4.3. Основы дифференциального исчисления

Рассмотрим некоторые задачи из области геометрии, механики и психологии, приводящие к понятию производной.

Задача нахождения касательной к графику функции. Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, принадлежащей координатной оси *Ox*. Придав x_0 приращение Δx, получим точку $x_0 + \Delta x$. Точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ координатной оси определяют точки плоскости, $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, принадлежащие графику функции (см. рис. 4.1).

Прямая $\ell_с$, проходящая через две точки графика M_0 и M называется его *секущей* При стремлении приращения Δx к нулю точка M стремится к M_0, а секущая $\ell_с$ стремиться принять положение прямой $\ell_к$ (см. рис. 4.1) и при $\Delta x = 0$ совпадает с этой прямой. Прямая $\ell_к$ называется *касательной* к графику функции в точке M_0.

Уравнение секущей $\ell_с$ по двум ее точкам имеет вид:

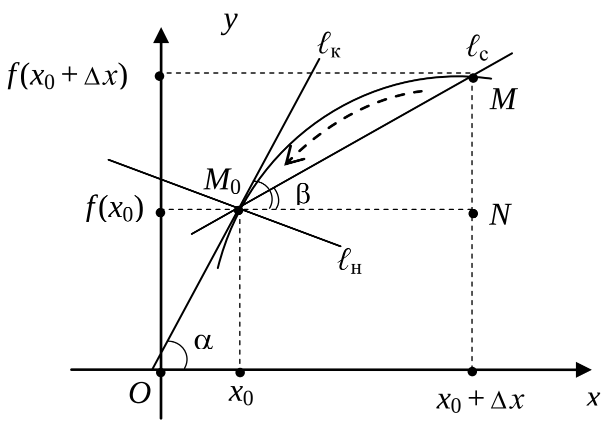

Рис. 4.1.

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}.$$

Выразив из уравнения *y*, получим уравнение секущей с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0),$$

в котором угловой коэффициент равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{MN}{M_0 N} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Следовательно, угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной $\ell_к$ равен:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (4.13)$$

т.е. — значению производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Уравнение касательной к графику функции, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, имеет следующий вид:

$$y = k(x - x_0) + f(x_0),$$

где k вычисляется по формуле (4.13).

Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ называется прямая $\ell_н$, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной (см. рис. 4.1). Так как связь угловых коэффициентов k_1 и k_2 перпендикулярных прямых определяется равенством

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

то уравнение нормали $\ell_н$ записывается в следующем виде:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

Углом между кривыми, являющимися графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и пересекающимися в точке M_0, называется угол φ между касательными к кривым в этой точке (см. рис. 4.2). Тангенс этого угла вычисляется по формуле

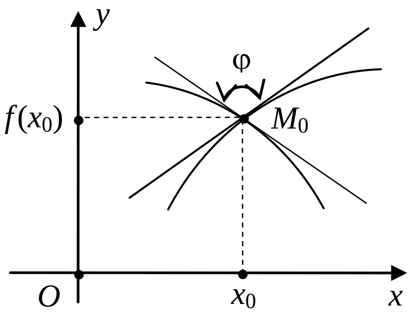

Рис. 4.2.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

где k_2, k_1 — угловые коэффициенты касательных, к графикам функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке M_0, вычисляемых по формуле (4.13).

Задача нахождения мгновенной скорости. Пусть некоторое тело неравномерно движется по прямой и известна функция $s = s(t)$, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t. Тогда к моменту времени t_0 тело пройдет путь равный $s(t_0)$. К моменту времени $t_0 + \Delta t$ тело пройдет путь равный $s(t_0 + \Delta t)$, где Δt некоторый промежуток времени. Отношение

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

определяет среднюю скорость тела, при прохождении телом расстояния $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Вычислив предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t},$$

получим мгновенную скорость тела $v(t_0)$ в момент времени t_0. Таким образом, мгновенная скорость $v(t)$ неравномерно движущегося тела в данный момент времени t есть производная функции $s = s(t)$, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t.

По аналогии со скоростью движения тела вводится понятие скорости изменения значений зависимой от x переменной величины y при изменении значений независимой переменной величины x. Если $y = f(x)$ — функция, выражающая зависимость y от x, то ее производная определяет *скорость изменения величины y относительно величины x.*

Рассмотрим функцию $\tau = \frac{0{,}4}{\sqrt{V}}$, устанавливающую зависимость латентного времени реакции человека от скорости цели при слежении за нею. Пусть V_0

скорость цели, тогда время реакции при такой скорости будет равно $\tau(V_0)=\dfrac{0{,}4}{\sqrt{V_0}}$. При изменении скорости до $V_0+\Delta V$ время реакции изменится и станет равным $\tau(V_0+\Delta V)=\dfrac{0{,}4}{\sqrt{V_0+\Delta V}}$. Таким образом, отношение

$$\frac{\tau(V_0+\Delta V)-\tau(V_0)}{\Delta V}=\frac{0{,}4\cdot\left(1\big/\sqrt{V_0+\Delta V}-1\big/\sqrt{V_0}\right)}{\Delta V}$$

определяет среднее время реакции при изменении скорости цели от V_0 до $V_0+\Delta V$. Следовательно, предел

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{0{,}4\cdot\left(1\big/\sqrt{V_0+\Delta V}-1\big/\sqrt{V_0}\right)}{\Delta V}$$

задает время реакции наблюдателя за целью при ее скорости, равной V_0.

Приведя к общему знаменателю дроби числителя, полученного отношения, умножив и разделив затем полученное в числителе иррациональное выражение $\sqrt{V_0}-\sqrt{V_0+\Delta V}$ на сопряженное $\sqrt{V_0}+\sqrt{V_0+\Delta V}$, и воспользовавшись формулой разности квадратов, получим равносильное выражение вида:

$$\frac{0{,}4\cdot\left(\left(\sqrt{V_0}\right)^2-\left(\sqrt{V_0+\Delta V}\right)^2\right)}{\Delta V\cdot\sqrt{V_0}\cdot\sqrt{V_0+\Delta V}\cdot\left(\sqrt{V_0}+\sqrt{V_0+\Delta V}\right)}=-\frac{0{,}4}{\sqrt{V_0}\cdot\sqrt{V_0+\Delta V}\cdot\left(\sqrt{V_0}+\sqrt{V_0+\Delta V}\right)},$$

предел которого при $\Delta V\to 0$ равен

$$-0{,}4\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\sqrt{V_0}\cdot\sqrt{V_0+\Delta V}\cdot\left(\sqrt{V_0}+\sqrt{V_0+\Delta V}\right)}=-\frac{0{,}4}{2\sqrt{V_0^3}}=-\frac{0{,}2}{V_0\sqrt{V_0}},$$

т.е. — значению производной функции $\tau=\dfrac{0{,}4}{\sqrt{V}}$ при $V=V_0$. Отрицательное значение времени реакции в момент времени V означает, что данная функция убывает и с увеличением скорости время реакции уменьшается.

Определение производной. Приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0 при заданном приращении Δx аргумента x называется разность

$$\Delta y(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad (4.14)$$

которая обозначается также Δy (см. рис. 4.3).

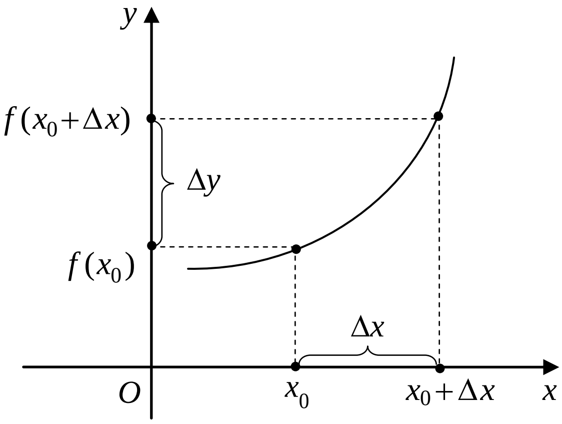

Рис. 4.3.

Если существует конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, то этот предел называется *производной* функции в точке x_0, а сама функция называется *дифференцируемой* в точке x_0. Нахождение производной называют *дифференцированием* функции. Для производной используются следующие обозначения: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или y', $\dfrac{dy}{dx}$. Следовательно, производная в точке x_0 вычисляется по формуле:

$$\frac{d\,f(x_0)}{d\,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.15)$$

Односторонние пределы вида

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

называются, соответственно, *правой* и *левой* производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Для существования производной функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее односторонние производные существовали и были равны, т.е. — выполнялось равенство $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Таблица производных основных элементарных функций. При дифференцировании элементарных функций в конечном итоге требуется вычислять производные основных элементарных функций, которые представлены следующей таблицей:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \alpha \in R$;

2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0, a \neq 1$; 3) $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$; 5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

6) $(\sin x)' = \cos x$; 7) $(\cos x)' = -\sin x$;

8) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 9) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 13) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференциального исчисления. При вычислении производных функций, которые получаются с помощью арифметических операций, выполняемых над дифференцируемыми функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, используются следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0,\ c \in R$;

2) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

3) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2},\ g(x) \neq 0$.

Пример 4.14. Используя определение, найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Функция $y = x^2$, задающая параболу, определена на всей числовой оси. Поэтому, выбирая произвольную точку x и фиксируя приращение Δx, вычисляем приращение

$$\Delta y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Затем, используя формулу (4.15), находим производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

следовательно, $(x^2)' = 2x$.

Пример 4.15. Используя правила дифференцирования, найти производную функции $y = x^2 \cos x$ и вычислить ее значение при $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Используя четвертое правило дифференцирования и табличные производные степенной функции и $\cos x$, вычисляем производную:

$$y' = (x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Полагая далее в найденном выражении производной $x = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4},$$

так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Производная сложной функции. Пусть задана сложная функция $z = g \circ f(x)$, определенная на множестве X с множеством значений Z, являющаяся композицией двух функций функция $y = f(x)$ и $z = g(y)$, определенных на множествах X и Y с множествами значений Y и Z, соответственно. Композиция данных функций определяет *сложную функцию*, значения которой вычисляются по формуле

$$z(x) = g(f(x)).$$

Таким образом, сложной функцией является такая функция, аргумент которой — также функция.

Правило вычисления производной сложной функции формулируется следующим образом: *производная сложной функции* $z = g(f(x))$*, являющейся композицией двух функций* $z = g(y)$ *и* $y = f(x)$*, равна произведению производной* $g'(y)$*, аргументом которой является функция* $y = f(x)$*, и производной* $f'(x)$*, аргумента сложной функции,* т.е. справедливо равенство

$$z'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (4.16)$$

Пример 4.16. Найти производную функции $z = \sin^3 x$.

Решение. Так как $\sin^3 x = (\sin x)^3$, то данная функция является сложной степенной функцией $z = y^3$, аргументом которой является функция $y = \sin x$. Вычисли вначале производные $z'(y) = (y^3)' = 3y^2$ и $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$, и воспользовавшись формулой (4.16), находим производную сложной функции:

$$z'(x) = \left(y^3\right)' \cdot y'(x) = 3z^2 \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Производная обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$, определенная на множестве *X* с множеством значений *Y*, такова, что каждому *y* из *Y* соответствует единственный *x*, принадлежащий *X*, такой, что $f(x) = y$. При выполнении этого условия для данной функции $y = f(x)$ существует *обратная функция* $x = g(y)$, определенная на множестве *Y* с множеством значений *X*, такая, что

$$f(x) = f(g(y)) = y, \qquad g(f(x)) = g(y) = x.$$

Формула для вычисления производной обратной функции, получается посредством дифференцирования обеих частей равенства $y = f(x)$, с учетом того, $f(x) = f(g(y))$ — сложная функция относительно переменной *y*. Вычисляя с помощью формулы (4.16) производные левой и правой частей равенства $y = f(g(y))$ по переменной *y*, получим:

$$y' = 1, \qquad \left(f(g(y)) \right)' = f'(g(y)) \cdot g'(y) = f'(x) \cdot g'(y)$$

Приравняв вычисленные производные, получим равенство

$$1 = f'(x) \cdot g'(y),$$

из которого выражаем производную обратной функции

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример 4.17. Для функции $y = \sin x$ вычислить производную обратной функции.

Решение. Будем считать, что $x = g(y)$ — обратная функция для $y = \sin x$. Тогда, используя указанную выше формулу для вычисления $g'(y)$, получим:

$$g'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Известно, что обратной для $y = \sin x$ является функция $x = \arcsin y$, следовательно $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Производные высших порядков. *Производной второго порядка* или *второй производной* функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е. $\left(f'(x)\right)'$. Вторая производная функции $y = f(x)$ обозначается y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ и, следовательно, $y'' = \left(y'\right)'$ или $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Производной третьего порядка или *третьей производной* функции $y = f(x)$ называется производная от ее второй производной, которая обозначается y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$, и, следовательно, $y''' = \left(y''\right)'$ или $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ или *n-й производной* называется производная от ее производной $(n-1)$-го порядка. Производная *n*-го порядка, начиная с $n = 4$, обозначается $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ и, следовательно, вычисляется по формуле $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ или $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Механический смысл второй производной состоит в том, что ускорение $a(t)$ прямолинейно и неравномерно движущегося тела в данный момент времени t есть вторая производная от функции $s = s(t)$, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t, т.е. $a(t) = s''(t)$.

Пример 4.18. Найти третью производную функции $y = \ln(2x+3)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. По определению третья производная в точке x равна $y''' = \left(y''\right)'$. Следовательно, нужно найти первую и вторую производные данной функции:

$$y' = \frac{2}{2x+3} = 2(2x+3)^{-1}, \quad y'' = \left(2(2x+3)^{-1}\right)' = 2\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}\cdot 2 = -4(2x+3)^{-2}.$$

Далее, находим третью производную $y''' = \left(-4(2x+3)^{-2}\right)' = \dfrac{16}{(2x+3)^3}$ и вычисляем ее значение $y'''(0) = \dfrac{16}{(2\cdot 0+3)^3} = \dfrac{16}{27} \approx 0{,}59$ в точке $x_0 = 0$.

Производная применяется при вычислении дифференциалов, исследовании различных свойств функций (монотонность, выпуклость графиков функций, наличие экстремумов функции, при вычислении пределов), при описании дифференциальных уравнений, моделирующих различные процессы и явления экономического, социального и психологического характера.

Дифференциал функции и его применение. Если приращение функции $y = f(x)$, определенной в окрестности точки x_0, может быть представлено в этой точке в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad (4.17),$$

где A — константа, Δx — достаточно малое приращение, а $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, то *главная линейная часть* $A\cdot\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом* функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Деля левую и правую части равенства (4.17) на приращение Δx, убеждаемся в том, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Таким образом, полагая для единообразия обозначений $\Delta x = dx$, получим следующую формулу для вычисления дифференциала в заданной точке x_0:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \qquad (4.18)$$

Дифференциал используется при вычислении приближенных значений функций при достаточно малых приращениях Δx. Если в (4.17) оставить только главную линейную часть приращения, то с учетом формулы (4.18), получаем приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0), \tag{4.19}$$

которое используется для вычисления приближенно значения функции $y = f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ при заданном приращении Δx.

Геометрический смысл дифференциала. Если приращение абсциссы точки M_0 изменяется от нуля до Δx, то при движении M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$ она занимает положение точки M. Следовательно, в данном случае приращение функции Δy определяет приращение ординаты точки графика M_0 при изменении ее абсциссы на величину Δx (см. рис. 4.4). Если точка M_0 движется вдоль касательной, то она занимает положение точки N, ордината которой получает приращение M_1N (см. рис. 4.4).

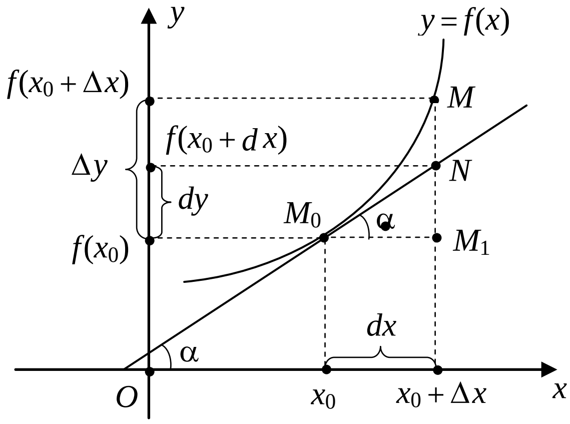

Рис. 4.4.

Так как треугольник M_0M_1N прямоугольный, то

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{M_1N}{M_0M_1} = \frac{M_1N}{dx},$$

откуда следует справедливость равенства $M_1N = f(x_0)dx = dy$.

Таким образом, *геометрический смысл* дифференциала состоит в том, что от равен приращению ординаты точки касательной M_0 при приращении ее абсциссы на величину Δx.

Пример 4.19. Найти приближенно значение $\sin 28^\circ$.

Решение. При вычислении значений числовых функций значениями аргумента должны быть числа. Поэтому при вычислении значений тригонометрических функций необходимо переходить от градусной меры углов к радианной. Такой переход осуществляется с помощью формулы

$$\varphi_{\text{радиан}} = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ}.$$

При использовании приведенной формулы в качестве x_0 выбирается такое значение аргумента, близкое к заданному, при котором легко вычисляется значение функции. Поэтому полагаем $\varphi^\circ = 30^\circ$ и $\Delta\varphi^\circ = -2^\circ$. Далее, используя приведенную выше формулу, вычисляем радианную меру приведенных углов:

$$x_0 = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}; \quad \Delta x = \frac{(-2)^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = -\frac{\pi}{90} \approx -0{,}034.$$

Функцией, значение которой требуется найти, является $f(x) = \sin x$, следовательно $f(x_0 + \Delta x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}034\right)$, $f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6}$, $df(x_0) = \cos\frac{\pi}{6}\,dx$. Подставляя данные выражения в формулу (4.19) с учетом равенства $dx = \Delta x$, находим искомое значение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}034\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \Delta x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0{,}034) \approx 0.5 - 0.029 = 0{,}471.$$

Таким образом, $\sin 28^\circ \approx 0{,}471$.

Замечание. 4.1. Значение $\sqrt{3}$ вычислено с точность до тысячной доли с помощью калькулятора. Это значение можно вычислить, выбирая функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и полагая $x_0 = 4$, $\Delta x = -1$. Для данной функции $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{3}$, $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, дифференциал $df(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-1) = -0{,}25$. Подставляя найденные значения в формулу (6.7), получим $\sqrt{3} \approx 2 - 0{,}25 = 1{,}75$. Если использовать при вычислении $\sin 28^\circ$ найденное приближенное значение $\sqrt{3}$, то получим $\sin 28^\circ \approx 0{,}470$, т.е. возникшая погрешность составляет $0{,}001$.

Правила вычисления дифференциалов. Из правил 1) — 5) вычисления производных и формулы (4.18) непосредственно вытекают правила вычисления дифференциалов:

1) $dc = 0,\ c \in R$;

2) $d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x)$.

3) $d(f(x) \pm g(x)) = d(f(x)) \pm d(g(x))$;

4) $d(f(x) \cdot g(x)) = d(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot d(g(x))$;

5) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot d(g(x))}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$.

Дифференциалы высших порядков. Из формулы (4.18) следует, что дифференциал есть произведение производной функции $y = f(x)$ и приращения dx. Следовательно, при фиксированном приращении $df(x) = f'(x)dx$ — функция и можно вычислять повторно ее дифференциал. Дифференциал, вычисляемый повторно от дифференциала $df(x)$ (при том же приращении dx), называют *дифференциалом 2-го порядка* и обозначают $d^2 f(x)$.

Дифференциалом n-го порядка $d^{(n)} f(x)$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала (n–1)-го порядка $d^{(n-1)} f(x)$ этой функции, т.е. $d^{(n)} f(x) = d\left(d^{(n-1)} f(x)\right)$.

Если функция $y = f(x)$ имеет 2-ю производную $f''(x)$ и x — независимая переменная, то $d^2 f(x) = d(df(x)) = (f'(x)dx)'dx = (f'(x))'dx \cdot dx = f''(x)dx^2$, т.е.

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет n-ную производную $f^{(n)}(x)$ и x — независимая переменная, то $d^{(k)} f(x) = f^{(k)}(x)dx^k$, для любого k = 2, 3, … n.

Применение производной для вычисления пределов функций. Правило Лопиталя-Бернулли позволяет раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые возникают при вычислении предела отношения двух бесконечно малых и бесконечно больших функций. Напомним, что функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой (большой) в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \qquad (\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty).$$

Правило Лопиталя-Бернулли состоит в следующем: е*сли функции* $f(x)$ *и* $g(x)$*, являющиеся одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими в точке* x_0*, дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0 *(возможно за исключением самой точки* x_0 *),* $g'(x)\neq 0$ *для любых точек x из этой окрестности и существует предел отношения их производных* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*, то существует предел отношения самих функций* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и эти пределы совпадают, т.е. при указанных условиях выполняется равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

При применении правила Лопиталя-Бернулли, следует использовать тождественные преобразования отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, с целью его упрощения, и при необходимости комбинировать это правило с другими способами вычисления пределов.

К неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ сводятся:

а) с помощью простых тождественных преобразований неопределенности $0\cdot\infty$, и $\infty-\infty$, возникающие при вычислении пределов произведения бесконечно малой на бесконечно большую и — разности двух бесконечно больших;

б) посредством логарифмирования неопределенности вида 1^{∞}, $0^0, \infty^0$, которые возникают при вычислении пределов показательно-степенной функции $f(x)^{g(x)}$.

Напомним, что предел показательно-степенной функции в точке x_0 вычисляется по формуле

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

При вычислении ее предела с помощью правила Лопиталя-Бернулли, нужно вначале прологарифмировать функцию и записать полученное выражение в виде дроби, т.е. вычислить

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\cdot \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{1/g(x)} = \frac{\ln f(x)}{(g(x))^{-1}}.$$

Затем, используя правило Лопиталя-Бернулли вычислять предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln f(x)}{(g(x))^{-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\ln f(x))'}{\left((g(x))^{-1}\right)'} = \lim_{x\to x_0} -\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g^2(x).$$

Логарифм $\ln f(x)^{g(x)}$ можно записать в равносильном виде

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\cdot \ln f(x) = \frac{g(x)}{1/\ln f(x)} = \frac{g(x)}{(\ln f(x))^{-1}}$$

и затем применять правило Лопиталя-Бернулли для вычисления предела

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(\ln f(x))^{-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{(\ln f(x))^{-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}\ln^2 f(x).$$

Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ имеют производные 2-го порядка (n-го порядка) и при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ возникают неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя-Бернулли следует применять повторно (до тех пор) пока неопределенности не будут раскрыты.

После нахождения предела логарифма показательно-степенной функции $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = a$ находится предел самой функции по формуле

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)}} = e^a.$$

Пример 4.20. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} \sin 2x = 0$, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя-Бернулли, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\cos 2x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$.

Возрастание и убывание функций. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале (a, b), если для любых $x_1,\ x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Возрастающие или убывающие на интервале (a, b) функции называются *монотонными*, а соответствующие интервалы — *интервалами монотонности* данной функции.

Достаточное условие монотонности функции на интервале устанавливает следующее утверждение: *если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале (a, b) и* $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ *для всех* $x \in (a, b)$, *то* $f(x)$ *возрастает (убывает) на интервале (a, b).*

Для нахождения всех интервалов монотонности заданной функции $y = f(x)$ нужно разбить ее область определения на конечное число интервалов, каждый из которых ограничен точками, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует. Далее в каждом из полученных интервалов определить знак производной. Для этого достаточно вычислить ее значение в отдельной точке каждого интервала, так как производная не меняет в них свой знак на противоположный. Нахождение интервалов монотонности требуется при исследовании свойств функций и построении их графиков.

Экстремумы функции. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad \left(f(x) > f(x_0)\right).$$

Значения функции в точке локального максимума и минимума называются, соответственно, *максимумом* и *минимумом* функции. Все точки локального минимума и максимума функции называются ее точками *локального экстремума*, а значения функции в этих точках — ее *экстремумами*.

Необходимое условие экстремума определяет следующее утверждение: *если* x_0 *— точка локального экстремума функции* $f(x)$, *то производная функции в этой точке равна нулю, либо не существует.*

Примером функции, которая достигает минимального значения в точке $x = 0$ и не имеет в этой точке производной, является функция $y = |x|$.

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными* точками. Стационарные точки и точки, в которых производная функции не существует, образуют множество *критических точек*, в которых функция может принимать локальные экстремумы.

Для нахождения точек локальных экстремумов среди критических точек, используются достаточные условия существования экстремумов.

Первое достаточное условие существования экстремума функции в критической точке формулируется следующим образом.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна в достаточно малой окрестности критической точки* x_0 *и дифференцируема в этой окрестности с удаленной* x_0, *тогда:*

- *если* $f'(x) > 0$ *для всех* $x < x_0$ *и* $f'(x) < 0$ *для всех* $x > x_0$ *из этой окрестности, то* x_0 *— точка локального максимума;*

• *если $f'(x)<0$ для всех $x<x_0$ и $f'(x)>0$ для всех $x>x_0$ из этой окрестности, то x_0 — точка локального минимума;*

• *если производная $f'(x)$ для всех x из этой окрестности либо $f'(x)<0$, либо $f'(x)>0$, то x_0 не является точкой экстремума.*

Второе достаточное условие существования экстремума функции $y=f(x)$ в *стационарной точке* формулируется следующим образом.

Если функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема в достаточно малой окрестности стационарной точки x_0, то при $f''(x_0)>0$ точка x_0 является точкой минимума, а при $f''(x_0)<0$ — точкой максимума функции.

В случае $f''(x_0)=0$ требуется дополнительное исследование.

Наименьшие и наибольшие значения непрерывной функции. Напомним, что *наименьшим* и *наибольшим* значениями функции $y=f(x)$, определенной на множестве *X*, являются числа

$$m=\min\{f(x)\mid x\in X\},\qquad M=\max\{f(x)\mid x\in X\}.$$

Вторая теорема Вейерштрасса утверждает, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция принимает свое наибольшее *M* и наименьшее значение *m* в точках этого отрезка. Так как наименьший из локальных минимумов и наибольший из локальных максимумов, соответственно, меньше и больше, чем все остальные значения функции на интервале (a, b), то ее наибольшее *M* и наименьшее *m* значения и на этом отрезке достигается или в критических точках, или на концах отрезка.

Таким образом, для нахождения *M* и *m* непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ и точек отрезка, в которых эти значения достигаются нужно:

1) вычислить производную $f'(x)$, найти все точки, в которых она не существует и все решения уравнения $f'(x)=0$, т.е. найти все критические точки x_i, $i=1,2,\ldots,k$;

2) вычислить значения функции в критических точках $f(x_i)$, $i=1,2,\ldots,k$, и $f(a)$, $f(b)$ — значения функции на концах отрезка;

3) среди вычисленных значений функции найти наименьшее и наибольшее

$$m=\min\{f(a),f(b),\ldots,f(x_i)\mid i=1,2,\ldots k\},\quad M=\max\{f(a),f(b),\ldots,f(x_i)\mid i=1,2,\ldots k\}.$$

Пример 4.21. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y=x^2-4x-2\ln(x-2)+8$$

и исследовать ее на экстремум.

Решение. В начале, находим область определения данной функции, которая совпадает с областью определения логарифмической функции $\ln(x-2)$, определяемой неравенством $x-2>0$, т.е. — с интервалом $(2;+\infty)$ (напомним, что логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента). Далее находим критические точки данной функции, т.е. точки, принадлежащие интервалу $(2; +\infty)$, в которых производная $y' = 2x - 4 - \dfrac{2}{x-2}$ не существует или равна нулю. Единственная точка $x = 2$, в которой производная не существует, не принадлежит интервалу $(2; +\infty)$. Далее находим точки, в которых производная $y' = 2x - 4 - \dfrac{2}{x-2}$ равна нулю, т.е. — решения уравнения $2x - 4 - \dfrac{2}{x-2} = 0$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$ и проведя несложные преобразования, получим равносильное квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, решениями которого являют $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции, следовательно, ее единственной критической точкой является $x_2 = 3$, которая разбивает интервал $(2; +\infty)$ на два интервала монотонности $(2; 3)$ и $(3; +\infty)$. В интервале монотонности производная не меняет свой знак на противоположный, следовательно, чтобы определить ее знак достаточно вычислить ее значение в единственной точке интервала монотонности. Выбирая $3/2 \in (2; 3)$, $4 \in (3; +\infty)$ и вычисляя значения производной

$$y'(3/2) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 4 - \frac{2}{3/2 - 2} = -5, \quad y'(4) = 2 \cdot 4 - 4 - \frac{2}{4-2} = 3,$$

убеждаемся в том, что в силу теорем 3 функция убывает на интервале (2; 3) и возрастает на интервале $(3; +\infty)$.

При переходе значений аргумента x через точку $x_2 = 3$ значения производной изменяют свой знак с « – » на « + », следовательно, в силу теоремы 5 точка $x_2 = 3$ является точкой локального минимума рассматриваемой функции, а ее минимум равен $y(3) = 5$.

Замечание 4.2. При нахождении интервалов монотонности и экстремумов функции полученные результаты вычислений удобно сводить в таблицу для дальнейшего использования. В верхней строке таблицы приводится разбиение области определения функции на интервалы монотонности и ее критические точки. Во второй — в столбцах, соответствующих интервалам монотонности, стрелками, наклонными снизу вверх и сверху вниз обозначается возрастание и убывание функции, а в столбцах с критическими точками указываются соответствующие значения функции. В третьей строке в столбцах с интервалами указывается знак производной, а в остальных столбцах существование или нет производной в критических точках. Например, результаты вычислений примера 4.21. можно свести в следующую таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

x	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f(x)$	↘	5, min	↗
$f'(x)$	–	0	+

Пример 4.22. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 5$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение. Так как производная рассматриваемой функции $y' = 3x^2 - 6x$ определена на всем интервале $(-\infty; +\infty)$, то критическими точками данной функции являются решения уравнения $3x^2 - 6x = 0$, принадлежащие отрезку $[1; 4]$. Уравнение $3x^2 - 6x = 0$ равносильно уравнению $x(x-2) = 0$, следовательно, решениями обоих уравнений являются , $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Первая точка не принадлежит отрезку $[1; 4]$, следовательно, $x_2 = 2$ единственная критическая точка данной функции. Используя формулу для вычисления m и M находим:
$m = \min\{f(1) = 3, f(4) = 21, f(2) = 1\} = 1$; $M = \max\{f(1) = 3, f(4) = 21, f(2) = 1\} = 2$.

Точками, в которых достигаются эти значения, являются, соответственно, $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$.

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* или просто *выпуклым* на интервале (a, b), если дуга кривой графика на этом интервале расположена не выше касательной, проведенной к графику функции в любой точке $x \in (a, b)$. Если на интервале (a, b) любая касательная располагается не выше дуги кривой графика функции, то он называется *выпуклым вниз* или *вогнутым* на данном интервале. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции определяет следующее утверждение.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ для всех $x \in (a, b)$, то график этой функции является выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b).

Точка $M(x_0,\ f(x_0))$, которая отделяет выпуклую (вогнутую) часть графика функции от ее вогнутой (выпуклой) части, называется *точкой перегиба* графика функции. Достаточное условие, позволяющее распознавать точки перегиба графика функций, формулируется следующим образом.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (исключая возможно саму точку x_0), при этом вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует в точке x_0. Тогда если для всех при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак на противоположный, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Для нахождения интервалов вогнутости или выпуклости графика заданной функции $y = f(x)$ нужно разбить ее область определения на конечное число интервалов, каждый из которых ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. Далее в каждом из полученных интервалов определить знак второй производной $f''(x)$. Для этого достаточно вычислить ее значение в единственной точке каждого интервала, так как вторая производная не меняет в них свой знак на противоположный.

Замечание 4.3. Функция называется выпуклой (вогнутой) на интервале (a,b), если ее график выпукл (вогнут) на этом интервале. Используется также другое определение выпуклости и вогнутости функции на заданном интервале (a,b). Любой интервал (a,b) является множество точек x вида $x=(1-\alpha)a+\alpha b$, где $0<\alpha<1$.

При таком определении интервала (a,b), функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* на интервале (a,b), если для любого $0<\alpha<1$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)a+\alpha b)\geq(1-\alpha)f(a)+\alpha f(b).$$

Если для любого $0<\alpha<1$ выполняется противоположное неравенство

$$f((1-\alpha)a+\alpha b)\leq(1-\alpha)f(a)+\alpha f(b),$$

то функция $y=f(x)$ называется *вогнутой* на интервале (a,b).

Геометрическая интерпретация введенного определения выпуклости (вогнутости) функции $y=f(x)$ на интервале (a,b) состоит в том, что точка $M_0(x_0;f(x_0))$ графика этой функции с абсциссой $x_0=(1-\alpha_0)a+\alpha_0 b$, где $0<\lambda_0<1$, расположена не ниже (не выше) точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_0}$, где $M_1(a;f(a))$, $M_2(b;f(b))$ (см. рис. 4.5, 4.6).

Нетрудно проверит, используя формулы для вычисления координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, что абсциссой и ординатой точки M

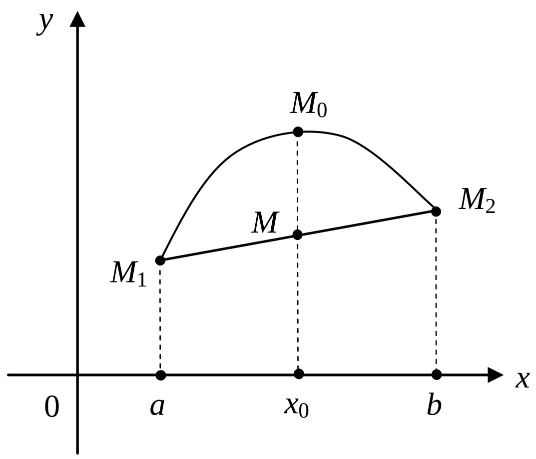

Рис. 4.5.

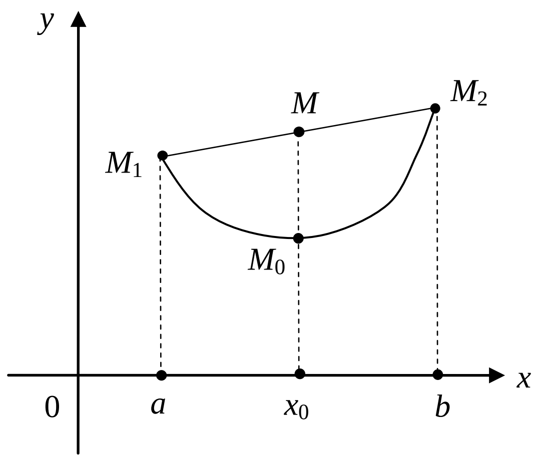

Рис. 4.6.

являются, соответственно, числа $(1-\alpha_0)a+\alpha_0 b$ и $(1-\alpha_0)f(a)+\alpha_0 f(b)$.

Если точка $M(x,y)$ делит в отношении λ отрезок M_1M_2, концами которого являются точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, то координаты точки M вычисляются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Пример 4.23. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение. Для любых $x \in (-\infty;+\infty)$ выполняется неравенство $1 + x^2 > 0$, следовательно, интервал $(-\infty;+\infty)$ — область определения заданной функции. Вычисляем первую $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$, а затем вторую производную $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ функции. Вторая производная равна нулю при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Найденные точки разбивают область определения функции $y = \ln(1 + x^2)$ на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;+\infty)$ (см. рис. 4.7). Выбирая $-2 \in (-\infty;-1)$, $0 \in (-1;1)$, $2 \in (1;+\infty)$ и вычисляя значения

$$y''(-2) = \frac{2(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{6}{25} < 0,\; y''(0) = \frac{2(1-0)}{(1+0)^2} = 2 > 0,\; y''(2) = \frac{2(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{6}{25} < 0,$$

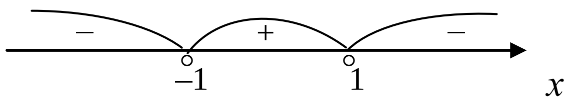

Рис. 4.7.

убеждаемся в том, что график функции в силу теоремы 8 является выпуклым на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ и вогнутым — на $(-1;\ 1)$. В точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ вторая производная функции равна нулю и меняет знак на противоположный при переходе через них. Следовательно, $M_1(-1;\ln 2)$ и $M_2(1;\ln 2)$ — точки перегиба графика данной функции.

Замечание 4.4. Результаты вычислений интервалов выпуклости, вогнутости графика функции и его точек перегиба используются при проведении полного исследования функций, поэтому эти результаты для удобства можно свести в таблицу аналогичную таблице 4.1, описанной в замечании 4.2. Отличие состоит в том, что в первой строке таблицы вместо интервалов монотонности и критических точек функции стоят интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и критические точки производной 1-го порядка, а в третьей строке вместо ее знаков указываются знаки производной 2-го порядка и ее значения в критических точках. Результаты вычислений примера 4.23 можно свести в таблицу 4.2.

Таблица 4.2.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f(x)$	$\cap$	т. перег., ln2	$\cup$	т. перег., ln2	$\cap$
$f''(x)$	–	0	+	0	–

Асимптоты. Построение графиков функций. При исследовании свойств функции и поведения графика в бесконечно удаленных точках ее области определения и точках разрыва используются специального вида прямые, называемые асимптотами.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика до данной прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки *M* от начала координат. Различают *горизонтальные, вертикальные* и *наклонные асимптоты* графика функции $y = f(x)$.

Горизонтальной асимптотой функции $y = f(x)$, область определения которой содержит хотя бы одну бесконечно удаленную точку, является прямая параллельная оси *Ox* и определяемая уравнением *y=c*, где $c = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. График функции может иметь не более двух горизонтальных асимптот.

Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, определенной на множестве *X*, является прямая, параллельная оси *Oy* и определяемая уравнением $x = a$, где $a \in X$ точка, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$. Следует иметь в виду, что непрерывная на множестве *X* функция $y = f(x)$, не имеет вертикальных асимптот.

Наклонной асимптотой функции $y = f(x)$, область определения которой содержит хотя бы одну бесконечно удаленную точку, является прямая, определяемая уравнением $y = kx + b$. Необходимые и достаточные условия существования наклонных асимптот устанавливает следующее утверждение.

Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx), \tag{4.20}$$

то прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *где* $\infty = -\infty$ *или* $\infty = +\infty$.

Следует отметить, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ пределы (4.20) могут быть различными, т.е. определять различные асимптоты. График функций может иметь не более двух наклонных асимптот.

Схема полного исследования функции и построение ее графика. При исследовании свойств функции и построения ее графика может использовать следующую схему.

1. Найти область определения функции;
2. Выявить наличие или отсутствие четности и нечетности, периодичности и не периодичности функции;
3. Найти точки разрыва функции и вертикальные асимптоты ее графика.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найти интервалы возрастания, убывания функции и ее экстремумы.
6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки его перегиба.
7. Найти наклонные асимптоты графика функции.
8. Вычислить значения функции в дополнительных точках, если требуется более подробная детализация графика.
9. При необходимости составить результирующую таблицу вычислений.
10. Построить график функции.

Пример 4.24. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

Решение. Исследуем функцию на наличие горизонтальных асимптот ее графика. Вычисляя пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=-\infty$, убеждаемся в том, что таковых нет. Так как в точке $x=1$ данная функция не является непрерывной, то, вычисляя односторонние пределы $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=-\infty$, видим, что прямая x=1 является вертикальной асимптотой.

Для выявления наклонных асимптот используем формулу (4.20). Вычисляя пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-x}=2$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$, убеждаемся, что при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ они равны. Следовательно, график данной функции имеет единственную наклонную асимптоту, определяемую уравнением y=2x+1.

Пример 4.25. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ и построить ее график.

Решение. Проведение полного исследования функции и построение ее графика проведем по указанной выше схеме 1 — 9.

1. Данная функция не определена в единственной точке x=0. Следовательно, ее областью определения является объединение двух интервалов $(-\infty;\,0)\bigcup(0;\,+\infty)$.

2. Так как $f(-x)=\dfrac{x^2+1}{-x}=-f(x)$, то функция является нечетной.

3. Вычисляя односторонние пределы $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$ убеждаемся в том, что точка x=0 является точкой разрыва второго рода, Следовательно, прямая, определяемая уравнением x=0 является вертикальной асимптотой. В остальных точках функция непрерывна.

4. В области определения $(-\infty;\,0)\bigcup(0;\,+\infty)$ функция $f(x)\neq0$, т.е. ее график не пересекается с осью *Ox*. Точки пересечения с осью *Oy* также отсутствуют, так как $0\notin(-\infty;\,0)\bigcup(0;\,+\infty)$.

5. Вычислив производную функции $y'=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, легко убедиться в том, что она равна нулю при $x_1=-1$, $x_2=1$ и не существует в точке $x_3=0$. Вычисленные критические точки функции разбивают ее область определения $(-\infty;\,0)\bigcup(0;\,+\infty)$ на четыре интервала $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Выбирая в каждом из них, соответственно, –2, –1/2, 1/2 и 2 и вычисляя значения производной, получим соотношения

$$y'(-2) = y'(2) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} > 0, \qquad y'(-1/2) = y'(1/2) = \frac{1/4-1}{1/4} = -3 < 0.$$

Следовательно, данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ и убывает на (–1;0), (0;1).

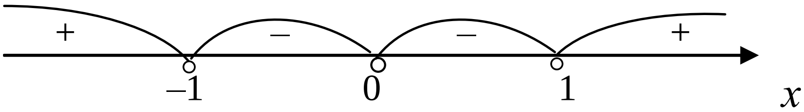

Рис. 4.8.

Так как при переходе x через точки $x_1= -1$ и $x_2=1$ производная меняет знак, соответственно, с «+» на «–» и с «–» на «+» (см. рис. 4.8), то $x_1=-1$ — точка локального максимума функции, равного $f(-1) = -2$, а точка $x=1$ — точка локального минимума, равного $f(1) = 2$.

6. Вычислив вторую производную $y'' = 2/x^3$, убеждаемся в том, что она не определена при $x=0$ и не равна нулю при любых x отличных от нуля. Точка $x=0$ разбивает область определения на два интервала $(-\infty;\,0)$ и $(0;+\infty)$. Простая проверка показывает, что при $x<0$ выполняется неравенство $y''(x)<0$, а при $x>0$ имеет место $y''(x)>0$. Следовательно, на интервале $(-\infty;0)$ функция выпукла, на интервале $(0;+\infty)$ — вогнута, а $x = 0$ — точка перегиба.

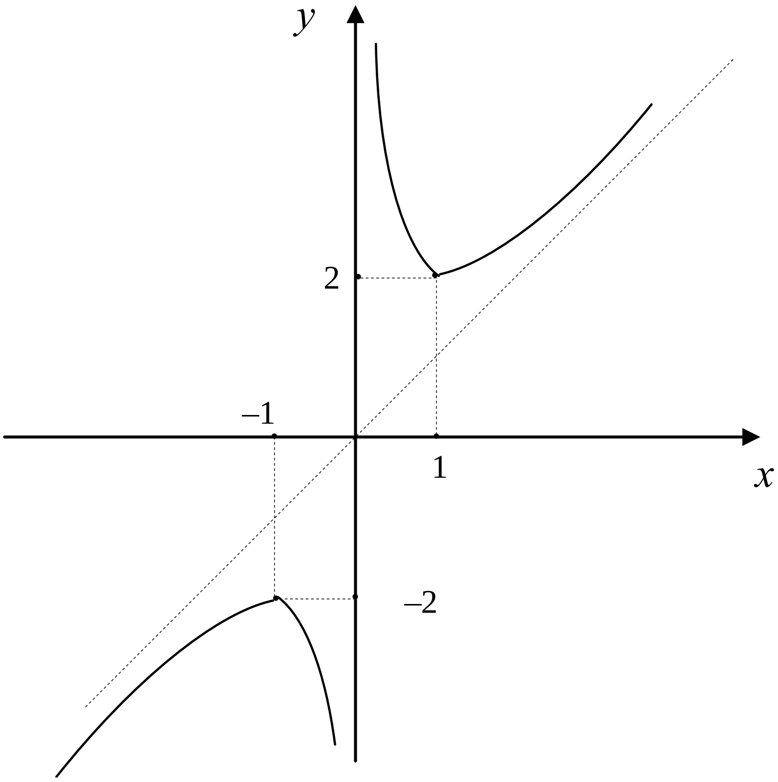

Рис. 4.9.

7. Вычислив пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1 = k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 = b$$

убеждаемся, что при $\infty = \infty$ и $\infty = +\infty$ они равны, следовательно, единственной наклонной асимптотой является прямая, определяемая уравнением $y = x$.

10. Используя полученные результаты вычислений, строим график функции (см. рис. 4.9).

4.4. Основы интегрального исчисления

Данное направление в математики возникло на рубеже 18 — 19 вв. в результате запросов в первую очередь таких естественных наук, как физика и механика. В социологии интегралы нашли применение при моделировании психоисторической системы и ее функционирования с учетом времени, при решении дифференциальных уравнений, описывающих сложные экономические и социальные системы, а также психологические процессы и явления.

Понятие неопределенного интеграла. *Первообразной* функции $y = f(x)$, заданной на множестве $X \subset R$, называется дифференцируемая в своей области определения функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$ для любых $x \in X$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ то любая функция $F(x)+C$ также является первообразной, где C — произвольная константа.

Действительно, $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)$, так как по определению первообразной $F'(x) = f(x)$, а производная константы равна нулю.

Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается знаком $\int f(x)dx$. Функция $f(x)$, стоящая под знаком интеграла, называется *подынтегральной*, а произведение ее и дифференциала dx — *подынтегральным выражением*, а x — переменной интегрирования. Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции $y = f(x)$ называется *интегрированием* этой *функции*.

Свойства неопределенного интеграла. Нижеследующие равенства определяют основные свойства неопределенных интегралов, которые используются при их вычислении:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int d(F(x)) = F(x)+C$;
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$; $\alpha = \text{const} \neq 0$;
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Помимо свойств при вычислениях используется *таблица основных неопределенных интегралов*.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

4. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$.

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + C$, $|x| < 1$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$, $|x| < |a|$, $a \neq 0$.

14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + c = -\mathrm{arcctg} x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \mathrm{arcctg} \dfrac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$, $|x| \neq |a|$.

17. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x+a}{x-a} \right| + C$, $a \neq 0$, $|x| \neq |a|$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$, $|x| > |a|$.

Методы интегрирования. Способ вычисление неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов, их свойств и тождественных преобразований подынтегрального выражения называют *непосредственным интегрированием.*

Пример 4.26. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2 - x^4}$.

Решение. Подынтегральной функцией является дробь $\dfrac{1}{x^2 - x^4}$. Преобразуем ее к виду удобному для интегрирования. Для этого в знаменателе вынесем за скобку общий множитель, а единицу, стоящую в числителе запишем в равносильном виде $1 = (1 - x^2) + x^2$ и проведем тождественные преобразования. В результате получим:

$$\frac{1}{x^2 - x^4} = \frac{(1-x^2) + x^2}{x^2(1-x^2)} = \frac{(1-x^2)}{x^2(1-x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2} = x^{-2} + \frac{1}{1-x^2}.$$

Таким образом, в силу пятого свойства исходный интеграл сводится к вычислению двух табличных интегралов:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x^4} = \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C.$$

При вычислении интегралов использовались третий и 18-тый табличные интегралы.

Метод замены переменной. Данный способ вычисления интегралов реализуется в двух вариантах.

Первый вариант называется *методом подведения под знак дифференциала.* Этот метод применяется, если подынтегральное выражение представляет собой произведение сложной функции и производной ее аргумента, т.е. — имеет вид

$$f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

В этом случае $\varphi'(x)dx$ является дифференциалом функции $\varphi(x)$ и, следовательно, $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Введение новой переменной интегрирования $t = \varphi(x)$, сводит вычисление интеграла $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ к вычислению интеграла

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(t)dt = \Phi(t) + C .$$

Обратная замена t на $\varphi(x)$ в найденном интеграле заканчивает вычисления:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \Phi(\varphi(x)) + C .$$

При вычислении интегралов методом подведения под знак дифференциала используются следующие соотношения:

1. $dx = d(x+a)$.
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax),\ a \neq 0$ — константа.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b),\ a \neq 0$, b — константы.
4. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$.
5. $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1}+b)$, b — константа.
6. $\sin x\, dx = -d(\cos x)$.
7. $\cos x\, dx = d(\sin x)$.
8. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

Пример 4.27. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x\, dx$.

Решение. Подынтегральная функция является степенной функцией с аргументом равным $\sin x$. Так как $\cos x\, dx$ — дифференциал функции $\sin x$, то $\cos x\, dx = d(\sin x)$ и, следовательно, при $t = \sin x$ получим:

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C .$$

Второй вариант метода замены переменной называется *методом подстановки.* При вычислении этим методом интеграла $\int f(x)dx$ делается замена переменной интегрирования x подходящей дифференцируемой функцией $\psi(t)$, имеющей обратную функцию $\psi^{-1}(x) = t$. При такой замене $dx = \psi'(t)dt$ и исходный интеграл $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла

$$\int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Заменив в вычисленной первообразной $\Phi(t)$ переменную t на $\psi^{-1}(x)$, получим окончательный ответ:

$$\int f(x)dx = \Phi(\psi^{-1}(x)) + C.$$

Замечание 4.5. Если в записи подынтегрального выражения имеется некоторая дифференцируемая функция $\varphi(x)$, имеющая обратную функцию, то можно попытаться использовать подстановку $t = \varphi(x)$. При такой подстановке $x = \varphi^{-1}(t)$, $dx = (\varphi^{-1}(t))'dt$ и вычисление интеграла $\int f(\varphi(x))dx$ сводится к вычислению интеграла

$$\int f(t)(\varphi^{-1}(t))'dt = \Phi(t) + C.$$

После его вычисления, заменяя в первообразной $\Phi(t)$ переменную t на $\varphi(x)$, получим окончательный результат:

$$\int f(\varphi(x))dx = \Phi(\varphi(x)) + C.$$

Пример 4.28. Вычислить интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$.

Решение. В запись подынтегрального выражения $\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \frac{(e^x)^2}{e^x+1}dx$ входит функция e^x. Полагая $t = e^x$, вычисляя $x = \ln t$, $dx = (\ln t)'dt = \frac{dt}{t}$, и заменяя в подынтегральном выражении e^x на t, а dx на $\frac{dt}{t}$, получаем:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int \frac{t^2dt}{(t+1)t} = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= t + \ln|t+1| + C = e^x + \ln(e^x+1) + C.$$

Метод интегрирования по частям. Для дифференцируемых функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)),$$

которая в упрощенной записи имеет следующий вид:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При вычислении интегралов данным методом, следует использовать следующие рекомендации по выбору функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Если подынтегральным выражением является произведение:

- многочлена и показательной функции или произведение многочлена и тригонометрической функции $\sin\alpha x$ или $\cos\alpha$, то в качестве u выбирается многочлен, а в качестве v — оставшаяся часть подынтегрального выражения;
- показательной функции и тригонометрической функции $\sin\alpha x$ или $\cos\alpha$, то в качестве u выбирается тригонометрическая функция и метод инте-

грирования по частям применяется дважды, в результате чего, получается линейное уравнение относительно искомого интеграла;

• многочлена и обратных тригонометрических функций или логарифмических функций, то в качестве u выбираются последние а в качестве v — оставшаяся часть подынтегрального выражения.

Пример 4.29. Вычислить интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. Полагая $u = x$, $dv = e^x dx$, находим

$$du = dx,\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x.$$

Затем, используя формулу интегрирования по частям, вычисляем интеграл:

$$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Интегрирование отдельных классов элементарных функций.

а) Содержащие квадратный трехчлен в своей записи, простейшие интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

сводятся к табличным интегралам 12 — 19 путем выделения *полного квадрата* в квадратном трехчлене с последующей подстановкой $t = x + \frac{b}{2a}$.

б) Вычисление интегралов вида

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx, \qquad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

путем выделения в числители производной квадратного трехчлена с последующей подстановкой $t = ax^2 + bx + c$ сводятся к вычислению табличного интеграла от степенной функции и вычислению интегралов вида а).

в) Вычисление интегралов вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

при $r = 1, 2$ сводятся с помощью подстановки $\frac{1}{t} = mx + n$ к вычислению интегралов вида а) и б).

г) Интегралов, в запись которых входят тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При такой подстановке полагается:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

д) Интеграл от иррациональной функции, в запись которой входят степени $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$ вычисляется с помощью подстановки t^s, где s — наименьшее общее кратное чисел $n_1, \ldots, n_k$.

Определенный интеграл и его применения. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на n отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ длины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Выберем произвольную точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$ и введем в рассмотрение сумму следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Введенная сумма называется *интегральной суммой* или *суммой Римана*. Если функция принимает неотрицательные значения на отрезке $[a,b]$, то при заданном разбиении отрезка $[a,b]$ и заданном выборе точек интегральная сумма равна сумме площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, которая приближенно равна площади плоской фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox (см. рис. 4.7)

Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при стремлении наибольшей из длин Δx_k к нулю и этот предел не зависит ни от выбора точек разбиения, ни от выбора точек в которых вычисляются значения функции, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a,b]$, а предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $\Delta x = \max\{\Delta x_k | k = 1, 2, \ldots, k$.

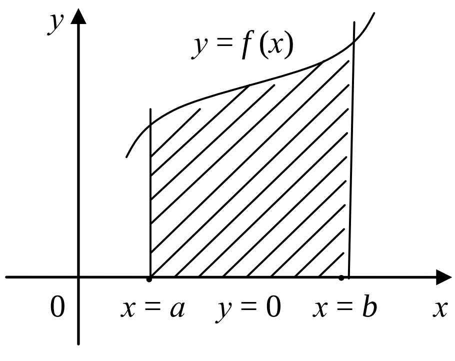

Рис. 4.7

Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принимает неотрицательные значения, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции — плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, заданными уравнениями $x = a$, $x = b$ и осью Ox, которая определяется уравнением $y = 0$ (см. рис. 4.7).

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$ 2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$ 4. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

5. $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ где c – постоянная.

6. Если $f(x) \geq 0$ $\left(f(x) \leq 0\right)$ для $x \in (a;b)$ и $a < b,$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$ $\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq 0\right).$

7. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ для $x \in (a;b)$ и $a < b,$ то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

8. Оценка определенного интеграла: если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$

9. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$ (теорема о среднем значении).

10. Если функция $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,$ то справедливо равенство

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т.е. производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по его переменному верхнему пределу x существует и равна значению подынтегральной функции при том же x.

Вычисление определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Из приведенной формулы следует, что для вычисления определенного интеграла нужно вначале вычислить неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C\text{, а}$$

затем вычислить разность значений первообразной $F(x)$ в крайних точках отрезка $[a,b]$.

Определенный интеграл используется при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов пространственных тел.

Пример 4.30. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение. Вычисляем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Затем по формуле Ньютона-Лейбница вычисляем разность

$$F(x)\Big|_0^2 = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_0^2 = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{0}{\sqrt{5}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, то интегралы вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

называются *несобственными интегралами* с бесконечными пределами интегрирования.

Такие интегралы применяются при вычислении площадей неограниченных плоских фигур, числовых характеристик непрерывных случайных величин, их функций распределений.

По определению значения несобственных интегралов равны пределам определенных интегралов с переменными пределами интегрирования, при стремлении переменных пределов к бесконечности, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx., \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Из приведенных равенств следует, что для нахождения несобственного интеграла первого вида, нужно вычислить:

- вначале интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^b f(x)\,dx. = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

- затем предел $\lim\limits_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$.

Если предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогичным образом определяются значения остальных двух несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Если предел $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$ конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ сходится, в противном случае интеграл расходится.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходится если оба слагаемых $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходятся.

Пример 4.31. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}dx$.

Решение. По определению

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}dx.$$

Вычисляем интеграл с переменным верхним пределом подведением под знак дифференциала производной $(\operatorname{arctg}3x)' = \frac{3}{1+9x^2}$. В результате получим:

$$\int_1^b \frac{\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\int_1^b \operatorname{arctg}3x\,d(\operatorname{arctg}3x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}^2 3x\Big|_1^b = \frac{1}{6}(\operatorname{arctg}^2 3b - \operatorname{arctg}^2 3).$$

Далее вычисляем предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}^2 3b - \operatorname{arctg}^2 3\right) = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \operatorname{arctg}^2 3\right) \approx 0{,}15.$

Данный интеграл сходится и приближенно равен 0,15.