Методические рекомендации
по подготовке к тестированию

по дисциплине «**Высшая математика (5 семестр)**»

наименование теста **Высшая математика (1 тест) / ВШУБ**

на 2012/2013 учебный год для студентов **заочной формы обучения**
факультета: **Высшая школа управления и бизнеса**

специальностей:	1-25 01 02	«Экономика»
	1-25 01 03	«Мировая экономика»
	1-25 01 04	«Финансы и кредит»
	1-25 01 07	«Экономика и управление на предприятии»
	1-25 01 08	«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»
	1-26 02 01	«Бизнес-администрирование»
	1-26 02 02	«Менеджмент»
	1-26 02 03	«Маркетинг»
	1-26 02 05	«Логистика»

1. **Назначение теста**

Тест по курсу «Высшая математика (5 семестр)» разработан для проверки степени усвоения студентом основных положений, понятий и методов по соответствующим разделам программы изучаемой дисциплины.

Студент допускается к сдаче зачета лишь в случае положительного результата тестирования. Результат сдачи теста автоматически заносится в базу данных. Тем самым сведения становятся доступными для просмотра **OnLine** и поступают в деканат.

2. **Характеристика теста**

8 вопросов на 20 минут, порог сдачи – 50%.

Уровень сложности заданий и их содержание соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта по высшей математике для экономических специальностей ВУЗов.

Система электронного тестирования представляет собой постоянно пополняемую базу данных задач, сгруппированных по ключевым темам курса. Формирование конкретного теста осуществляется преподавателем и заключается в выборе тем, по которым будут предлагаться тестовые задания. Список вопросов конкретного теста формируется из перечня вопросов по данной теме. Из полного списка заданий, относящихся к выбранной преподавателем теме, конкретные задания случайным образом выбираются при каждой новой попытке сдать тест, что исключает их повторение при следующей попытке.

3. **Рекомендации по выполнению теста**

Тест долждn быть выполнен в межсессионный или зачетно-экзаменационный периоды в срок не позднее, чем за один день до зачета. Информация о наличии свободных компьютерных классов для проведения тестирования студентов-заочников размещается и еженедельно обновляется на сайте университета в разделе «Тестирование для заочников».

Количество попыток сдачи теста в течение семестра не ограничено и определяется лишь техническими возможностями компьютерных классов (один раз в день), в которых осуществляется тестирование. Студент допускается к сдаче теста только после предъявления зачётки или студенческого билета. Ввод персональных данных студента и запуск теста осуществляет администратор компьютерного класса (лаборант).

В процессе тестирования в компьютерной лаборатории университета рекомендуется обращать внимание на экране компьютера на *счетчик* оставшегося времени. Если оно имеется, то можно скорректировать свои ответы, воспользовавшись ярлычками вопросов, на которые вами уже даны ответы.

Окончание тестирования происходит после ответа на все поставленные вопросы или по истечении 20 минут. Студент может завершить тестирование в любое время, щелкнув мышкой по надписи «Закончить тест» на экране.

По окончании тестирования на экране появится надпись «Тест окончен. Результаты». Для просмотра результатов необходимо нажать на изображение слова «Результаты». Откроется окно с информацией о количестве правильных ответов на вопросы. Для просмотра более подробной информации о результатах тестирования необходимо нажать на надпись «Подробно».

Для выхода из программы и закрытия всех окон необходимо выбрать «Тест», затем «Выход». Для прохождения тестирования повторно все действия повторяются сначала в том же порядке.

В случае непредвиденных обстоятельств во время проведения тестирования обращайтесь:

– к лаборанту в компьютерной аудитории для фиксирования возникшей ошибки программы;

– на кафедру высшей математики (ауд. 430 2-го учебного корпуса, тел. 209-88-25) для сообщения о выявленных проблемах;

– в группу программного обеспечения тестирования – ауд. 412 и 400 2-го учебного корпуса.

4. **Оценка результатов тестирования**

Шкала оценок результатов тестирования разрабатывается и утверждается на заседаниях кафедры высшей математики. Каждое правильно выполненное тестовое задание оценивается 1 баллом, невыполненное задание — 0 баллов. В заданиях с выбором ответов и на сопоставление в случае частично правильного ответа засчитывается соответствующая доля полного балла (например, если правильно указан один из двух вариантов ответов, то засчитывается полбалла) Для сдачи теста необходимо ответить не менее, чем на половину вопросов (т.е. набрать не менее 50% баллов).

5. **Типы заданий в тесте**

1) вопросы закрытого типа – для выбора правильных ответов из перечня предложенных. Может быть один или несколько правильных ответов;
2) вопросы открытого типа – для ввода ответа с клавиатуры;
3) вопросы на установку соответствия между элементами двух списков. Для ответа на такие вопросы следует мышью соединить элемент правого списка с соответствующим элементом левого списка.

6. **Разделы учебной программы, выносимые на тестирование**

Раздел I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.1.Аналитическая геометрия на плоскости

Предмет аналитической геометрии. Метод координат.

Декартова и полярная системы координат. Основные виды уравнения прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Параметрическое и полярное представления линий.

1.2.Векторная алгебра

Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве. Основные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

Векторы в n-мерном пространстве. Линейная зависимость векторов. Базис системы векторов. Разложение вектора по базису. Размерность и базис пространства. Понятие о векторных пространствах. Евклидово пространство.

1.3.Элементы аналитической геометрии в пространстве

Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Основные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости. Понятие о поверхностях второго порядка и их классификации.

1.4.Матрицы

Понятие матрицы. Операции над матрицами. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Понятие определителя n-го порядка. Ранг матрицы. Обратная матрица. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Понятие о квадратичных формах и их преобразовании к каноническому виду.

1.5.Системы линейных уравнений и неравенств

Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Системы линейных неравенств. Графический метод решения системы линейных неравенств с двумя переменными. Смешанные системы линейных уравнений и неравенств. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Раздел II. Математический анализ и дифференциальные уравнения

2.1. Числовая последовательность и ее предел

Действительные числа. Числовые множества. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Экономическая интерпретация числа e.

2.2. Функции одной переменной

Функции и отображения, их области определения и значений, способы задания и график функции. Основные элементарные функции. Сложная функция. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

2.3. Непрерывные функции одной переменной

Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность сложной функции и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции на множестве. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

2.4. Производная и дифференциал функции одной переменной

Производная функции. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Логарифмическая производная. Дифференцируемость функции одной переменной. Дифференциал, его геометрический и экономический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Примеры применения производной в экономике. Производные высших порядков. Неявные функции.

2.5. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Стационарные точки. Теоремы Ферма и Ролля. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений. Теорема Коши. Правило Лопиталя.

2.6. Приложения дифференциального исчисления

Условие постоянства функций. Условия монотонности функций. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Достаточные условия экстремума. Условия выпуклости и вогнутости. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

Предельные показатели в экономике. Эластичность экономических показателей. Максимизация прибыли.

2.7. Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Предел функции в точке. Непрерывность. Свойства непрерывных функций.

Частные производные. Примеры применения частных производных в экономике. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Градиент функции и его свойства. Производная функции по направлению.

Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Выравнивание эмпирических зависимостей. Метод наименьших квадратов.

2.8. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод замены переменной. Формула интегрирования по частям. Таблица неопределенных интегралов.

Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

2.9. Определенный интеграл

Определенный интеграл. Условия интегрируемости функций. Формула Ньютона- Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

Применение определенного интеграла в экономике. Применение определенного интеграла для вычисления площадей фигур, длин дуг плоских кривых и объемов тел. Несобственные интегралы.

2.10. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной.

2.11. Ряды

Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область и интервал сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Литература для подготовки к тестированию

Основная литература

1. Астровский А.И., Дымков М.П. Высшая математика. Учебное пособие: в 3ч. – Мн.: БГЭУ, 2009. – Ч. 1. – 398 с.
2. Астровский А.И., Дымков М.П. Высшая математика. Учебное пособие: в 3ч. – Мн.: БГЭУ, 2011. – Ч. 2. – 413 с.
3. Конюх А.В., Косьянчук В.В. Майоровская С.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Минск: БГЭУ, 2008. –Ч.1. – 299 с. Скачать
4. Гайшун Л.Н., Денисенко Н.В., Марков А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. – Минск: БГЭУ, 2009. – Ч.2. – 270 с. Скачать
5. Конюх А.В., Поддубная О.Н. , Майоровская С.В., Рабцевич В.А. Высшая математика: практикум: в 2ч. Ч.1 // Минск: БГЭУ, 2008. – 253 с.

6. Косьянчук В. В., Марков А. В., Станишевская Л. В., Ящина Н. Н. Высшая математика: практикум: в 2 ч. – Минск : БГЭУ, 2011. — Ч. 2. –235 с.
7. А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И Шилкина и др. Высшая математика: Общий курс. Учебник – 2-е изд., переработ. – Минск: Выш. шк., 2000. – 351 с.
8. Шилкина Е.И. Высшая математика: Уч.-практ. пособие: В 2 ч. – Мн.: БГЭУ 2003. – Ч.1. – 87 с.
9. Шилкина Е.И., Дымков М.П. Высшая математика: Уч.-практ. пособие: В 2 ч. – Мн.: БГЭУ 2005. – Ч.2. – 189 с.
10. Шилкина Е.И., Дымков М.П., Рабцевич В.А. Высшая математика. Уч.-практ. пособие: В 2 ч. – Мн.: БГЭУ 2011. – Ч.1. – 194 с. Скачать
11. Шилкина Е.И., Дымков М.П. Высшая математика: Уч.-практ. пособие: В 2 ч. – Мн.: БГЭУ 2005. – Ч.2. – 189 с.
12. Шилкина Е.И., Дымков М.П., Рабцевич В.А. Высшая математика. Уч.-практ. пособие: В 2 ч. – Мн.: БГЭУ 2011. – Ч.2. 167 с. Скачать

Дополнительная литература

1. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Общий курс. Мн., Выш. шк., 1976 г.
2. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн., Выш. шк., 1969 г.
3. Кузнецов А.В., Кузнецова Д.С., Шилкина Е.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс. Учебное пособие. Мн., Выш. шк., 1994 г.
4. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. Под редакцией проф. В.И. Ермакова. М. Инфра – М. 2006 г.
5. Высшая математика для экономистов /Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006.
6. Белько И.В., Кузьмич. К.К. Высшая математика для экономистов. Первый семестр. Экспресс-курс. М.: Новое знание, 2008.
7. Белько И.В., Кузьмич. К.К. Высшая математика для экономистов. Второй семестр. Экспресс-курс. М.: Новое знание, 2006.

7. Материалы для подготовки и самопроверки

С целью ознакомления студентов с тематикой разработанных тестов ниже приведены примеры тестовых заданий из каждого раздела изучаемой дисциплины. Эти задания взяты из действующей компьютерной базы данных, используемой кафедрой высшей математики БГЭУ для проведения тестирования, и могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки.

Отметим, что компьютерной системой поддерживаются три типа тестовых заданий:

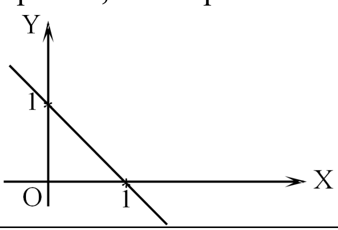
1) выбор правильного ответа (или нескольких правильных ответов, если это оговорено в задании) из набора предложенных вариантов ответа;

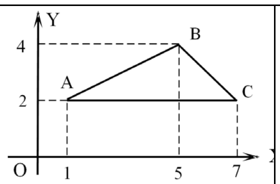
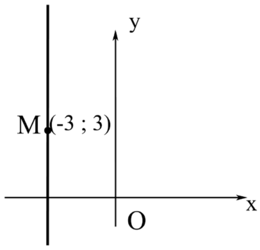
2) ввод с клавиатуры правильного ответа (как правило, в виде целого числа, если не оговорено противное в задании);

3) установление правильного соответствия между элементами множеств путем перетаскивания мышкой элемента правого столбца на соответствующий ему элемент в левом столбце.

В приводимых ниже тестовых заданиях предлагаются варианты ответов, **один или несколько** из которых правильные. Некоторые из этих вопросов могут быть заданы при тестировании и в форме 2.

Аналитическая геометрия на плоскости

№	Задание	Варианты ответов
1	Дан треугольник с вершинами *A* (-2; 0), *B* (2; 4) и *C* (4; 0). координаты середины стороны *AB*.	1) (1;0); 2) (0;2); 3) (2;2); 4) (3;2); 5) (-2;-2).
2	Дан треугольник *ABC* с вершинами *A* (– 3; 0), *B* (-5; -3) и *C* (3; 0). Составьте уравнение стороны *AB*.	1) $2x-3y+8=0$; 2) $3x+2y-9=0$; 3) $2x-3y-9=0$; 4) $3x-2y+9=0$; 5) $3x-2y-9=0$.
3	Угловой коэффициент прямой $5y-2x+7=0$ равен …	1) 2; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $-\frac{7}{5}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) –7.
4	Ордината точки пересечения прямой $3y-4x+6=0$ с осью Oy равна…	1) -2; 2) 3; 3) -6; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 4.
5	Уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой 3, а ось Oy в точке с ординатой 8 имеет вид …	1) $y=3x+8$; 2) $8y=x+3$; 3) $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$; 4) $3x+8y=0$; 5) $\frac{x}{3}+\frac{y}{8}=1$.
6	Какие из данных прямых проходят через начало координат: *a*) $x-y=0$; *b*) $2x+y=1$; *c*) $y-5=0$; *d*) $3y=0$; *e*) $1-5x=0$?	1) a и b; 2) b и c; 3) b и e; 4) c и d; 5) d и a.
7	Прямые $y=5x-2$ и $y=kx+5$ параллельны при $k=$…	1) -2; 2) 0,2; 3) -5; 4) –0,2; 5) 5.
8	Прямые $y=2x+4$ и $y=kx-3$ перпендикулярны при $k=$…	1) -2; 2) –0,5; 3) 2; 4) –0,25; 5) 0,5.
9	Точка пересечения прямых $x+y-3=0$ и $2x+3y-8=0$ имеет координаты …	1) (2; 1); 2) (3; 2); 3) (– 1; – 2); (1; 2); 2) (– 2; 3).
10	Какие из прямых: **а)** $x-y=0$; **в)** $x+y+1=0$; **с)** $x=1$; **d)** $y=1$ **параллельны** прямой**,** изображённой на рисунке. 	1) ни одна; 2) только прямая а); 3) только прямая в); 4) только прямая с); 5) только прямая d).

	Найти тангенс угла наклона к оси **Ox** прямой, проходящей по стороне **AC** **ΔABC**, изображённого на рисунке 	1) -2; 2) 0,2; 3) 0; 4) –0,2; 5) 5.
	Уравнение прямой, изображённой на рисунке,  имеет вид …	**1)** $-x-3=0$; **2)** $y-3=0$; **3)** $x+y=0$; **4)** $x-y=6$; **5)** $x-y=0$.

Прямая и плоскость в пространстве

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Какие плоскости параллельны 1. $4x-6y+3z+5=0$; 2. $2x-3y+z-5=0$; 3. $6x+8y-4z-6=0$; 4. $3x-6y+3z-6=0$; 5. $3x+4y-2z+3=0$.	1) 1 и 2; 2) 1 и 3; 3) 2 и 4; 4) 3 и 4; 5) 3 и 5.
2	Угол между плоскостями $x+2y-2z+1=0$ и $x+y-4=0$ равен …	1) 60^0; 2) 30^0; 3) 90^0; 4) 45^0; 5) 75^0.
3	Плоскость Oxz определяет уравнение …	1) $x=0$; 2) $y=0$; 3) $z=0$; 4) $x+z=0$; 5) $x=z$;
4	Даны две точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Какая плоскость проходит через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$?	1) $2(x-2)+(y+1)+4(z-3)=0$; 2) $2(x-4)-(y+2)-4(z+1)=0$; 3) $2(x-2)-(y+1)-4(z-3)=0$; 4) $3(x-2)-(y+1)-4(z-3)=0$; 5) $2(x-4)+(y+2)-4(z+1)=0$.
5	Угол между прямыми $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$ и $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{0}$ равен ...	1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 75^0; 5) 90^0.

Векторы в пространстве R^2, R^3, n-мерные векторы

№	Условие задачи	Варианты ответов
1	Даны векторы: $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,1,4)$, $\vec{c}=(1,1,5)$, $\vec{d}=(3,6,9)$, $\vec{e}=(2,4,6)$. Какие из них являются коллинеарными?	1) $\vec{a}$, $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 3) $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$; 4) $\vec{c}$, $\vec{d}$ 5) $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$
2	Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}=(2,3,1)$ и $\vec{b}=(-1,0,4)$ равно…	1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 9; 5) вектору $\vec{c}=(-2,0,4)$

3	Даны векторы: $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(-2,1,-3)$, $\vec{c}=(2,4,2)$. Взаимно перпендикулярны …	1) нет таких векторов 2) $\vec{a}$, $\vec{b}$; 3) $\vec{a}$, $\vec{c}$; 4) все векторы; 5) $\vec{b}$, $\vec{c}$
4	Даны векторы: $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,0,2)$. Линейная комбинация $2\vec{a}+3\vec{b}$ имеет координаты ...	1) $(5,4,12)$; 2) $(2,2,5)$; 3) $(5,2,5)$; 4) $(1,0,6)$; 5) $(0,2,1)$
5	Ранг системы векторов $\vec{a}_1=(2,3,1)$, $\vec{a}_2=(1,0,1)$, $\vec{a}_3=(4,3,3)$ равен …	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5
6	Дана система векторов: $\vec{a}_1=(1,2,2)$, $\vec{a}_2=(1,2,3)$, $\vec{a}_3=(1,2,-2)$. Базисом данной системы являются векторы…	1) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$; 2) $\vec{a}_1$; 3) $\vec{a}_2$; 4) $\vec{a}_3$; 5) любые два
7	Заданы векторы: $\vec{a}=(1,-1)$, $\vec{b}=(2,1)$, $\vec{c}=(2,2)$ в единичном базисе. Вектор $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ имеет координаты…	1) $\vec{c}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; 2) $\vec{c}=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$; 3) $\vec{c}=(1,1)$; 4) $\vec{c}=(3,0)$; 5) $\vec{c}=(1,2)$
8	Длина вектора $\vec{a}(4;-3)$ равна:	1) 1; 2) 7; 3) $\sqrt{7}$; 4) 25; 5) 5
9	Угол между векторами $\vec{a}(2;4)$ и $\vec{b}(3;6)$ равен:	1) 0°; 2) 90°; 3) 45°; 4) 180°; 5) 350°
10	Даны точки $A(3;8)$, $B(-5;4)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты ...	1) (-2;12); 2) (8;4); 3) (-1;6); 4) (-4;-2); 5) (-8;-4)

Матрицы

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $3\cdot A+2\cdot B$.	1) $\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\ -5 & 8 & -6\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & -5\\ 6 & 8\\ -2 & -7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}$.
2	Для матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ произведение элементов побочной диагонали равно ...	1)24; 2)16; 3)36; 4)6; 5)48.
3	Матрицу $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ можно умножить как слева, так и справа на матрицу размерности …	1) 2×3; 2) 3×2; 3) 3×3; 4) 1×3; 5) 3×1.

4	Найти элемент c_{32} матрицы $C = A \cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$.	1) -10; 2) 0; 3) 10; 4) 20; 5) 25.
5	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & -4 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -5\\ 6 & 4 & -8\end{pmatrix}$. Могут быть перемножены матрицы …	1) A, B и A, C; 2) A, B и B ,C; 3) B, A и B ,C; 4) B, A и A ,C; 5) C, A и B ,C.
6	Укажите матрицу, ранг которой равен двум: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 0 & 1\\ 6 & 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$.	1)A; 2)B; 3)C; 4)D.
7	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-0,5 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-0,5 & 0,25\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-0,5 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Обратной к F является матрица …	*1) A;* *2) B;* *3) C;* *4) D;* 5) *F*.
8	Решением уравнения $XA = B$, где A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем A – невырожденная матрица, является матрица X.	1) $X = A^{-1} \cdot B$; 2) $X = B \cdot A$; 3) $X = A \cdot B$; 4) $X = B \cdot A^{-1}$; 5) $X = B^{-1} \cdot A$.

Определители

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Если каждый элемент матрицы четвертого порядка умножить на 2, то её определитель …	1) увеличится в 4 раза; 2) не изменится; 3) увеличится в 16 раз; 4) увеличится в 8 раз; 5) увеличится в 2 раза.
2	Определитель матрицы коэффициентов системы уравнений $\begin{cases}2x_1 + x_2 = 3,\\ 2x_1 - 3x_2 = 1\end{cases}$ равен:	1) -4; 2) 8; 3) -8; 4) 10; 5) 1
3	Определитель произведения матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ равен ...	1) 56; 2) – 32; 3) – 4; 4) – 56; 5) 4.

4	Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&5&4\\1&0&2\end{vmatrix}$.	1) 9; 2) 39; 3) 9; 4) – 39; 5) другой ответ.
5	Как изменится определитель, если из его первой строки вычесть третью, умноженную на три?	1) изменит свой знак; 2) не изменится; 3) увеличится в 3 раза; 4) станет равным нулю; 5) другой ответ.
6	Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\Delta=\begin{vmatrix}4&2&1\\0&3&8\\5&6&2\end{vmatrix}$ равно числу …	1) – 14; 2) 32; 3) 14; 4) 8; 5) – 32.
7	Вычислить определитель $\det A^{-1}$ обратной матрицы к матрице $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$	1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0
8	Существует ли определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}$?	1) да и равен 0 2) да и равен 15 3) нет 4) да и равен -7
9	Вычислить элемент c_{21} матрицы, обратной к матрице $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	1)– 1; 2) 2; 3) 0; 4) -3; 5) 4

Системы линейных уравнений

№	Условие задачи	Варианты ответов
1	Найти сумму $x_1+x_2+x_3$, где (x_1,x_2,x_3) - решение системы $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\x_2+4x_3=7\\x_3=2\end{cases}$.	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2
2	Какое из уравнений: **(а)** $X_1+X_2=1$, **(в)** $X_1-X_2=0$, **(с)** $2X_1+2X_2=0$ можно приписать к уравнению $X_1+X_2=0$, чтобы составить совместную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными X_1, X_2.	1) любое; 2) никакое; 3) только не (а) 4) только (в); 5) другой ответ.
3	Даны системы линейных уравнений: *a)* $\begin{cases}6x-3y=1,\\2x-y=2;\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=1,\\2x+2y=-2;\end{cases}$ *c)* $\begin{cases}x+y=1,\\2x+2y=2.\end{cases}$ Несовместными системами являются:	1) c) 2) b) 3) a) 4) a) и b) 5) b) и c)

4	Система $\begin{cases} 4x + a^2 y = 12 \\ x + y = a + 1 \end{cases}$ не имеет решений при значении a, равном …	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2
5	Какие из однородных систем имеют бесконечное множество решений? $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	

Предел функции. Замечательные пределы

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$ являются: а) $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \infty$; б) $\beta(x) = \frac{2}{x^2}$, $x_0 = 0$; в) $\tau(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = \infty$; г) $\delta(x) = 2000x$, $x_0 = 0$; д) $\varepsilon(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;	1) все, кроме д); 2) а); в); г); 3) а); г); д); 4) б); г); д); 5) другой ответ.
2	Какие из указанных пределов равны 1: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 2x}{2x}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x}$. б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$;	1) все; 2) только б); 3) все, кроме а); 4) а); б); 5) другой ответ.
3	Если $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2+x}{2x+1} \right)^x = A$, $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = B$, то $A - B$ равно	1) e^2; 2) $2e$; 3) ∞; 4) $2-e$; 5) $\frac{16}{25} - e$.
4	Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{5x^2 - 5}{x^2 + 3x - 4}$	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
5	Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{x+9} - 3}$	1) -4; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 4.
6	Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\, x}$	1) -4; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 4.
7	Если $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x = e^k$, то k равно	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
8	Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{3x^3 + x^2 + 5}$	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
9	Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
10	Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$	1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
11	Предел $\lim\limits_{x \to 0} \sin 8x \cdot \mathrm{ctg}\, 4x$ равен числу	1) -2; 2) $\sin 2x$; 3) 2; 4) -1; 5) 1.

Производная. Дифференциал

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Производная функции $y = x \cdot \ln x$ равна…	1) $\ln(ex)$; 2) $x + \ln x$; 3) $1+1/x$; 4) $1/x$; 5) другой ответ.
2	Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 2x + \sqrt[3]{7}$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi/12$.	1) -2; 2) $\sin 2x$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) -1; 5) 1.
3	Найти дифференциал dy функции $y = 4x^2 + 1$ в точке $x_0 = 1$, если приращение аргумента $\Delta x = 0,02$. В ответ записать число $100dy$.	1) $-16dy$; 2) $16dx$; 3) $8dx$; 4) $-8dx$; 5) 16.
4	Вычислить производную функции $y = 4x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$ в точке $x = 16$.	1) -5; 2) $10dx$; 3) 5; 4) 10; 5) 16.
5	Вычислить производную функции $y = x^3 \ln x$ в точке $x = 1$.	1) -3; 2) $3dx$; 3) 1; 4) dx; 5) x^2.

Исследование функций

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1	Если точки x_1 и x_2 являются точками локального экстремума функции $y = (x+6)^2(5x-1)$, $x \in R$, то произведение $(x_1 \cdot x_2)$ равно …	1) $\frac{58}{5}$; 2) $-\frac{57}{5}$; 3) $\frac{56}{5}$; 4) $\frac{6}{5}$; 5) $\frac{5}{6}$.
2	Если у графика функции $y = 4x^3 + 3x^2 + x - 1$ существует точка перегиба, то абсцисса $x = x_0$ этой точки равна …	1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) точек перегиба нет.
3	Дана производная функции $f(x)$: $f'(x) = (x-2)(x-3)$. Если x_0 – точка максимума функции $f(x)$, то x_0 равно:	1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 2; 5) 3.
4	Дана производная функции $f(x)$: $f'(x) = x(3-x)$. Функция $f(x)$ убывает на промежутке (промежутках):	1) $(0;3)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $(-\infty;0)$ и $(3;+\infty)$; 4) $(-\infty;3)$; 5) $(0;+\infty)$.
5	Дана вторая производная функции $f(x)$: $f''(x) = (x-2)^2(x-3)$. Найдите абсциссу точки перегиба графика функции $y = f(x)$.	1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 2; 5) 3.
6	Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{x}{x-1}$ является прямая:	1) $x = 1$; 2) $y = 1$; 3) $y = x - 1$; 4) $x = -1$; 5) $x = 0$.
7	Горизонтальной асимптотой графика	1) $y = 2$; 2) $y = 3x - 2$;

	функции $y=\dfrac{2x}{3x-2}$ является прямая:	3) $y=2x$; 4) $y=\dfrac{2}{3}$; 5) $x=\dfrac{2}{3}$.
8	Наклонной асимптотой графика функции $y=\dfrac{2x^2-2}{3x}$ является прямая:	1) $y=2$; 2) $y=3x-2$; 3) $y=2x$; 4) $y=\dfrac{2}{3}x$; 5) $x=\dfrac{2}{3}$.
9	Дана вторая производная функции $f(x)$: $f''(x)=(x-10)(x-7)$. График функции $y=f(x)$ является вогнутым на промежутке (промежутках):	1) $(7;10)$; 2) $(-10;-7)$; 3) $(-\infty;-10)$ и $(-7;+\infty)$; 4) $(-\infty;7)$ и $(10;+\infty)$; 5) $(-\infty;7)$.

Функции многих переменных

Функция многих переменных, область определения

Образец 1. Сопоставьте варианты из правой колонки вариантам из левой:

Если функция $z=1\big/\left(4-y^2-x^2\right)$, то на плоскости xOy ее область определения имеет вид…

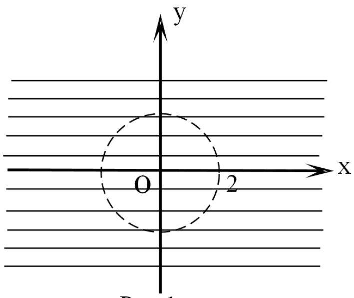


Рис 1.

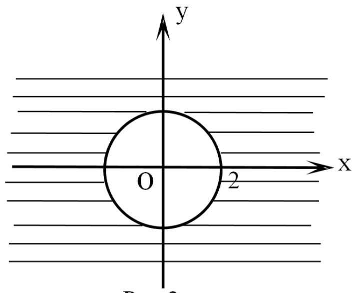


Рис 2.

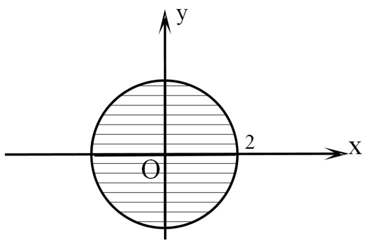


Рис 3.

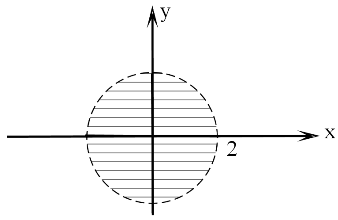


Рис 4.

В ответ запишите номер рисунка.

Решение. Из области определения исключаются все точки, в которых знаменатель дроби равен нулю: $y^2+x^2=4$. Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R=2. Поэтому область определения функции – вся плоскость кроме данной окружности, т.е. ответом является первый рисунок. Надо в строку ответа ввести число 1.

Частные производные 1-го и 2-го порядка

Пример. Найти частные производные функции $z=x^2-3xy-4y^2-x+2y+1$.

Ответ: $z'_x=2x-3y-1$; $z'_y=2-3x-8y$.

Пример. Вычислить частные производные z'_x и z'_y функции $f(x,y)=x^2-3xy+2y^2$ в точке $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем : $z'_x = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_x = (x^2)'_x - (3xy)'_x + (2y^2)'_x =$
$= 2x - 3y(x)' + 0 = 2x - 3y$. Тогда $z'_x\left(M_0\right) = z'_x\left(1,\ 2\right) = 2\cdot 1 - 3\cdot 2 = -4$.
Далее: $z'_y = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_y = (x^2)'_y - (3xy)'_y + (2y^2)'_y = 0 - 3x + 4y$.
Значит, $z'_y\left(M_0\right) = z'_y\left(1,\ 2\right) = -3\cdot 1 + 2\cdot 4 = 5$.

Ответ: $z'_x\left(M_0\right) = -4$, $z'_y\left(M_0\right) = 5$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание
1.	Найти сумму частных производных первого порядка функции $Z = x^2 + y^2$ в точке (–2; 0,5)
2.	Найти произведение частных производных первого порядка функции $Z = arctg(x+y)$ в точке (0; 0)
3.	Если $z = x\ln\frac{y}{x}$, то z'_y равно: 1) xy; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{x}{y^2}$; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $\ln\frac{y}{x} + \frac{1}{x}$
4.	Если $z = y\ln\frac{x}{y}$, то z''_{xy} равно … 1) $\frac{y}{x} + 1$; 2) $\frac{2y}{x}$; 3) $-\frac{y}{x^2}$; 4) $-\frac{x}{y^2}$; 5) $\ln\frac{x}{y} + \frac{1}{y}$
5.	Найти z''_{yx} в точке $M\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, если $z = 4\ln(x + 4y)$
6.	Вычислить частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции двух переменных $z = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ в точке (1;1)

Полный дифференциал и его приложения

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2.$$

Подставляем в формулу полного дифференциала:

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz\ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Пример. Найти в точке M(1;2) полный дифференциал функции

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 5y + 1.$$

Решение. Сначала находим частные производные:

$f'_x(x, y) = (x^3 + 3xy^2 - 5y + 1)'_x = (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x + (-5y + 1)'_x = 3x^2 + 3y^2$.

$f'_y(x, y) = (x^3)'_y + 3x(y^2)'_y - 5(y)'_y + (1)'_y = 6xy - 5$.

Теперь вычисляем значения производных в данной точке:

$f'_x(M) = f'_x(1;2) = 3\cdot 1 + 3\cdot 2^2 = 15$; $f'_y(M) = f'_y(1;2) = 6\cdot 1\cdot 2 - 5 = 7$.

Окончательно имеем: $df\big|_M = f'_x(M)dx + f'_y(M)dy = 15dx + 7dy$

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание	Варианты ответов
1.	Вычислить полный дифференциал функции $z = arctg(y/x)$ в точке $x=2,\quad y=2$ при $\Delta x = 0.1,\quad \Delta y = 0.1$	1. -0.1 2. 0.1 3. 0 4. 0.2
2.	Найти приближенное значение $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$	1) 1.01; 2) 0.99; 3) 1; 4) 1.02

Экстремумы функций многих переменных

Пример. Исследовать функцию $z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.

Решение. Находим частные производные: $z'_x = -2y^2 + 2x$, $z'_y = 4y^3 - 4xy + 2 + 2y$. Для отыскания критических точек решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2y^2 + 2x = 0 \\ 4y^3 - 4xy + 2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ 2y(y^2 - x) + 1 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Итак, $M_o(1,-1)$ -единственная точка, "подозрительная на экстремум". Находим вторые частные производные: $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -4y$, $z''_{yy} = 12y^2 - 4x + 2$, следовательно, A=2, B=4, C=10, $\Delta = AC - B^2 = 4$, т.е. $\Delta > 0$, функция имеет экстремум в точке M_o - минимум (A>0). Вычислим $z_{min} = (-1)^4 - 2\cdot1\cdot(-1)^2 + 1 - 2 + 1 = -1$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание	Варианты ответа
1.	Найти критическую точку функции $Z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17$. В ответе указать сумму координат найденной точки.	
2.	Найти $Z_{\min}$ для функции $Z = x^2 + y^2$.	
3.	Найти точки возможного экстремума функции двух переменных $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	1. x = 1, y = 2 2. x = 2, y = 1 3. x = 2, y = 2 4. x = 1, y = 1
4.	Найти точки локального максимума функции двух переменных $z = x^3 - y^3 - 3xy$	1. x = 1, y = -1 2. x = -1, y = 1 3. x = 0, y = 0 4. нет максимума

Неопределенный интеграл

Определение. Таблица интегралов

Пример.

Найти $\int \cos x\,dx$.	1) sin$x$ + π; 2) cos$x$+C; 3) cos(π/2–x)+C; 4) sin(x+π/2)+C.

Решение. Данный интеграл – табличный, поэтому ответ $\sin x$ + C. Явно такого ответа нет. Если посмотреть внимательнее и учесть, что $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, то следует выбрать третий ответ.

Образец 2.

Если $F'(x) = x^{-2}$ и F(1)= 0, то F(–1) равно …	☐ –1 ☐ 1 ☑ 2 ☐ –2

Решение. Если $F'(x) = x^{-2}$, то $F(x) = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + C$. Из условия F(1) = 0 имеем $-1/1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$. Таким образом, функция имеет вид: $F(x) = -x^{-1} + 1$. Следовательно, $F(-1) = -(-1)^{-1} + 1 = 2$. Глядя на колонку с ответами, должны «кликнуть» (навести курсор и щёлкнуть левую кнопку мышки) по окошку, справа от которого стоит цифра 2.

Образец 3.

Если $F'(x) = \sin 2x$ и F(0)= 1,5, то F(π/4) равно …	☑ 2 ☐ 1,5 ☐ 1 ☐ –2

Решение. $\int \sin 2x\,dx = 0{,}5\int \sin 2x\,d(2x) + C = -0{,}5\cos 2x + C.$ Подставив $x = 0$, имеем: $-0{,}5\cdot\cos 0 + C = 1{,}5$. Т.к. $\cos 0 = 1$, то C=2. Итак, $F(x) = -0{,}5\cos 2x + 2$. Следовательно, $F(\pi/4) = -0{,}5\cos(\pi/2) + 2 = 2.$

Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям

Непосредственное интегрирование. Если подынтегральная функция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то можно интегрировать каждое слагаемое отдельно. Пользуясь этим, можно многие интегралы привести к сумме более простых интегралов.

Образец 4.

1	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}}dx$	$6x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

Решение. Разбиваем интеграл на сумму интегралов, каждый из которых оказывается табличным, и выполняем непосредственное интегрирование:

$$\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2x}{\sqrt{x}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Замена переменной. Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной интегрирования, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x=\varphi\ (t)$. Определив из этой формулы $dx=\varphi'(t)dt$ и подставляя, получим $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$ Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования *t* будет найден, то преобразовав результат к переменной *x,* пользуясь исходной формулой $x=\varphi\ (t),$ получим искомое выражение заданного интеграла.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл $\int\sqrt{2x-1}dx$.

Решение: В данном случае следует применить метод подстановки (замены переменной). Тогда согласно описанному алгоритму:
$\int\sqrt{2x-1}\,dx=\left[\sqrt{2x-1}=t,\quad x=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2},\quad dx=tdt\right]=\int t^2dt=$ (возвращаемся к старой переменной интегрирования x) $=\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+C=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$.

Образец 5.

Найти $\int 9\sqrt{3x-2}\,dx$	☐ $2\cdot(3x-2)^{3/2}$ ☐ $2t^3+C$ ☑ $2\cdot(3x-2)\sqrt{3x-2}+C$ ☐ $6\cdot(3x-2)^{3/2}+C$

Замечание 1. В списке приведенных ответов первая строка по причине отсутствия постоянной С не может быть отмечена как правильный ответ!

Замечание 2. Ответ в примерах подобного рода может быть получен гораздо быстрее. С этой целью можно использовать метод подведения под знак дифференциала, который является частным случаем метода подстановки, примененным выше. Суть метода подведения под знак дифференциала состоит в том, что под знак дифференциала подводится некоторое выражение, и интеграл становится табличным. Этот метод был приведен в Образце 10. Именно для примеров подобного рода, когда интеграл не является табличным, но «похож» на него, т.е. почти табличный, он наиболее удобен.

Решение нашего примера способом подведения под знак дифференциала выглядит так:

$$\int 9\sqrt{3x-2}\,dx=9\cdot\frac{1}{3}\int(3\text{x-}2)^{1/2}\,d(3\text{x-}2)=3\cdot\frac{2(3x-2)^{3/2}}{3}+C=\cdot 2\cdot(3x-2)^{3/2}+C.$$

Интегрирование по частям. Из формулы дифференциала произведения $d(uv)=udv+vdu$ интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям: $\int u\,dv=uv-\int vdu$ По этой формуле отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен. Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух множителей: *u* и *dv*.

Следует помнить, что:

1. За dv принимаем $e^x dx$; $\sin x\, dx$; $\cos x dx$, $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, а за u – остальное;
2. За u принимаем $\ln \alpha x$; $\arcsin nx$; $\mathrm{arctg}\, kx$, x^n, а за dv – множитель при них.

Образец 6.

Найти $\int x \cdot e^{-x} dx$	☐ $(x+1)e^{-x}+C$ ☑ $-(x+1)e^{-x}+C$ ☐ $-(x-1)e^{-x}+C$ ☐ $-x-e^{-x}+C$

Решение. Интегралы такого типа ищутся путём интегрирования по частям: $\int$ u·dv = u·v – $\int$ v·du. За функцию u следует принять x, тогда оставшаяся часть $e^{-x}\,dx$ – это dv. Чтобы найти функцию v, остаётся проинтегрировать.

$$\int x \cdot e^{-x} dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^{-x} dx \\ \int dv = \int e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| =$$

(Так как C – произвольное постоянно число, то при поиске функции **v** его полагают равным нулю.)

Составляющие формулы интегрирования по частям найдены, поэтому остаётся подставить их в формулу. Получим: $-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$.

Образец 7.

Найти $\int x \cos 3x\, dx$	☐ $\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x + c$ ☑ $\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c$ ☐ $x \sin 3x + \cos 3x + c$ ☐ $\sin 3x + c$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv = \int v du$. Обозначим $u = x$; $dv = \cos 3x\, dx$. Тогда $du = dx$; $v = \int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \sin 3x$. (Здесь и только здесь полагаем $c = 0$).

Имеем $\int x \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c$.

Задачи для самостоятельного решения

№	Условие	Возможные ответы
	Укажите неопределённые интегралы, при нахождении которых придётся использовать один и тот же табличный интеграл. а) $\int x dx$; б) $\int x \cdot e^{x^2} dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$	☐ все; ☐ а) и б); ☐ а) и в); ☐ б) и в); ☐ другой ответ.

	Найти неопределённый интеграл $\int 2\sin(3-2x)\,dx$.	☐ $\cos(3-2x)+C$; ☐ $0{,}5\cdot\cos(3-2x)+C$; ☐ $-\cos(3-2x)+C$; ☐ $-2\cdot\cos(3-2x)+C$; ☐ $-4\cdot\cos(3-2x)+C$.
	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4x^2-25}$.	☐ $0{,}5\cdot\ln\left\|\frac{x-2{,}5}{x+2{,}5}\right\|+C$; ☐ $0{,}2\cdot\ln\left\|\frac{2x-5}{2x+5}\right\|+C$ ☐ $0{,}1\cdot\ln\left\|\frac{2x-5}{2x+5}\right\|+C$ ☐ $0{,}05\cdot\ln\left\|\frac{x-2{,}5}{x+2{,}5}\right\|+C$.
	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$.	☐ $0{,}5\cdot arc\sin 0{,}4x+C$; ☐ $-0{,}5\cdot arc\sin 0{,}4x+C$; ☐ $0{,}5\cdot\ln\left\|x+\sqrt{4x^2-25}\right\|+C$; ☐ $0{,}5\cdot\ln\left\|2x+\sqrt{4x^2-25}\right\|+C$.
	Найти неопределённый интеграл $\int 2\cdot e^{1-2x}dx$	☐ $-e^{1-2x}+C$; ☐ $e^{1-2x}+C$ ☐ $-2\cdot e^{1-2x}+C$ ☐ $2\cdot e^{1-2x}+C$ ☐ $-4\cdot e^{1-2x}+C$.

Интегрирование рациональных дробей

Образец 8.

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.	☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$ ☑ $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$ ☐ $\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$

Данная подынтегральная функция является дробно-рациональной функцией. Здесь следует в знаменателе дроби $\frac{1}{x^2+2x+3}$ выделить полный квадрат.

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\begin{vmatrix}x+1=t\\dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$.

Решение. В знаменателе выделим полный квадрат

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx.$$

Сделаем замену $x-\frac{1}{2}=t$, $x=t+\frac{1}{2}$, $dx=dt$, тогда получим:

$$\int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\ln\left|\,t^2+\frac{3}{4}\,\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+c = \frac{3}{2}\ln\left|\,x^2-x+1\,\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Образец 9.

Найти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$	☐ $\sqrt{x+1}\cdot e^{-x}+C$ ☑ $2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$ ☐ $\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$ ☐ $2\left|\sqrt{x}+1\right|+C$

Решение. Произведем подстановку $\sqrt{x}=t$, тогда $x=t^2$ и $dx=2\,t\,dt$.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = \int \frac{2dt}{t+1} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln\left|\,t+1\,\right|+c = 2\ln\left|\,\sqrt{x}+1\,\right|+C.$$

Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций

Образец 10.

Найти $\int \cos 2x\cdot\sin 5x\,dx$	☐ $\frac{1}{4}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$ ☐ $\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$ ☑ $-\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$ ☐ $-\cos 7x-\cos 3x+C$

Решение. Применив формулу $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$,

получим $\int \cos 2x\cdot\sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 7x+\sin 3x\right)dx =$

$$=\frac{1}{2\cdot 7}\int \sin 7x\,d(7x)+\frac{1}{2\cdot 3}\int \sin 3x\,d(3x) = -\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

4. Определенный интеграл

Определение и свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Метод подстановки и интегрирование по частям

Определённый интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница, которая гласит: определённый интеграл равен приращению первообразной на отрезке интегрирования $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Образец 11.

Вычислить $\dfrac{8}{\pi}\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$	2

Решение. Интеграл табличный, первообразная – arctg$x$. Следовательно, её приращение на отрезке [0, 1] arctg 1 – arctg 0 = π/4 – 0 = π/4. С учётом множителя, ответом является 2.

Образец 12.

Вычислить J = $\int\limits_3^8 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$. В ответе записать 3·J	32

Решение. Сделаем замену переменной $\sqrt{1+x} = t$. Тогда $1+x = t^2$, $x = t^2 - 1$, dx= d(t^2 – 1), т.е. $dx = 2t\,dt$. Подынтегральное выражение $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ превратится в выражение $\dfrac{(t^2-1)\cdot 2t\,dt}{t}$, т.е. в выражение $2\left(t^2 - 1\right)dt$, для которого найти первообразную не составит труда. Так как интеграл определённый, то следует перейти к новым пределам интегрирования. Для этого в формулу $t(x) = \sqrt{1+x}$, связывающую переменные, подставим x=3 ⇒ t=2 и x=8 ⇒ t=3. Решение сведётся к вычислению определённого интеграла

$$J = \int\limits_2^3 2(t^2-1)\,dt = 2\left(\int\limits_2^3 t^2\,dt - \int\limits_2^3 dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\cdot(9-3-8/3+2) = 32/3.$$

Следовательно, 3·J=32.

Образец 13.

Вычислить $\int\limits_0^\pi x\cdot\sin\dfrac{x}{2}dx$	4

Решение. Данный пример на вычисление определённого интеграла по частям: $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

$$\int\limits_0^\pi x\cdot\sin\frac{x}{2}dx = \left|\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = \int\sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} \end{array}\right| = -2x\cdot\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^\pi + 2\int\limits_0^\pi\cos\frac{x}{2}dx =$$

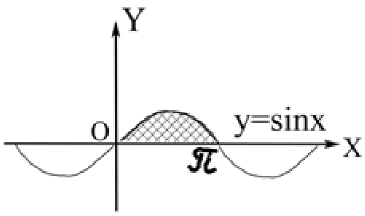
$$= -2(\pi\cdot\cos(\pi/2) - 0\cdot\cos 0) + 4\sin(x/2)\Big|_0^\pi = 4\cdot(\sin(\pi/2) - \sin 0) = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

№	Условие	Ответ
1	Вычислить $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.	
2	Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2} dx$.	
3	При помощи формулы интегрирования по частям вычислить определенный $\int\limits_{0}^{3} x \cdot e^{1/3x} dx$	
4	Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin 2x} \cos x \, dx$.	1) e; 2) $e-1$; 3) $e+1$; 4) 1; 5) $e+2$.
5	Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt{5x^2+4} \, dx$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{19}{15}$; 3) $\frac{38}{15}$; 4) $\frac{19}{3}$; 5) $\frac{7}{3}$.

Приложения определенного интеграла (площади, длины линий, объемы тел вращения, экономические приложения)

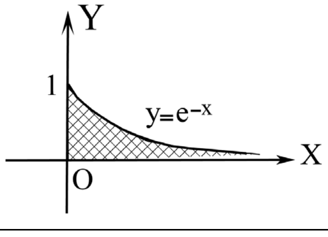
Образец 14.

Рассмотрев рисунок, вычислите площадь S заштрихованной фигуры. 	2

Решение. Из геометрического смысла определённого интеграла (площадь криволинейной трапеции), глядя на рисунок, следует, искомая площадь равна:

$$S = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \, dx = -cos\Big|_{0}^{\pi} = -(cos\pi - cos0) = 2$$

Образец 15.

Рассмотрев рисунок, вычислите площадь S заштрихованной фигуры.  В ответ запишите 2S.	2

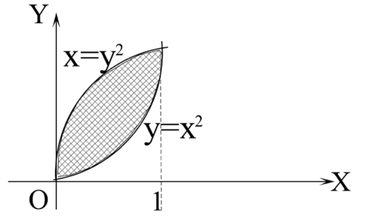
Решение. Площадь заштрихованной фигуры выражается несобственным интегралом. Применим обобщенную формулу Ньютона-Лейбница:

$$S=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\int_0^b e^{-x}d(-x)\right)=-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}d(-x)=-\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}(e^{-b}-e^0)=-\lim_{b\to+\infty}(e^{-b}-1)=-\lim_{b\to+\infty}e^{-b}+\lim_{b\to+\infty}1=1.$$

Удвоенная площадь равна 2.

Образец 16.

Рассмотрев рисунок, вычислите объём V тела, полученного вращением заштрихованной фигуры вокруг оси Ox .  В ответ запишите $\frac{10V}{\pi}$.	3

Решение. Если криволинейную трапецию (фигура, заключённая между кривой y=f(x), осью O*x* и прямыми *x*=a и *x* =b) вращать вокруг оси O*x*, то объём получаемого при этом тела вращения равен: $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Так как в примере заштрихованная фигура получается, если из криволинейной трапеции, определяемой верхней линией, вычесть криволинейную трапецию, образуемую нижней линией, то искомый объём будет равен разности двух объёмов:

$$V=V_2 - V_1,\ V_1=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=0,5\pi,\ V_2=\pi\int_0^1 x^4\,dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=$$

$=0,2\pi\cdot V=0,3\pi$. Поэтому $\frac{10V}{\pi}$=3.

Пример. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией f(t) = 3/(3t +1) + 4.

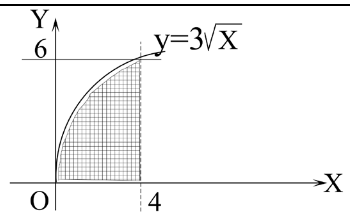
Решение. Если непрерывная функция f(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой $V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. В нашем случае

$$V=\int_2^3\left(\frac{3}{3t+1}+4\right)dt=(\ln(3t+1)+4t)\Big|_2^3 = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4.$$

Пример. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией f(t) = 2t + 5.

Решение. Имеем: $V=\int_0^3(2t+5)dt=\left(\frac{2t^2}{2}+5t\right)\Big|_0^3=9+15=24$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание
1.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3\sqrt{x}+2, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=4$
2	Рассмотрев рисунок, вычислите площадь заштрихованной фигуры. 
3.	Найти объем V тела вращения, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $f(x)=\dfrac{4}{x}, \quad x=2, \quad x=8, \quad y=0.$ В ответ записать $\dfrac{V}{\pi}$.
4.	Зная, что объем V продукции, произведенной рабочим с производительностью $p(t)$ с момента времени t_1 до момента времени t_2, вычисляется по формуле $V=\int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt$, найти V в случае $p(t)=2+3\sqrt{t}, \quad t_1=1, \quad t_2=4.$
5.	Зная, что среднее значение m издержек $K(x)$ при изменении объема производства x от a до b вычисляется по формуле $m=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b K(x)dx$, найти m в случае $a=0,\ b=3,\ K(x)=-x^2+8x+9$

Несобственные интегралы

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{e^2}^{b} \dfrac{d\ln x}{\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{b} =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2\ln^2 b}\right)+\dfrac{1}{2\ln^2 e^2}=\dfrac{1}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{8}.$ Интеграл сходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos^2 xdx.$

Решение.

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos^2 xdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{1+\cos 2xdx}{2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^b dx + \frac{1}{2\cdot 2}\int\limits_0^b \cos 2xd2x\right)=$$

$$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\Big|_0^b + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}\sin 2b\right).$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin 2b$ не существует, то несобственный интеграл расходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+4x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{0} \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}2x\Big|_{a}^{0} =$$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}0 - \lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, интеграл сходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ является неограниченной при $x=-2$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль, следовательно, в этой точке функция терпит бесконечный разрыв. Согласно определению имеем

$$\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-2+\alpha}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{x+2}\Big|_{-2+\alpha}^{0}\right) = -\frac{1}{2} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha} = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ в точке $x=1$ терпит бесконечный разрыв, так как знаменатель дроби обращается в нуль при $x=1$. По определению имеем

$$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{1+\alpha}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{1+\alpha}^{e}\frac{d\ln x}{\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\alpha}^{e} =$$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 e} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\alpha)}\right) = \frac{3}{2}.$ Интеграл сходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{dx}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ терпит бесконечный разрыв. По определению имеем:

$\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\varepsilon-1}+1\right) = \infty.$$

Если один из интегралов равен ∞, то несобственный интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Сколько интегралов в следующей группе являются несобственными? а) $\int_{1}^{+\infty} x dx$; б) $\int_{1}^{2} \ln x dx$; в) $\int_{0}^{2} \ln x\, x dx$; г) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; д) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+1}$.	
2.	Вычислить $\int_{2}^{+\infty} \frac{2dx}{x^2}$.	
3.	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$	1) 1; 2) e; 3) $e-1$; 4) e^2; 5) расходится.
4	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$	1) расходится; 2) e; 3) 1; 4) –1; 5) 0.

5. Дифференциальные уравнения

ДУ первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными

Образец 17.

Условие	Ответ
Является ли функция $y = Cx$ решением дифференциального уравнения $x \cdot y' - y = 0$?	☑ Да ☐ Нет

Решение. Найдём производную от функции, о которой говорится в условии, получим $y' = C$. Подставив в данное уравнение $y = Cx$ и $y' = C$, получим $x \cdot C - C \cdot x = 0$, т.е. 0=0. Так как получили верное равенство, то функция $y = Cx$ является решением дифференциального уравнения $xy' - y = 0$.

Образец 18.

№	Условие	Ответ
1.	Является ли функция $y = x(x+1) + C$ решением дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$?	☐ да ☑нет

Решение. $y = x(x+1) + C \Rightarrow y' = \left(x(x+1) + C\right)' \Rightarrow y' = 2x + 1 \neq 2x - 1.$
Данная функция не является решением уравнения.

Пример. Решить уравнение $x(y+1) - (x^2+1)y' = 0.$

Решение. Данное уравнение, как уравнение, содержащее неизвестную функцию y, её производную y' и независимую переменную x, – дифференциальное уравнение первого порядка. Так как $y' = dy/dx$, перепишем уравнение в *дифференциалах:* $x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0.$ Разделим переменные, поделив обе части уравнения на произведение $(x^2+1)(y+1) \neq 0$: $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{y\,dy}{y+1} = C.$

В первом интеграле применим подведение под знак интеграла
$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C_2$.

Во втором интеграле $\int \frac{y+1-1}{y+1}dy = \int dy - \int \frac{dy}{y-1} = y - \ln\left|y-1\right| + C_3$.

Положив $C_2 = C_3 = 0$, получаем общий интеграл: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| = C_1$.

Функция $y = -1$ – решение уравнения. Это *особое решение*, так как оно не может быть получено из общего решения ни при каком значении постоянной С.

Задачи для самостоятельного решения

1	Решением уравнения $xy' = 1$ является: 1) 1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $y = -\frac{1}{x^2}$; 4) $y = e^x$; 5) $y = \ln x$.
2	Общее решение уравнения $y' + 2xy = 0$ имеет вид $y = Ce^{-x^2}$. Частным решением данного уравнения, удовлетворяющим условию $y = 1$ при $x = 1$, является: 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = e^{-x^2+1}$; 3) $y = 2e^{-x^2}$; 4) $y = e^0$; 5) $y = e^{-x^2+2}$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где p(x), q(x) – непрерывные функции в некоторой области, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Подстановка $y = u{\cdot}v$ (метод Бернулли), где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции, производные которых непрерывны, приводит к общему решению.

Общее решение можно также найти по формуле

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Пример. Решить уравнение $y' + 2xy = 2\,x^2e^{-x^2}$.

Решение. Это линейное дифференциальное уравнением первого порядка, в котором $p(x) = 2x$, $q(x) = 2x^2e^{-x^2}$ Поэтому согласно формуле $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$ (при промежуточном интегрировании постоянную С можно выбрать произвольно, чаще всего она полагается равной нулю!).

Далее, другой интеграл $\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx = \int 2x^2\cdot e^{x^2}e^{-x^2}dx = x^3/3+C$.

Итак, общее решение есть $y = e^{-x^2}\cdot(x^3/3+C)$.

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	Варианты ответов
1	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:	1) $y' + p(x)y^2 = q(x)$; 2) $y^2 + p(x)y = q(x)$; 3) $y = ax + b$; 4) $y' + p(x)y = q(x)$; 5) $P(x;y)\,\mathrm{dx} + Q(x;y)\,\mathrm{dy} = 0$.
2	Общее решение уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:	1) $y = e^x + C$; 2) $y = e^x(x + C)$; 3) $y = e^{x+C}$; 4) $y = x(e^x + C)$; 5) $y = (x + C)(e^x + C)$.

Линейные ДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 4,5y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным однородным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + py' + qy = 0$. Решается оно методом Эйлера, который заключается в следующем:

1. По коэффициентам исходного уравнения составляем характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ (обычное квадратное уравнение).
2. Вычисляем его дискриминант $D=p^2-4q$.
3. В зависимости от полученного значения дискриминанта D имеем следующий вид общего решения (см. таблицу 1).

Таблица 1.

D>0 – два различных действительных корня k_1 и k_2: $k_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2$	D=0 - один действительный корень k кратности 2: $k = -p/2$	D<0 – два комплексных корня $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-\beta i$ $\alpha = -p/2,\ \beta = \sqrt{-D}/2$
Общее решение		
$y=C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$	$y=e^{kx}(C_1+C_2\cdot x)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)$

Таким образом, в соответствии с методом Эйлера для нашего примера составляем характеристическое уравнение $k^2-3k+4,5=0$. Его дискриминант отрицателен: $D= p^2- 4q =3^2 - 4\cdot4,5=9-18=-9<0$. Значит, общее решение имеет вид $y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)$ с параметрами $\alpha=1,5$, $\beta=1,5$.

Ответ: $y=e^{1,5x}\left(C_1\sin 1,5x + C_2\cos 1,5x\right)$.

Образец 19.

Установите соответствие между линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами в левом столбце и соответствующими характеристическими уравнениями из правого столбца.		
$y'' + 4\cdot y' = 0$ $y'' + 4\cdot y = 0$ $y'' + 8\cdot y + 16 = 0$		$k^2 + 4\cdot k = 0$ $k^2 + 4 = 0$ $(k + 4)^2 = 0$

Образец 20.

Для каждого характеристического уравнения расположенного в левом столбце, укажите соответствующее ему линейное однородное дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами из правого столбца.		
$k^2 + 4\cdot k = 0$ $k^2 + 4 = 0$ $(k + 4)^2 = 0$		$y'' + 4\cdot y' = 0$ $y'' + 4\cdot y = 0$ $y'' + 8\cdot y + 16 = 0$

Образец 21.

Для каждого из линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в левом столбце укажите соответствующее ему общее решение из левого столбца.		
$y'' + 4\cdot y' = 0$ $y'' + 4\cdot y = 0$ $y'' + 8\cdot y + 16 = 0$		$y = C_1 + C_2\cdot e^{-4X}$ $(C_1\cdot \cos 2x + C_2\cdot \sin 2x)$ $y = (C_1 + C_2\cdot x)\cdot e^{-4X}$

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	Варианты ответов
1	Общее решение уравнения $y'' - y' - 12y = 0$ имеет вид:	1) $y = e^{-x}(C_1 x + C_2)$; 2) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$; 3) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}$; 4) $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$;
2	Частным решением уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющим условиям $y = 2,\ \ y' = 1$ при $x = 0$, является:	1) $y = 2e^{x}$; 2) $y = e^{x}(2 + x)$; 3) $y = e^{x} + e^{-x}$; 4) $y = e^{x}(2 - x)$;

6. Числовые и степенные ряды

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Первый признак сравнения. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ с неотрицательными членами: Если для всех n, или начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Иначе говоря, *если «больший» ряд сходится, то и «меньший» ряд сходится; если «меньший» ряд расходится, то и «больший» ряд расходится.*

Второй признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \ne 0, \quad L \ne \infty,$ то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ =1+ 1/2+ 1/3+ …+ 1/ n + … – *гармонический ряд,* расходится.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots$ – *обобщенный гармонический ряд.* Расходится при $\alpha \le 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$ =a + a·q+ a·q^2 +… + a·q^n +… *геометрический ряд.* Если |q | < 1 – ряд сходится, если |q | ≥ 1 – расходится.

Зная эти три ряда и признаки сравнения, можно легко решать многие тестовые задачи на сходимость знакопостоянных числовых рядов.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос остается открытым — нужно применять другие признаки.

Признак Даламбера удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы $\left(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\right)$ и степени.

Признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$ существует предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, а при $l = 1$ вопрос остается открытым.

Интегральный признак. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$ не возрастают $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ и существует функция $f(x)$, которая определена на промежутке $\left[1; +\infty\right)$, непрерывна, не возрастает и $a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$ то для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходился.

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{1+2^{2n}}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, который сходится как геометрический ряд со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}<1$. Имеем $\dfrac{2^n}{1+2^{2n}}<\dfrac{2^n}{2^{2n}}=\dfrac{1}{2^n}$ для всех n, значит, на основании первого признака сравнения ряд сходится.

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$. Поскольку $\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$ и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ расходится, то на основании первого признака сравнения заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n^2-3n+5}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{(n^2-3n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=2.$$

Поскольку $2\neq 0$, то на основании второго признака сравнения заключаем, что исследуемый ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$.

Решение. Так как $a_n=\dfrac{n!}{5^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, то $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\,5^n}{5^{n+1}\,n!}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+1)\,5^n}{5^n\cdot 5\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{5}=\infty$. Так как $\infty>1$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим признак Коши, для чего найдем

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\dfrac{e}{3}<1$. Ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши-Маклорена. Заменяя в формуле общего члена $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ число n на переменную x, получаем функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Вычисляем несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^{B}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{B\to+\infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^B =$$

$= \lim\limits_{B\to+\infty}(\ln(\ln B) - \ln(\ln 2)) = \infty$. Интеграл расходится, и, следовательно, исходный числовой ряд также расходится.

Задачи для самостоятельного решения

№	Задание	Варианты ответов
1.	Если n-й член числового ряда $a_n = (-1)^{n-1}(3n+2)$, то сумма $a_4 + a_5$ равна …	1) 2; 2) 3; 3) –31 ; 4) 32; 5) другой ответ.
2.	Найти $(n+1)$-й член a_{n+1} ряда, n-й член которого $a_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$.	1) $\dfrac{3n+3}{2n}$; 2) $\dfrac{3n+4}{2n+1}$; 3) $\dfrac{3n+5}{2n+1}$; 4) $\dfrac{3n+6}{2n+2}$; 5) другой ответ.
3.	Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l$. Укажите верные утверждения: а) если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ остается открытым; в) если $l > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится; с) если $l < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.	1) все утверждения верны; 2) все утверждения неверны; 3) верно только а); 4) верно только в); 5) верно только с).
4.	Написать формулу общего члена ряда $\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{11} + \dfrac{4}{14} + \ldots$.	1) $\dfrac{n}{n+5}$; 2) $\dfrac{n}{5n+1}$; 3) $\dfrac{n}{3n+1}$; 4) $\dfrac{n}{6n-1}$; 5) $\dfrac{n}{3n+2}$.

5	Какие из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+8}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{n^3+4}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}$; являются знакопостоянными?	1) 1, 2, 4, 5; 2) 1, 2, 4; 3) 2, 4, 5; 4) 2, 4; 5) Все.
6	Для каких из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg} n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{5n^2-3}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда?	1) 1, 2, 3, 5; 2) Для всех; 3) 4; 4) 2, 3; 5) 1, 4, 5.
7	Какие из данных рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$ являются сходящимися?	1) Все; 2) 1, 2, 5; 3) 3, 4; 4) 2, 3, 4; 5) 1, 2, 3, 4.
8	Для каких рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n}$ применение признака Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда?	1) Для всех; 2) 1, 2, 5; 3) 2, 3, 4; 4) 1, 5; 5) 2, 3, 5.
9.	С помощью признаков сравнения, установить какие из перечисленных рядов сходятся: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$	1) а); в) 2) все, кроме в) 3) только а) 4) а); г) 5) другой ответ
10.	С помощью интегрального признака установить, какие из перечисленных рядов сходятся: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-6a+13}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$	1) только а) 2) а); в); г) 3) а); в) 4) б); г) 5) все

Знакопеременные ряды

Если среди членов ряда есть как положительные, так и отрицательные числа, то ряд называется *знакопеременным*. Частный случай знакопеременного ряда – *знакочередующийся* ряд $\pm\left(a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots\right)$, где все a_i – положительные числа. Любые два его соседних члена имеют разные знаки. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если *сходится* ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, составленный *из абсолютных величин* членов знакопеременного ряда. Если же ряд, составленный *из абсолютных величин* членов знакопеременного ряда *расходится*, а сам *знакопеременный* ряд *сходится*, то такой знакопеременный ряд называется *условно* сходящимся.

Сходимость знакочередующегося ряда исследуется при помощи **признака Лейбница**: если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда убывают $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то знакочередующийся ряд *сходится* и его сумма не превосходит первого члена ряда, т.е. $S \le a_1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $-1+1/2-1/3+\ldots+(-1)^n/n+\ldots$

Решение. Данный ряд знакочередующийся, $a_n = (-1)^n/n$. Исследуем его на абсолютную и условную сходимости. Составим ряд из абсолютных величин, получим гармонический ряд $1+1/2+1/3+\ldots+1/n+\ldots$. Он расходится, поэтому абсолютной сходимости нет. Возможна условная сходимость, для этого проверим выполнение условий признака Лейбница. Абсолютные величины членов ряда убывают $(1 > 1/2 > 1/3 > \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, следовательно, сам знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: Ряд условно сходится.

Образец 22.

Если $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ - некоторые действительные числа, то среди записей: a) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$; b) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots$; c) $a_1+a_2+\ldots+a_n$; d) $a_1 - a_2+\ldots+a_n+\ldots$; e) $-a_1 - a_2 - \ldots - a_n - \ldots$; числовыми рядами являются:	☐все записи; ☑ все, кроме первых двух; ☐ только запись d); ☐ только запись e); ☐другой ответ.

Решение. Все записи быть не могут, так как записи a), b), c) не являются числовыми рядами. Только записи d) и e) удовлетворяют требованию. Среди возможных ответов такого ответа нет. Поэтому в столбце ответов следует выбрать последнюю строчку: «другой ответ».

Образец 23.

Среди числовых рядов: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2$ сходящимися являются….	☐ только a); ☐ только b); ☐ все; ☐ ни один; ☑ только b) и c).

Решение. Глядя на **n-**ый член каждого ряда и проверяя необходимый признак сходимости **(** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ **),** видим**,** что для рядов a) и d) он не выполняется. Ряд c) сходится условно (см пример выше). Ряд b) **–** геометрический с |q |=1/2, что меньше 1, поэтому он сходится **.** Среди предложенных рядов только ряды b) и c) **–** сходящиеся**.**

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	
1	Формула общего члена ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$ имеет вид… 1) $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$; 2) $a_n=\frac{1}{2n}$; 3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 4) $a_n=-\frac{1}{2^n}$; 5) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$	
2	Какие из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n^4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-n^2}{3^n}$ являются знакочередующимися?	1) Все; 2) 3, 4, 5; 3) 3, 4; 4) 1, 3, 4, 5; 5) 1, 3, 4.
3	Какой из данных рядов сходится условно? $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6n+5}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}$	
4	Сколько слагаемых необходимо взять, чтобы найти сумму ряда $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+\frac{5}{243}-\frac{6}{729}+\frac{7}{2187}-\ldots$ с точностью 0,01?	

Сходимость степенных рядов

Выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$ где $C_1, \ldots, C_n\ldots$ – действительные числа (коэффициенты степенного ряда), x – переменная, $a_n = C_n x^n$ – n-ый (общий) член, называется *степенным рядом.*

Подставив в степенной ряд конкретное значение переменной, например $x=x_0$, получим числовой ряд. Этот ряд может сходиться, а может и расходиться.

Множество D значений переменной x, при которых ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда.

Неотрицательное число R такое, что при $|x|<R$ *ряд сходится*, а при $|x|>R$ – расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ можно найти по формуле Д'Аламбера $R = \lim\limits_{n\to+\infty} (C_n / C_{n+1})$ или Коши $R = 1 \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$.

Из понятия радиуса сходимости ясно, что ряд сходится на интервале $(-R;\ R)$, вне этого интервала – расходится. Интервал (–R; R) называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Для нахождения области сходимости надо дополнительно исследовать сходимость ряда при $x = -R$ и $x = R$.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$.

Решение. Так как $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, то $C_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$. Радиус сходимости R равен: $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} \Big/ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) = 2$. Следовательно, интервал сходимости (– 2; 2).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Подставляя в степенной ряд значение x= –2, получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$, т. е. $1+1+1+1+\cdots$.

Для полученного ряда необходимое условие не выполняется ($\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$). То же самое будет, если подставить в степенной ряд значение x = 2. Получим $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n}$, т.е. $\sum (-1)^n$ – ряд расходится. Проведенное исследование показало: найденный интервал сходимости (–2; 2) одновременно будет и областью сходимости степенного ряда.

Образец 24.

Если a_i – действительные числа, а x – переменная, то среди выражений: a) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^n + \ldots$; b) $-x - x - x - \ldots - x - \ldots$; c) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$; d) $-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - \ldots$. степенными рядами являются ….	☐ все; ☑ ни одно; ☐ только с); ☐ другой ответ.

Решение. а) и d) – числовые ряды. Оставшихся два ряда, - функциональные, но не степенные, так как составлены из функций, не являющимися целыми положительными степенями переменной ***x*.** Поэтому правильный ответ: ни одно из предложенных выражений не является степенным рядом.

Образец 25.

Если $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$ – степенной ряд, то его радиус сходимости равен… 1) ∞; 2) 5; 3)1; 4) 0,2; 5) 0.	☐ ∞; ☐ 2; ☐ 1; ☑ 0,2;

Решение. $C_n = \frac{5^n}{\sqrt{n}}$, $C_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{1}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

№	Задание	Варианты ответов
1	Найти длину интервала сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
2	Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-6)^n$ равен 2. Найти интервал сходимости.	1) (0; 2); 2) (–2; 2); 3) (–1; 1); 4) (4; 8); 5) (2; 6).
3	Вычислить приближенно значение выражения $1000\cdot\cos 0,5$, ограничиваясь суммой первых двух членов ряда Маклорена для функции $\cos x$.	1) 500; 2) $\frac{1000\pi}{3}$; 3) 1125; 4) 1000; 5) 875.
4	Среди рядов 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-5)^n}{n^4}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+5)^{n+1}}{n!}$;5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{n^3}$ степенными являются ….	1) 2, 3, 4; 2) Все; 3) 1, 3, 4; 4) 2, 3; 5) 2, 3, 4, 5.

Утверждено на заседании кафедры, протокол № 9 от 12.04.2013 г.

Зав. кафедрой Дымков М.П.