ОСОБЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНДЕКСНЫХ ФОРМУЛ

С.С. Захорошко,
кандидат экономических наук, доцент, зав. кафедрой социально-гуманитарных дисциплин Гродненского филиала Института правоведения

Индексные формулы возникли в связи с потребностью вычисления некоего универсального показателя (индексного числа), который бы давал обобщенную характеристику сложных экономических явлений. Измерить, сравнить и обобщить элементы, входящие в состав сложного экономического явления – архисложная задача. Эта идея занимает умы многих выдающихся ученых уже более 400 лет, поскольку процесс конструирования индексов весьма притягателен и сравним разве что с конструированием вечного двигателя или поиском философского камня.

Индексные вычисления и первые индексные формулы возникли задолго до появления основ индексного метода. Первым, вероятно, был английский экономист Томас Ман, опубликовавший в 1609 г. в работе «Рассуждения о торговле Англии с Ост-Индией» [4] агрегатные индексы с фиксированными величинами[1].

Интенсивное развитие капитализма в 18–19 вв. выдвинуло на передний план необходимость измерения изменений покупательной способности денег. К решению этой проблемы подключились многие ведущие ученые Европы. Первыми теоретиками индексного метода можно считать У.С. Джевонса, Э. Ласпейреса, М.В. Дробиша, Г. Пааше.

Исторически индексы возникли как относительные обобщающие показатели, характеризующие динамику цен по разным группам товаров. Все исследователи раннего периода, начиная с Б. Флитвуда, Ш. Дюто и заканчивая Э. Ласпейресом, М.В. Дробишем и Г. Паше, строили прежде всего индексы цен. Развитие капитализма, нестабильность экономик разных стран, изменение цен привели к необходимости вычисления универсальных показателей, характеризующих состояние рынка. При этом требовался убедительный показатель, отражающий изменение комплекса цен некоторой группы товаров, выраженных в разнородных единицах измерения. Таким показателем стал индекс цен, который выражал относительные изменения уровня цен.

Появление агрегатной формы расширило рамки понимания индекса, а также позволило строить новые виды индексов. Используя агрегатную форму, Э. Ласпейрес выдвинул экономическую интерпретацию индекса цен.

Новый толчок к развитию индексная теория получила в период экономического кризиса 20–30-х годов 20 в. Рост цен привел к необходимости совершенствования процедур исчисления индексов цен. В короткий период появился ряд фундаментальных работ, развивавших новые направления в индексологии. Выдающийся вклад в развитие индексного метода внес американский экономист и статистик И. Фишер, разработавший тестовую теорию оценки индексов [6].

В 20–30-х годах прошлого века были сформулированы важнейшие принципы советской индексологии. В 1918 г. С.Г. Струмилин построил первый советский агрегатный индекс. Затем, спустя десятилетие, выходят статьи В.Н. Старовского, Н.М. Виноградовой, обосновывающие отдельные стороны индексной методологии. Отечественная статистика получает научную основу.

Значительный вклад в развитие индексного метода внес В.Н. Старовский. Он всесторонне обосновал математическую форму и экономический смысл агрегатного индекса. Ученый отмечал, что за каждым индексом стоят определенные экономические явления и категории. Он считал агрегатный индекс основной формой любого экономического индекса.

В 1929 г. В.Н. Старовский доказал, что итоговые агрегатные индексы можно разложить на произведения факторных индексов-сомножителей. Он рекомендовал брать веса фактор-

[1] Ковалевский Г.В. в [4] доказал, что Т. Ман предложил известную формулу (8) задолго до Г. Пааше, а русский ученый Федор Вирст вывел не менее известную формулу (7) раньше Э. Ласпейреса.

ных индексов-сомножителей на разных уровнях: в одном индексе – на отчетном, в другом – на базисном [5]. Такой подход позволил перейти к практическому построению систем взаимосвязанных индексов.

Развивая идеи В.Н. Старовского, И.Ю. Писарев в 1936 г. в аналитических целях разлагает индекс издержек обращения в торговле на три индекса: затраты труда, материальные издержки и услуги других отраслей. Так в советской статистике возникает индексный метод факторного анализа.

В послевоенный период советские статистики постепенно переходят к многофакторному индексному анализу. Пионерами многофакторных индексных расчетов стали В.Е. Адамов, Г.И. Бакланов, А.И. Ежов, У.И. Мересте.

С конца 30-х и до начала 80-х годов прошлого столетия в отечественной индексологии активно велась полемика между сторонниками синтетической и приверженцами аналитической концепции индексов. После работ Г.В. Ковалевского и В.Е. Андриенко в отечественной индексологии в течение примерно четверти века царит застой.

От истории перейдем непосредственно к анализу некоторых особенностей и недостатков формул индексов. Прежде всего, остановимся на наиболее важных формулах, играющих ведущую роль в индексологии.

Начнем с простых, невзвешенных формул. В литературе их называют блоком формул аддитивной конструкции[2].

Простой арифметический индекс имеет вид:

$$I_p = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0}}{n} = \frac{\sum i_p}{n}, \qquad (1)$$

где i_p – индивидуальные индексы;

n – количество индивидуальных индексов.

Приведенная формула имела практическое применение, в частности по ней вычислялись индексы в дореволюционной России. Недостатком формулы является равновзвешивание, при котором все индивидуальные индексы получают одинаковый удельный вес. Это хорошо видно, если преобразовать формулу следующим образом:

$$I_p = \frac{\sum i_p}{n} = \sum (i_p \frac{1}{n}) = \sum (i_p d), \qquad \textbf{(2)}$$

где d – одинаковый удельный вес $\left(\frac{1}{n}\right)$.

При такой конструкции индекса, например, нынешнее повышение мировых цен на нефть на 53% уравновесится снижением на 53% цен на пуговицы, хотя реальное значение этих товаров в общей динамике цен несравнимо.

В связи с необходимостью взвешивания И. Фишер писал: «... различные товары очень отличны по своей важности и значению. ...стремление к уточнению результатов приводит к взвешиванию. А. Юнг, например, считал ячмень вдвое важнее шерсти, угля и железа, а товарам, которые он называл провизией, придавал вес четыре...» [6. С. 36]. Однако такая субъективная система взвешивания (в баллах) лишь запутывала проблему. Правильная система взвешивания, построенная на действительных весах, стала применяться через 50 лет во взвешенных формулах.

Простой гармонический индекс

$$I_p = \frac{n}{\sum \frac{p_1}{p_0}} \qquad (3)$$

в теоретическом смысле имеет тот же недостаток, что и среднеарифметический, к тому же эта формула на практике никогда не используется. Экономический смысл этой формулы весьма туманный. Анализ, проведенный автором, показал, что среди простых и взвешенных индексов эта формула дает наименьшее индексное число.

Следующая формула, простой агрегатный индекс, – это хорошо известный индекс Дюто. Формула простого агрегатного индекса имеет вид:

$$I_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0}. \qquad \textbf{(4)}$$

Фишер назвал ее причудливой, поскольку в ряде случаев, в зависимости от индивидуальных особенностей используемого примера, она давала неожиданные результаты. Главный недостаток этой формулы – самовзвешивание. Эта слабая сторона формулы хорошо видна, если преобразовать ее следующим образом:

---

[2] П. Кевеш в [2] именует их блоком формул первой генерации. Затем следуют формулы второй и третьей генерации.

$$I_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} = \frac{\sum(\frac{p_1}{p_0} p_0)}{\sum p_0}. \quad (5)$$

Здесь слагаемые элементы самовзвешиваются в соответствии со своим базисным значением. Величины с большим численным значением получают больший удельный вес, и, тем самым, индексное число завышается. Величины с меньшим численным значением имеют меньший удельный вес, и в результате индексное число занижается. Ложная система взвешивания вычеркнула эту формулу из сферы практического применения.

Простой геометрический индекс имеет славную историю.

$$I_p = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{p_1}{p_0}} . \quad (6)$$

Невзвешенный геометрический индекс был венцом стохастической теории У.С. Джевонса. Да и И. Фишер считал, что он «действительно заслуживает наибольшего внимания по сравнению с остальными типами простых средних» [6. С. 30]. По мнению У.С. Джевонса, поскольку средняя геометрическая занимает промежуточное положение между средней арифметической и средней гармонической, то, следовательно, геометрический индекс дает более точное индексное число. Современная статистика, опираясь на правило мажорантности средних величин ($\overline{X}_{гарм} \le \overline{X}_{геом} \le \overline{X}_{арифм} \le \overline{X}_{квадр} \le \overline{X}_{куб}$), опровергает данный подход, поскольку срединное положение занимает $\overline{X}_{арифм}$, а не $\overline{X}_{геом}$.

Кроме того, еще Э. Ласпейрес доказал, что, во-первых, данный индекс может вообще не реагировать на изменение цен, если произведение индивидуальных индексов равно единице, во-вторых, геометрический индекс не несет в себе реального экономического смысла. Следовательно, поскольку в простом геометрическом индексе также не учитываются веса, следует отвергнуть и эту формулу.

Далее несколько особняком стоят позиционные средние. И это не случайно, индексы моды и медианы являются слабыми в теоретическом и практическом плане:

m_0 – типичное (наиболее часто встречаемое) $\frac{p_1}{p_0}$,

m_e – срединное $\frac{p_1}{p_0}$.

С тех пор как их проанализировал И. Фишер, другими исследователями они просто игнорировались. Тем не менее с позиций тестов Фишера медиана являются хорошей формулой, так как удовлетворяет тестам обратимости во времени и обратимости факторов. По мнению И. Фишера, медиана (по крайней мере, взвешенная) нередко дает хорошее индексное число. Вместе с тем практические способы вычисления моды и медианы напоминают методы алхимии и пугают своей поверхностностью, а формулы не несут в себе реального экономического смысла.

Далее следуют формулы второй генерации: агрегатная форма, взвешенные формулы.

Сложная агрегатная форма представлена, например, индексами Э. Ласпейреса (Вирста) (7) и Г. Пааше (Мана) (8):

$$I_L = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}, \quad (7)$$

$$I_P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}. \quad (8)$$

Скрещивание и отбор формул, проведенные И. Фишером, показал, что взвешенные индексы приводят к более правильным числовым результатам. Взвешенные формулы, в отличие от невзвешенных, теснее связаны с экономическим содержанием, ввиду того что данные, используемые в них, включают оба фактора, образующих стоимость $v = q \cdot p$. Агрегатная форма легко интерпретируется и, обладая ясным экономическим содержанием, позволяет проводить разносторонний анализ.

Арифметический взвешенный индекс является производным от агрегатной формы:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}. \text{ Если } i_p = \frac{p_1}{p_0}, \text{ то } p_1 = i_p \cdot p_0, \quad (9)$$

$$\text{тогда } I_p = \frac{\sum i_p p_0 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Преобразование агрегатной формулы индекса цен в арифметическую провел М.В. Дробиш в 1871 г. Сейчас мы уже знаем, что аналогичные тождества соблюдаются и для всех остальных индексов. Агрегатная и среднеарифметическая формы дают одинаковое индексное число. В агрегатной форме применяется традиционная индексная методология, а в других формах индексов она часто подменяется методологией средних величин (арифметической, геометрической или гармонической). Но, различаясь по форме, арифметические и агрегатные индексы сходны по существу.

Одним из показателей качества индексных формул является дисперсия. Чем меньше дисперсия, тем лучше формула. У взвешенных формул, как показал П. Кевеш в [2], она ниже, чем у невзвешенных.

Еще одним преимуществом взвешенных формул является простота вычислений и отсутствие затруднений, связанных со сбором необходимых данных. Как видно, взвешенные формулы предпочтительнее невзвешенных. Поэтому в практике исчисления индексов используются преимущественно формулы Ласпейреса (Вирста) и Пааше (Мана), имеющие аддитивную конструкцию.

Иногда в экономических расчетах применяется средний гармонический взвешенный индекс:

$$I_p = \frac{\Sigma h}{\Sigma \frac{h}{i_p}}, \qquad (10)$$

где h – сумма реализации (p_1q_1).

Приведенная формула не нашла широкого применения. Она используется тогда, когда невозможно выполнить расчеты по формулам взвешенных агрегатных или арифметических индексов ввиду отсутствия данных за базисный период. Преобразуем формулу, чтобы убедиться в этом:

$$I_p = \frac{\Sigma h}{\Sigma \frac{h}{i_p}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma (\frac{p_0}{p_1} p_1 q_1)}. \qquad (11)$$

И. Фишер, характеризуя свойства индексных формул, обращал внимание на три признака: ошибочность, смещение, причудливость. Ошибочные формулы не соответствуют тестам обратимости во времени и обратимости факторов. Среди проанализированных формул нет ошибочных, многие ведут себя причудливым образом и практически все имеют смещение.

Соглашаясь с положительными свойствами взвешенных формул, следует отметить, что они, тем не менее, не дают правильного результата.

П. Кевеш в [2] выявил интересную закономерность. Невзвешенные формулы, как правило, дают большее индексное число, чем взвешенные. Так, простая средняя больше, чем взвешенный индекс Ласпейреса (Вирста) (в 1,049 раза), а простой гармонический индекс больше взвешенного индекса Пааше (Мана) (в 1,091 раза). Простая медиана больше взвешенной в 1,119 раза. Причем данная тенденция проявляется вне зависимости от индивидуальных особенностей используемого примера. П. Кевеш не раскрывает причины этого. Между тем полученные автором результаты легко объяснить: более сложные формулы дают большее усреднение.

Следует отметить, что открытие более сложных формул не обязательно приводит к отказу от простых. Например, некоторые невзвешенные формулы применяются при вычислении взвешенных индексов так называемых репрезентативных групп.

Третий блок формул включает взвешенные позиционные средние и скрещенные аддитивные и мультипликативные средние. Например, такие, как «идеальная» формула Фишера:

$$I_p = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}. \qquad (12)$$

«Идеальная» формула Фишера представляет собой среднюю геометрическую из индексов Ласпейреса (Мана) и Пааше (Вирста)[3]. На протяжении более 80 лет различные рецензенты ее защищали, критиковали или сурово подвергали нападкам. Вначале было больше критики. Формулу считали искусственной, абстрактной. В последние десятилетия в отношении к формуле, наоборот, больше позитива. Например, П. Кевеш полагает, что экономическое содержание формулы Фишера лучше, чем формул Ласпейреса (Мана) и Пааше (Вирста). Р. Аллен в [1] вообще считает ее «идеальным» звеном, которое мы ищем», и строит на ее основе свою индексную концепцию. Между тем геометрическая форма индексов имеет два серьезных недостатка: она

[3] История свидетельствует, что «идеальная» формула Фишера изобретена не им, а Боули в 1899 г Формула стала «идеальной» формулой Фишера в 1921 г в связи с ошибкой Персонса Между тем И Фишер настолько всесторонне исследовал 134 формулы, что формула стала ассоциироваться с его именем

лишена конкретного экономического содержания, поскольку ее нельзя представить как отношение двух экономически осмысленных величин; по «идеальной» формуле нельзя вычислить абсолютные приросты стоимости, обусловленные движением цен и изменением объема продукции. То есть разность между числителем и знаменателем «идеального» индекса не покажет никакой реальной экономии (или потерь) потребителей из-за изменения уровня цен.

Кроме «идеальной» формулы, третий блок индексов представлен группой более абстрактных математических средних, имеющих аддитивную конструкцию, и мультипликативными формулами. Несмотря на то, что вычисления по этим формулам дают неплохие индексные числа, они, как правило, не применяются по соображениям практического и теоретического характера. Во-первых, вычисления по формулам третьей группы более сложные и громоздкие, чем по формулам взвешенных средних. Во-вторых, возникают дополнительные трудности, связанные со сбором необходимых данных. В третьих, формулы с трудом поддаются экономической интерпретации и не позволяют выполнять одновременно с вычислением индексов некоторые другие вычисления (например, составление балансов).

Кроме того, недостатком формул третьей генерации является абстрактный математический подход. Взвешенные средние аддитивной структуры имеют в своей основе все-таки более точные алгебраические методы.

В теории индексов поражает, прежде всего, обилие формул, предлагаемых для решения совершенно одинаковых задач. Приблизительный подсчет показывает, что для измерения динамики цен в разное время предлагалось более 150 различных формул. Первыми были невзвешенные индексы Флитвуда, Дюто, Карли, геометрический индекс Джевонса. Затем последовали среднеарифметические взвешенные индексы Юнга, Дробиша, формулы Эджуорта, Уолша, Гиффена, «идеальный» индекс Фишера. В середине прошлого столетия получили известность индексы Ф. Дивизиа, К. Джини, Дж. Монтгомери, Л. Торнквиста. И, наконец, в последние десятилетия ведущие индексологи мира сконструировали еще несколько десятков формул, среди которых наибольшую известность имеют: индекс французского экономиста Г. Дюона, «наилучший» линейный индекс Г. Тейла, «чистый» индекс американского экономиста К. Банерджи, индекс финского статистика Ю. Вартиа и «натуральный» индекс А. Фогта.

Понятно, что одно и тоже явление не может быть правильно отражено сотнями разных формул, поскольку это противоречит элементарной логике. Безусловно, для расчета индексов цен и продукции должна существовать для каждого случая лишь одна всесторонне обоснованная, стандартная формула.

Таким образом, на сегодняшний день нет «идеальной», «наилучшей» или «истинной» формулы. Самые хорошие формулы дают вполне приемлемый результат, они в большей или меньшей степени связаны с экономическим содержанием, но не более того. Простые невзвешенные формулы в большинстве случаев не дают правильного числового результата, поскольку в них не включены веса факторов. Формулы второй генерации (взвешенные) в большей степени связаны с экономическим содержанием, чем первой и третьей. В этой группе следует предпочесть агрегатную форму, поскольку в ней соблюдается традиционная индексная методология, а в других формах она подменяется методологией средних величин (арифметической или гармонической). Однако, как показал анализ, и взвешенная агрегатная форма не дает правильного числового результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аллен Р.* Экономические индексы / Пер. с англ. М.: Статистика, 1980.

2. *Кевеш П.* Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990.

3. *Ковалевский Г.В.* О первых индексных расчетах // Вестник статистики. 1976. № 9.

4. *Ман Т.* Рассуждение о торговле Англии с Ост-Индией. Лондон, 1609 // Меркантилизм. Л.: Соцэкгиз, 1935.

5. *Старовский В.Н.* О математическом оформлении индексных показателей // Вестник статистики. 1929. № 3–4.

6. *Фишер И.* Построение индексов / Пер. с англ. М.: Изд-во ЦСУ СССР, 1928.