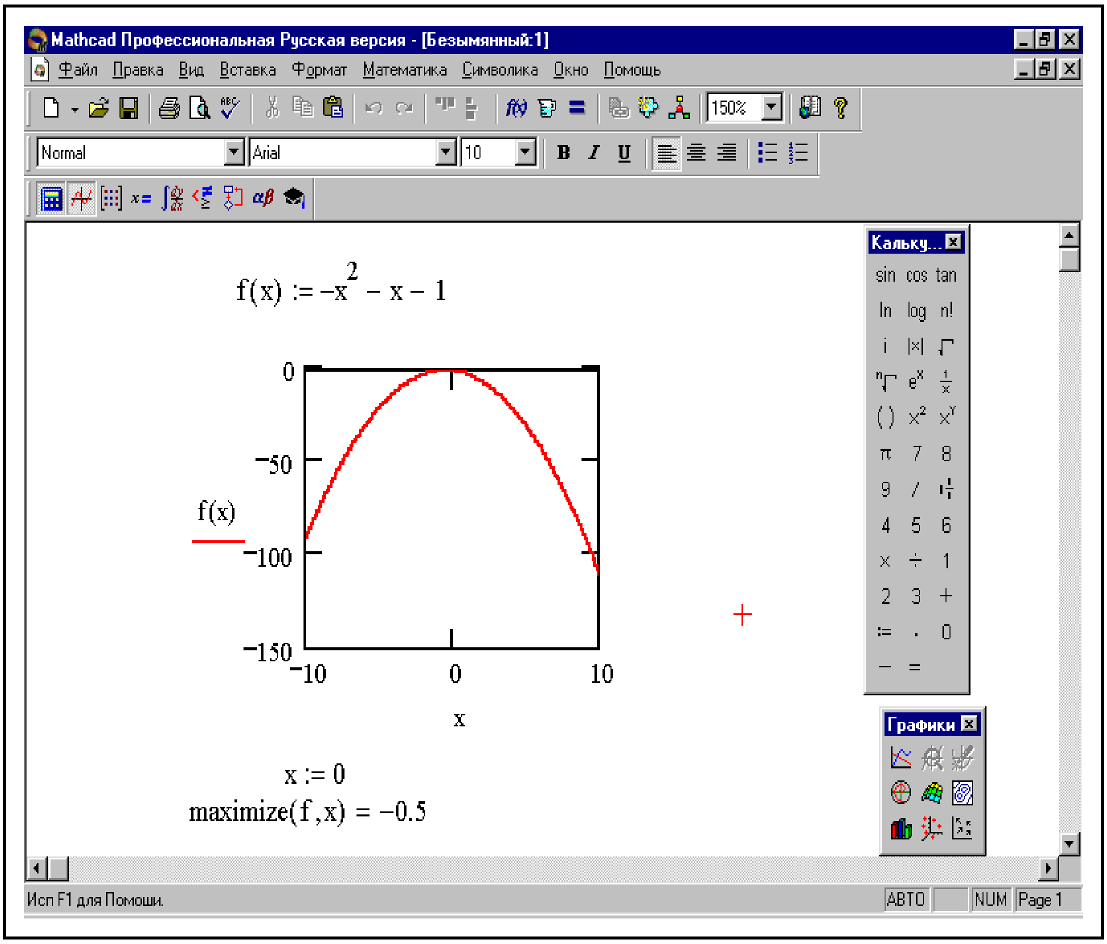
Рассмотрим нахождение максимума функции

$$f(x) = -x^2 - x - 1$$

одной переменной (заодно и построим ее график).

1. Введем данную функцию и построим ее график, используя панель **Графики**.

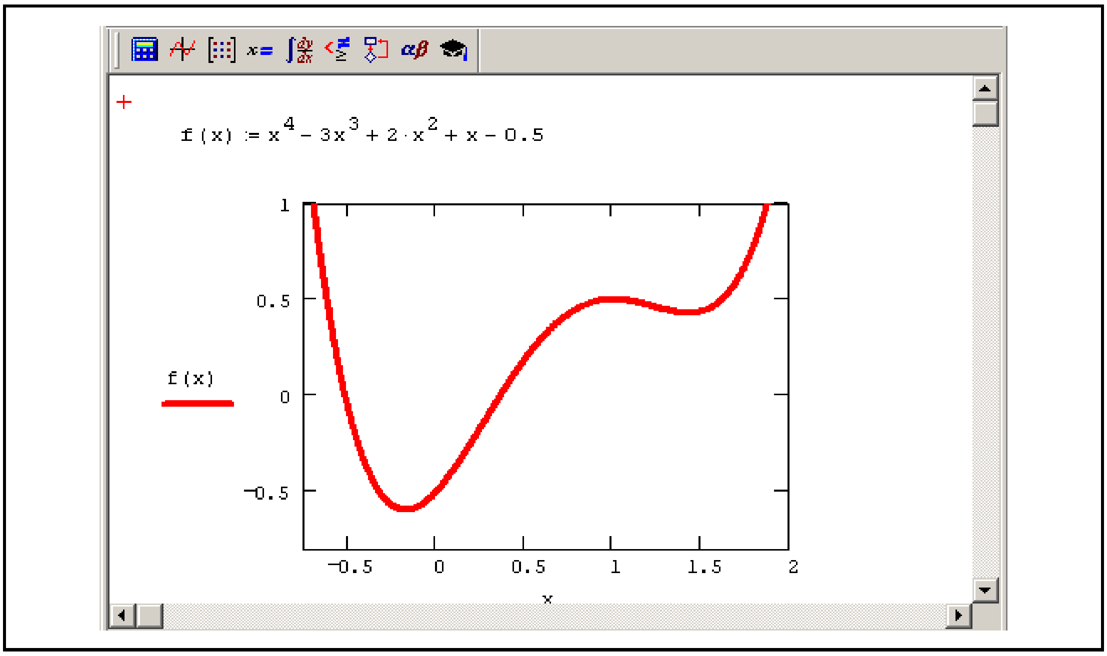
2. Зададим начальное значение переменной x, например $x = 0$, и найдем максимум заданной функции при помощи **maximize**.

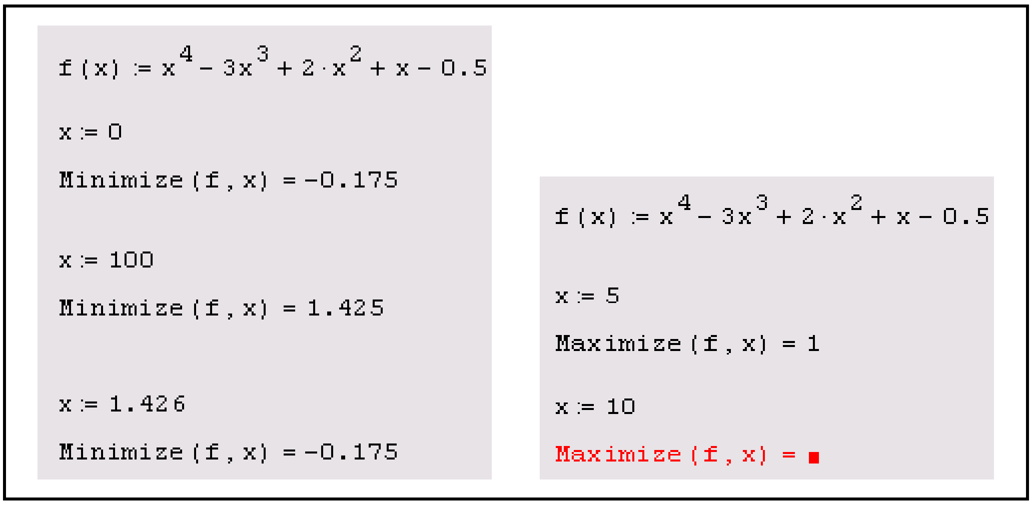


Поиск локальных экстремумов полинома четвертой степени

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 0.5$$

существенно зависит от начального приближения, что и показано ниже.

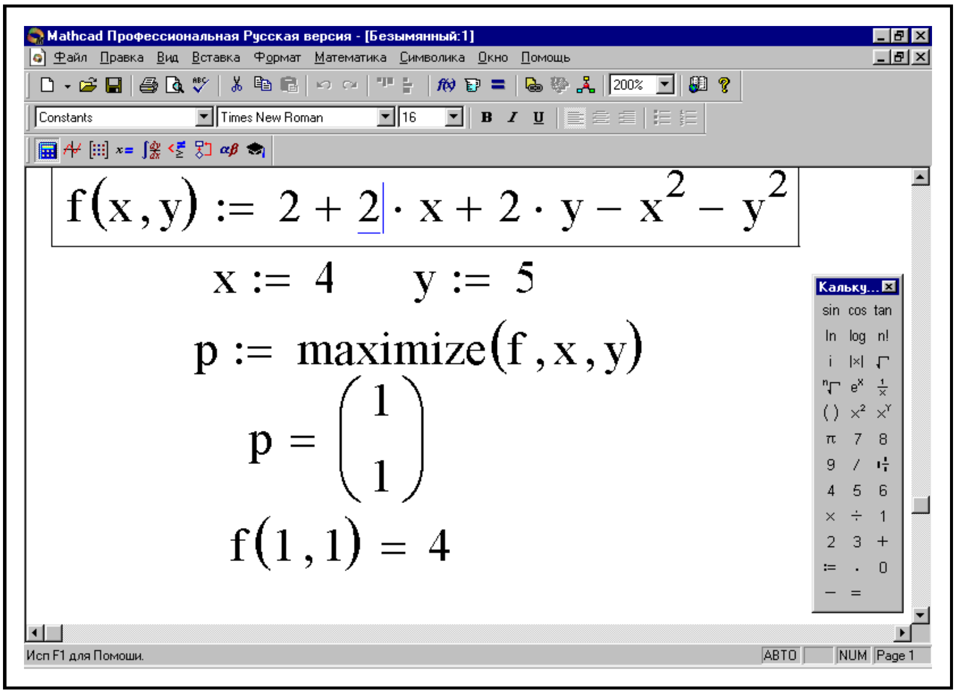




Найдем максимум следующей функции двух переменных

$$z = f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2.$$

Для этого запишем на экране заданную функцию и воспользуемся средством **maximize**.



В задачах на условный экстремум встроенные функции минимизации и максимизации должны быть включены в вычислительный блок, т. е. им должно предшествовать ключевое слово **Given**. В промежутке между **Given** и функцией поиска экстремума с помощью булевых операторов записываются логические выражения (неравенства, уравнения), задающие ограничения на значения аргументов минимизируемой функции.

$f(x) := x^4 - 3x^3 + 2\cdot x^2 + x - 0.5$

$x := 0$

Given

$1 < x < \infty$

$\mathrm{Minimize}(f, x) = 1.425$

$f(x) := x^4 - 3x^3 + 2\cdot x^2 + x - 0.5$

$x := 1$

Given

$2 < x < 10$

$\mathrm{Maximize}(f, x) = 10$

Найдем локальный минимум функции двух переменных

$$f(x, y) = -0,2(x - 5,07)^3 + 2(x - 5,07)^2 + (y - 10,03)^2$$

при $0 < x < 15$, $0 < y < 20$

$f(x, y) := 2\cdot(x - 5.07)^2 + (y - 10.03)^2 - 0.2\cdot(x - 5.07)^3$

$x := 1$

$y := 1$

Given

$0 < x < 15$

$0 < y < 20$

$\mathrm{Minimize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 5.07 \\ 10.03 \end{pmatrix}$

Дополнительное условие в виде равенства $x + y = 10$, заданного после ключевого слова **Given**, приводит к следующему решению задачи на условный экстремум:

$\mathrm{Minimize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 3.589 \\ 6.411 \end{pmatrix}$

4.13 Решение уравнений и систем уравнений

Начнем знакомство с принципами решения алгебраических уравнений в Mathcad с описания использования вычислительного блока **Given/Find**.

Рассмотрим решение системы n нелинейных уравнений с m неизвестными x_1, x_2, ..., x_m, которая записывается следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, ..., x_m) & = & b_1, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_m) & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & . & . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_m) & = & b_n. \end{array}\right. \tag{4.13.1}$$

Здесь f_i и b_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ — заданные функции и действительные числа. Индекс у функции f_i означает номер уравнения.

Заметим, что систему (4.13.1) можно формально переписать в виде одного уравнения

$$f(x) = b, \tag{4.13.2}$$

где x — вектор, составленный из переменных x_1, x_2, ..., x_m; b — вектор, составленный из правых частей уравнений, а $f(x)$ — соответствующая векторная функция их левых частей.

Для решения систем в Mathcad применяется специальный вычислительный блок **Given/Find (Дано/найти)**, состоящий из трех частей, идущих последовательно друг за другом:

1. **Given** — ключевое слово.

2. Система, записанная логическими операторами в виде равенств.

3. **Find**(x_1, x_2, ..., x_m) — средство для решения системы уравнений относительно переменных x_1, x_2, ..., x_m.

Вставлять логические операторы можно с помощью панели инструментов **Boolean**(Булевы операторы). Средство **Find** дает матрицу, составленную из всевозможных решений по каждой переменной, причем количество ее строк в точности равно числу аргументов **Find**. Структуру матрицы решения легко понять из примера, приведенного ниже.

Given

$$3x^3 + 2x^2 - 7x = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{22} & \frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{22} \end{pmatrix} = (0 \quad 1.23 \quad -1.897)$$

Уравнение имеет три различных корня, которые записываются справа от функции соответствующим трехмерным вектором, т.е. решение предлагается в форме матрицы размера (1×3) (одна неизвестная переменная имеет три значения, каждое из которых обращает уравнение в тождество).

Приведем еще два показательных примера, связанных с нахождением нулей функции нескольких аргументов (т.е. зависящих, помимо, собственно, неизвестного, еще и от дополнительных параметров).

$$\text{Given}\quad ax^3 + bx^2 - cx = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \left[\begin{matrix} 0 & \dfrac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b + \left(b^2 + 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \dfrac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b - \left(b^2 + 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{matrix}\right]$$

$$\text{Given}\quad ax^3 + bx^2 - cx = 0$$

$$\text{Find}(a) \rightarrow \frac{-1}{x^2}\cdot(b\cdot x - c)$$

$$\text{Given}\quad ax^3 + bx^2 - cx = 0$$

$$\text{Find}(a,b,c,x) \rightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \\ c & a\cdot x^2 + b\cdot x \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$a := 3 \qquad b := 2$$

$$\text{Given}\quad ax^3 + bx^2 - cx = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \left[\begin{matrix} 0 & \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\cdot(1 + 3\cdot c)^{\frac{1}{2}} & \dfrac{-1}{3} - \dfrac{1}{3}\cdot(1 + 3\cdot c)^{\frac{1}{2}}\end{matrix}\right]$$

Решение системы алгебраических уравнений отличается от описанного случая одного уравнения только количеством соотношений, задаваемых после ключевого слова **Given**. Соответственно, число неизвестных также может быть любым, причем необязательно равным числу уравнений.

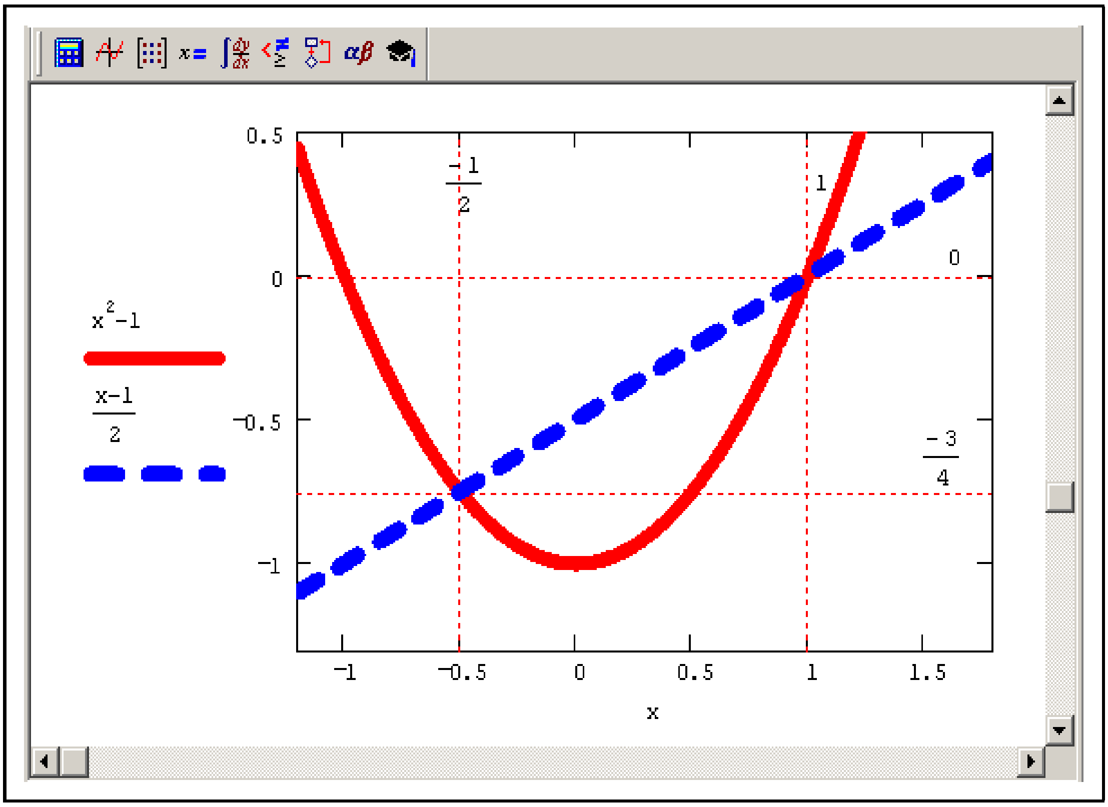
Given

$$-x^2 + y + 1 = 0$$

$$x = 2y + 1$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

Ниже дана геометрическая интерпретация системы двух уравнений.



Приведем еще один пример численного решения системы алгебраических уравнений.

$x := 10 \qquad y := 10$

Given

$$-x^2 + y + 1 = 0$$

$$x = 2y + 1$$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.133 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Численное решение системы, начинается с присвоения неизвестным начальных значений $x = 10$, $y = 10$. После этого следует ключевое слово **Given** и два логических оператора, задающих исследуемую систему уравнений. В результате Mathcad находит один из наборов корней $x = 1$, $y = 0$, причем первый элемент вектора решения есть первый аргумент функции **Find**, а второй элемент — ее второй аргумент. Если задать в первой строке другие начальные значения, расположенные ближе к другому корню, например, $x = 0$, $y = 0$, то найден в итоге будет другой набор корней $= -0.5$, $= -0.75$.

Численное решение находится с некоторой погрешностью, не превышающей встроенной константы $CTOL$. На самом деле в вычислительном блоке используются обе системные константы Mathcad, связанные с заданием погрешности: TOL и $CTOL$. Константа $CTOL$ ограничивает невязку, т.е. задает точность выполнения уравнений, введенных после ключевого слова **Given**. Например, если $CTOL = 0.001$, то уравнение $x = 10$ будет считаться выполненным и при $x = 10.001$, и при $x = 9.999$. Другая константа TOL определяет условие прекращения итераций численным алгоритмом. Значение $CTOL$ может быть задано пользователем так же, как и TOL, например, $CTOL = 0.01$. По умолчанию принято, что $CTOL = TOL = 0.001$, но по желанию их можно переопределить.

Если предпринять попытку решить несовместную систему, то Mathcad выдаст сообщение об ошибке, гласящее, что ни одного решения не найдено, и предложение попробовать поменять начальные значения или значение погрешности.

Для решения уравнения с одним неизвестным в Mathcad, помимо вычислительного блока **Given/Find**, предусмотрено средство **root**$(f(x), x, a, b)$, где $f(x)$ — скалярная функция, определяющая уравнение $f(x) = 0$; x — имя скалярной переменной, относительно которой решается уравнение; a, b — границы интервала, внутри которого происходит поиск корня.

$$\mathrm{root}\left(e^{x} - 1, x, -1, 1\right) = 0$$

$$x := 1$$

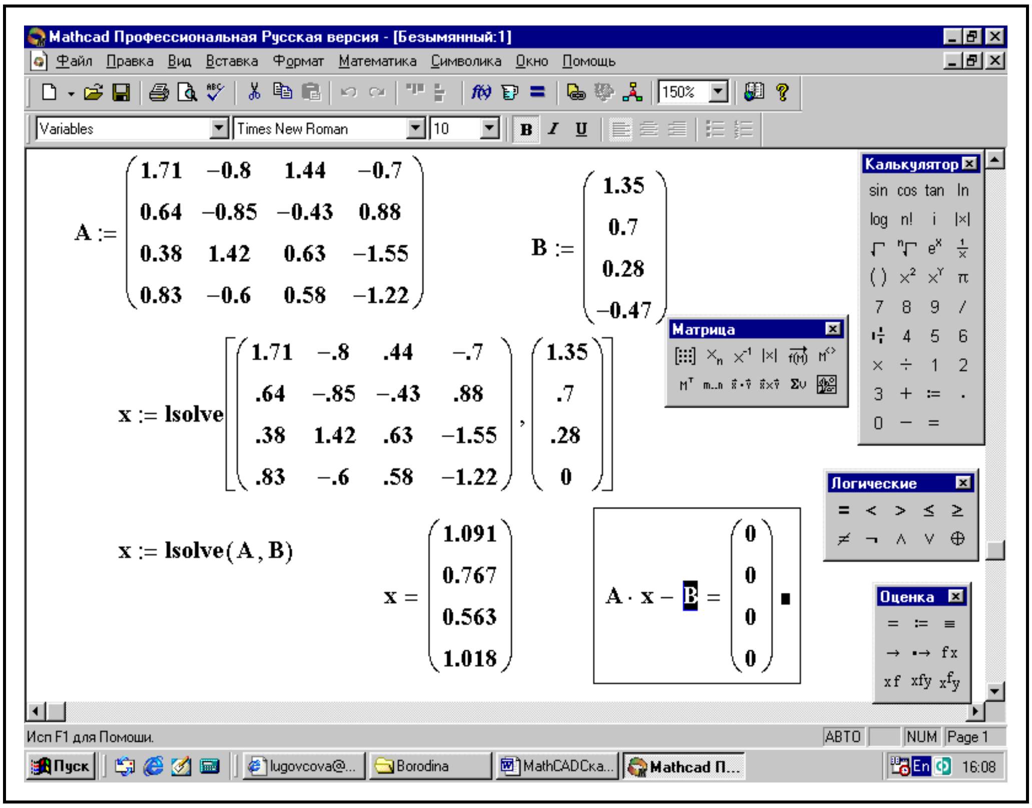
$$\mathrm{root}\left(e^{x} - 1, x\right) = 2.21 \times 10^{-5}$$

4.14 Линейные уравнения и системы

В пакете Mathcad имеется специальное средство

$$\mathbf{lsolve}(A, B)$$

для нахождения решения линейных систем уравнений. Это средство находит x решения системы линейных уравнений $Ax = B$, где A — матрица системы, а B — вектор правых частей системы линейных уравнений.



4.15 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Решением обыкновенного дифференциального уравнения является функция одной переменной. Пакет Mathcad имеет ряд программ, предназначенных для нахождения решений дифференциальных уравнений. Результатом работы программ является набор значений искомой функции, вычисленный на некотором множестве точек независимой переменной (решение предъявляется в виде матрицы, содержащей значения функции).

При использовании метода Рунге-Кутта применяется программа

$$\mathbf{rkfixed}(y_0, x_1, x_2, n, f),$$

которая выдает результат решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде таблицы. Ее можно использовать для решения как одного дифференциального уравнения, так и системы дифференциальных уравнений. Эта функция имеет пять аргументов:

y_0 — вектор начальных значений искомых функций;

x_1 — начальное значение независимой переменной;

x_2 — конечное значение независимой переменной;

n — фиксированное число шагов интегрирования;

f — правая часть дифференциального уравнения в нормальной форме.

Приведем пример решения дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = x + \cos(y/1.25), \quad x \in [0.4, 1.4]$$

при заданном начальном значении $y_0(0.4) = 0.8$. Для этого выполним следующие действия.

1. Запишем начальное значение $Y0 := 0.8$

2. Зададим правую часть уравнения

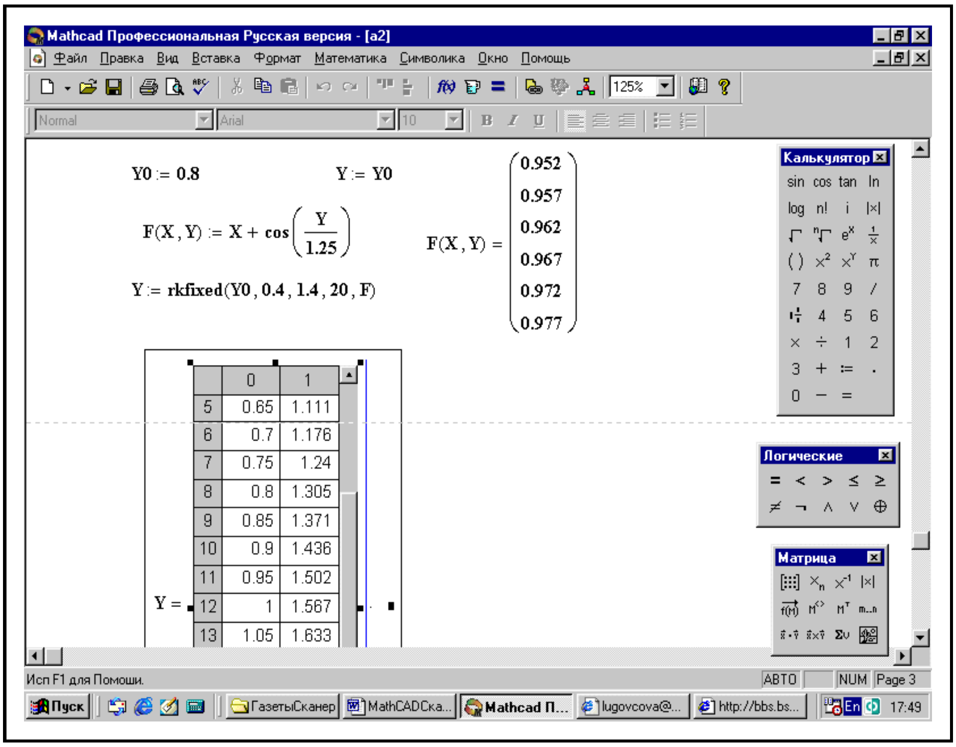
$$F(X, Y) := X + \cos(Y/1.25).$$

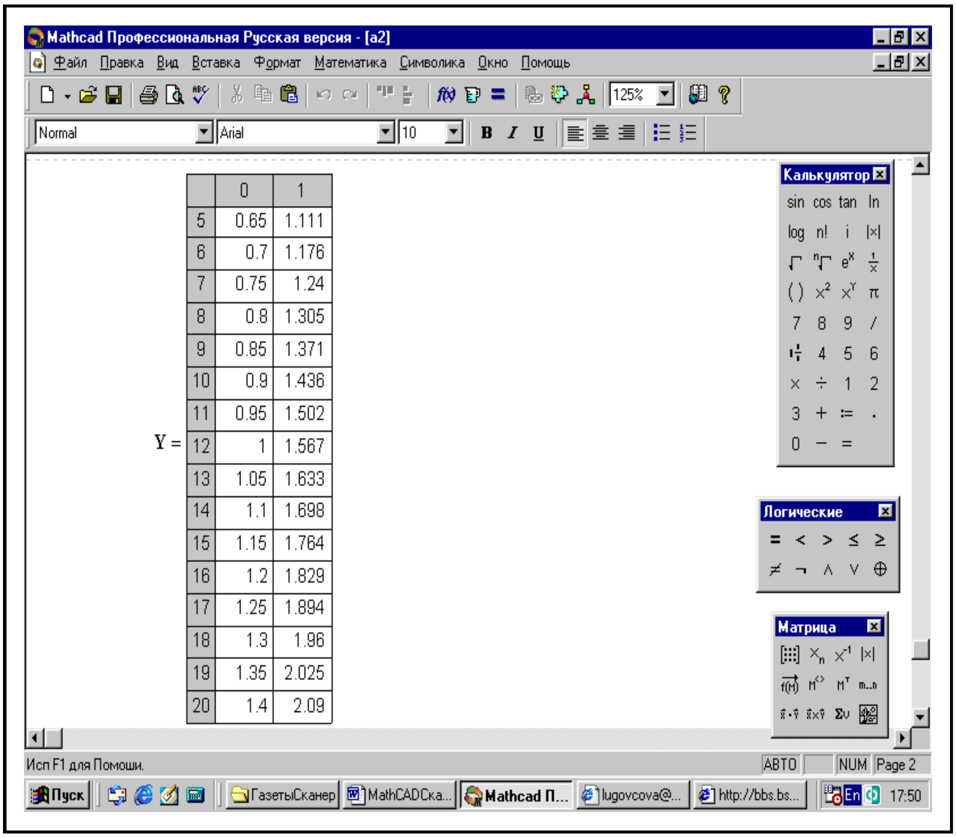
3. Введем встроенную функцию, выполняющую дифференцирование $Y := rkfixed(Y0, 0.4, 1.4, 20, F)$, где $Y0$ — вектор начальных значений искомой функции; 0.4 — начальное значение независимой переменной; 1.4 — конечное значение независимой переменной; 20 — количество шагов интегрирования; F — правая часть дифференциального уравнения.

Программа

$$rkfixed(Y0, 0.4, 1.4, 20, F)$$

выдает таблицу значений искомой функции (решения уравнения) в виде матрицы размера (20×2). Первый столбец матрицы (таблицы) содержит текущее значение независимой переменной x, а второй столбец — значения искомой функции $y(x)$ для соответствующих значений аргумента x.


Mathcad Профессиональная Русская версия - [a2]
Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символика Окно Помощь
Y0 := 0.8
Y := Y0
F(X, Y) := X + cos(Y/1.25)
F(X, Y) =
0.952
0.957
0.962
0.967
0.972
0.977
Y := rkfixed(Y0, 0.4, 1.4, 20, F)
Y =
0 1
5 0.65 1.111
6 0.7 1.176
7 0.75 1.24
8 0.8 1.305
9 0.85 1.371
10 0.9 1.436
11 0.95 1.502
12 1 1.567
13 1.05 1.633
Калькулятор
Логические
Матрица
Исп F1 для Помощи.
Пуск
17:49


Mathcad Профессиональная Русская версия - [a2]
Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символика Окно Помощь
Y =
0 1
5 0.65 1.111
6 0.7 1.176
7 0.75 1.24
8 0.8 1.305
9 0.85 1.371
10 0.9 1.436
11 0.95 1.502
12 1 1.567
13 1.05 1.633
14 1.1 1.698
15 1.15 1.764
16 1.2 1.829
17 1.25 1.894
18 1.3 1.96
19 1.35 2.025
20 1.4 2.09
Калькулятор
Логические
Матрица
Исп F1 для Помощи.
Пуск
17:50

ЛИТЕРАТУРА

Альсевич, В. В. Введение в математическую экономику. Конструктивная теория : учеб. пособие / В. В. Альсевич. — М. : ЛИБРОКОМ, 2009. — 256 с.

Астровский, А. И. Высшая математика : учеб. пособие : в 3 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. — Минск : БГЭУ, 2009. — Ч. 1. — 398 с.

Астровский, А. И. Высшая математика : учеб. пособие : в 3 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. — Минск : БГЭУ, 2011. — Ч. 2. — 413 с.

Астровский, А. И. Математическая экономика. Теория потребления: учеб. пособие А. И. Астровский. — Минск : БГЭУ, 2015. — Ч. 1. — 168 с.

Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1984.

Багриновский, К. А. Экономико-математические методы и модели / К. А. Багриновский, В. М. Матюшок. — М. : РУДН, 1999. — 183 с.

Данилов, Н. Н. Курс математической экономики : учеб. пособие / Н. Н. Данилов. — М. : Высш. шк., 2006. — 407 с.

Замков, О. О. Математические методы в экономике : учеб. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — 2-е изд. — М. : МГУ, 1999. — 368 с.

Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. — М. : АЙРИС-ПРЕСС, 2002. — 576 с.

Кирьянов, Д. В. Самоучитель Mathcad 11 / Д. В. Кирьянов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 560 с.

Колемаев, В. А. Математическая экономика / В. А. Колемаев. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 399 с.

Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учеб. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — 2-е изд., испр. — М. : Дело, 2001. — 688 с.

Туманова, Е. А. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода : учеб. / Е. А. Туманова, Н. А. Шагас. — М. : ИНФРА-М, 2004. — 400 с.

Экономико-математическое моделирование : учеб. / Под общ. ред. И. Н. Дрогобыцкого. — М. : Экзамен, 2004. — 800 с.