

G. Chitaya
S. Pental
BSEU (Minsk)

THE OPTIMIZATION OF TIMETABLE GROCERY OF THE STORE CASHIER

The article discusses the formulation of the problem of optimal timetable of cashiers in the large supermarket. The problems of implementation of algorithmic mathematical models containing different kinds of restrictions that lead to the optimization problems of class NP-dimensionality was analysed. Built optimization model of schedules of small grocery store in the approximation to reality a set of economic conditions. The optimal schedule obtained by algorithmization problem among software MatLab.

Keywords: schedule; NP-complete; optimization; dimension; optimal schedule; schedule in shifts; algorithm for solving; trade Organization; optimality criterion; optimization model; limitations of the model.

Г. О. Читая
С. В. Пенталь
БГЭУ (Минск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАФИКА РАБОТЫ КАССИРОВ ПРОДОВОЛЬСТВЕННОГО МАГАЗИНА

В статье рассматривается задача составления оптимального расписания работы кассиров крупного супермаркета. Анализируются проблемы алгоритмической реализации математических моделей, содержащих различные виды ограничений, приводящих к оптимизационным задачам класса NP-размерности. Построена оптимизационная модель расписания малого продовольственного магазина в рамках приближенного к действительности набора экономических условий. Оптимальный график получен на основе алгоритмизации задачи в среде программного продукта MatLab.

Ключевые слова: график работы; NP-полная задача; оптимизация; размерность; оптимальное расписание; расписание по сменам; алгоритм решения; торговая организация; критерий оптимальности; оптимизационная модель; ограничения модели.

Введение

Большинство торговых организаций функционирует в условиях неравномерной нагрузки, что может быть обусловлено сезонностью, резким ростом объемов продаж в предпраздничные дни, наплывом покупателей в определенное время. В организациях с обширной торговой сетью (супермаркетах) возникает проблема обеспечения необходимого количества работающих касс, а соответственно и кассиров. Если кассиров будет недостаточно, то это приведет к формированию очередей, что неизбежно ведет к потере покупателей. В то же время если количество кассиров будет превышать необходимое число, то это приведет к дополнительным расходам, связанным с оплатой работы избыточной численности работников.

Чтобы увеличить свою экономическую эффективность за счет снижения расходов на оплату труда кассиров, у торговых организаций возникает необходимость составления оптимального расписания.

Постановка задачи построения оптимального графика работы кассиров

Задача составления оптимального графика работы персонала торговой организации в кассах — это задача по составлению расписания комбинаторного типа, характерной особенностью которой являются огромная размерность и большое число ограничений сложной формы.

Для математического моделирования процесса составления гибких графиков, в некотором упрощенном виде (с неполным учетом множества ограничений), предварительные численные данные формируются на основе количества кассиров, доступных рабочих мест (касс) и прогноза потока покупателей. Результаты длительного наблюдения за потоком покупателей в супермаркетах подтверждают выполнение гипотезы его устойчивости на нескольких временных интервалах в течение суток. Другими словами, в эти промежутки времени численность покупателей будет постоянной. Важность соблюдения этой гипотезы состоит в том, что появляется возможность более точно определить временное разбиение суток и для каждого такого промежутка установить среднюю численность работников.

Одна из математических моделей формирования графика (календарного плана) работы персонала на предстоящий период (неделя, месяц, квартал), включающая заранее определенное число ограничений и иллюстрирующая большую размерность оптимизационной задачи, может быть построена в изложенном ниже порядке [1].

Необходимо составить график работы касс супермаркета для N сотрудников, которые работают в три смены ($k = 1, 3$). Пусть количество суток в рассматриваемом периоде будет равно m , тогда конкретные сутки будут обозначаться $j = \overline{1, m}$. Разделим сутки на T элементарных временных интервалов ($t = \overline{1, T}$). Введем переменную x_{ijk} следующего содержания:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник назначен на } k\text{-ю смену } j\text{-х суток,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответственно целевая функция, выражающая минимальное количество работников, необходимое на рассматриваемый период, примет вид

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N x_{ijk} \rightarrow \min.$$

Существенным ограничением может выступить назначение работника в определенные смены (работник в отпуске, на больничном и т.п.). Для этого правомерно ввести новую переменную

$$r_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник может работать в } k\text{-ю смену } j\text{-х суток,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зная минимально необходимое количество кассиров на смену N_{kj}^{\min} , получим ограничение

$$\sum_{i=1}^N r_{ijk} x_{ijk} \geq N_{kj}^{\min}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для каждого временного промежутка $t = \overline{1, T}$ необходимо указать, какой смене он принадлежит. Для этого введем в рассмотрение матрицу A , элементы которой равны

$$a_{kt} = \begin{cases} 1, & \text{если } t\text{-й временной промежуток выпал на } k\text{-ю смену,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для оптимальной работы организации необходимо, чтобы для каждого временного промежутка количество работников было не меньше заданной величины N_{tj}^{\min} . В случае слишком большого количества работников организация понесет дополнительные убытки. Поэтому количество одновременно работающих кассиров не должно превосходить заданной величины N_{tj}^{\max} . Следовательно, можем записать ограничение на количество одновременно работающих сотрудников в момент t

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N a_{kt} x_{ijk} \leq N_{tj}^{\max}, \quad t = \overline{1, T}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N a_{kt} x_{ijk} \geq N_{tj}^{\min}, \quad t = \overline{1, T}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Введем для каждого работника ограничение на количество смен в сутки (согласно нормативным документам не более одной в сутки)

$$\sum_{k=1}^3 x_{ijk} \leq 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Также следует учесть, что в одни сутки работник может работать только в одну из k смен и если в j -е сутки он работал в третью смену, то на $j + 1$ -е сутки он не может работать в первую смену

$$\sum_{k=1}^3 x_{ijk} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$x_{ij3} + x_{ij+1,1} \leq 1; \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тип задачи в описанной модели относится к NP-полной задаче [2]. Иногда возникшую NP-полную задачу приходится решать. В таком случае, во-первых, возможно сократить полный перебор так, что алгоритм, оставаясь в худшем случае экспоненциальным, будет работать за приемлемое время на реальных данных. Во-вторых, неточное решение, а некоторое приближение к нему может оказаться удовлетворительным. Алгоритмы, дающие такие решения, называются приближенными.

Существуют методы решения таких задач, в соответствии с которыми могут создаваться алгоритмы.

1. Метод ветвей и границ, который состоит в отбрасывании заведомо неоптимальных решений целыми классами в соответствии с некоторой оценкой. Идея метода состоит в разбиении решаемой задачи на множество всех возможных вариантов и построении оценок для них. В результате отбрасываются решения целыми классами, если их оценка хуже некоторого порогового значения.

2. Метод локальных улучшений состоит в поиске локального оптимального решения в окрестности некоторого текущего решения. Идея этого метода заключается в том, что для каждого решения задачи определяется окрестность близких решений и на каждой итерации вычислительного процесса при заданном текущем решении делается попытка найти в его окрестности решение, которое имело бы лучшее значение целевой функции. Если такое решение удастся найти, оно само становится текущим решением, если нет — поиск заканчивается.

3. Приближенные и эвристические методы состоят в применении эвристик для выбора элементов решения. Под эвристическими понимают такие методы, правильность которых для всех возможных случаев не доказана, но про них известно, что они дают достаточно хорошие решение в большинстве случаев. Эвристические методы разнооб-

разны, поэтому нельзя описать какую-то общую схему их разработки. Чаще всего они применяются совместно с методами перебора для сокращения числа проверяемых вариантов.

4. Псевдополиномиальные алгоритмы представляют собой подкласс динамического программирования. Фактически это полиномиальный алгоритм, проявляющий экспоненциальный характер только при очень больших значениях числовых параметров. Такие алгоритмы очень полезны, так как позволяют точно решать задачи с маленькими числами и приближенно для больших чисел, каким-либо образом преобразованных в маленькие.

При разработке алгоритмов составления графика работы персонала торговой организации особое внимание уделяется проблеме создания универсальных алгоритмов, учитывающих специфику условий конкретной задачи. Особенностью таких алгоритмов должно быть наличие возможности без существенного их изменения включать и исключать определенные требования. На данный момент не существует единственного универсального алгоритма, поэтому наиболее часто для составления оптимального графика работы персонала используют не один конкретный алгоритм, а комбинацию нескольких.

Модель оптимизации численности кассиров малого продовольственного магазина и построение графика

Все чаще торговые организации задаются вопросом: как увеличить прибыль? Существует множество способов увеличения прибыли: рост выручки за счет привлечения клиентов с помощью маркетинговых акций, увеличение объемов закупок у одного поставщика с целью снижения закупочных цен, создание искусственной конкуренции между поставщиками с целью получения дополнительных скидок и многое другое.

В настоящее время одним из распространенных способов сокращения издержек является сокращение расходов на персонал, в том числе на численность привлекаемых к работе кассиров, так как затраты на персонал формируют одну из существенных статей расходов. Зачастую менеджмент торговых компаний принимает этот способ в качестве приоритетного в сокращении своих издержек. В частности, в системе мотивации персонала применяются штрафы за опоздания, депремирование за несоблюдение корпоративного дресс-кода, вычеты за обращения покупателей с нареканиями или жалобами и т.д. Вследствие данных мер руководители сталкиваются с негативными последствиями: потеря лояльности персонала магазина, большая текучесть кадров и др. Причем чаще происходит так, что покидает работу наиболее квалифицированный, подготовленный и опытный персонал, так как их высокий уровень квалификации позволит легко найти работу в другом месте.

Оптимизация затрат на персонал возможна в рамках реализации двух способов: оптимизация процессов с сокращением персонала при сохранении эффективности работы или оптимизация процессов без сокращения персонала при увеличении эффективности работы. Очевидно, что в социальном плане более привлекателен второй вариант.

Рассмотрим задачу составления графика (расписания) работы кассиров реально функционирующего продовольственного магазина, предварительно упростив предъявляемые требования. А именно построим математическую модель определения графика работы 10 кассиров в 3 смены на предстоящие 4 недели (28 суток). В течение суток у каждого кассира не может быть больше одной рабочей смены, а в неделю — не более 5 смен. Количество касс равно 3.

Введем переменную x_{ijt}

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник работает } k\text{-ю смену } j\text{-х суток,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда целевая функция, выражающая минимальное количество работников, необходимое на рассматриваемый период, примет вид

$$\sum_{j=1}^{28} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^{10} x_{ijk} \rightarrow \min.$$

Сохранение привлекательности магазина для покупателей и обеспечение высокой суточной выручки требует определения оптимального количества работающих касс. С использованием статистических данных о входящем потоке покупателей появляется возможность определить минимальное и максимальное количество работающих в сутки. Опыт работы моделируемого магазина показывает $N_{\min} = 2$, $N_{\max} = 3$, что соответствует минимальному и максимальному количеству кассиров в смену для эффективной работы магазина. Следовательно, можно записать ограничение на количество одновременно работающих сотрудников в сутки

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ijk} \leq 3, \quad j = \overline{1, 28}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ijk} \geq 2, \quad j = \overline{1, 28}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Учитывая, что в сутки работник должен отработать не более одной смены, а в неделю — не более 5, получим следующие ограничения:

$$\sum_{k=1}^3 x_{ijk} \leq 1, \quad i = \overline{1, 10}, \quad j = \overline{1, 28},$$

$$\sum_{j=1+7(w-1)}^{7w} \sum_{k=1}^3 x_{ijk} \leq 5, \quad i = \overline{1, 10}, \quad w = \overline{1, 4}.$$

Величина w показывает номера недель, так как мы рассматриваем 28 суток и 7-дневную рабочую неделю, то получается всего 4 недели.

Решение данной задачи позволит составить расписание на месяц для 10 сотрудников, которые работают в 3 смены. Стоит отметить, что здесь учтены далеко не все существующие ограничения, а предпринята попытка приблизиться к реальным условиям. Вместе с тем получается задача большой размерности: количество переменных равно 840, а количество ограничений — 488.

Для решения задачи воспользуемся отмеченными в первом разделе статьи приближенными и эвристическими методами, получившими алгоритмическую реализацию в среде MatLab.

В табл. 1 представлено оптимальное расписание работы кассиров реально функционирующего продовольственного мини-маркета за период 01.06.2015—28.06.2015 г.

Таблица 1. Распределение кассиров на предстоящий четырехнедельный период

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Итого		
	Пн	Вт	Ср	Чг	Пг	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чг	Пг	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чг	Пг	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чг	Пг	Сб	Вс			
С. 10	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
С. 9	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 8			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 7	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 6		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 2		1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
С. 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
Итого	6	7	7	7	8	9	6	7	7	7	8	8	7	6	8	8	7	6	7	6	7	8	7	8	6	7	7	8	7	200	

Источник: составлено авторами.

Из графика распределения сотрудников по дням видно, что потребность в них варьируется от 6 до 9 человек в сутки с преобладающей необходимостью в 8 человек. При этом на протяжении месяца выработка по общему количеству смен равна у всех сотрудников 20, что не противоречит поставленному условию.

Рассмотрение оптимизационных расчетов по построенной модели позволяет провести анализ выполнения требования о количестве работающих касс. По условию, чтобы удовлетворить поток покупателей, необходимо, чтобы в каждую смену работало от 2 до 3 касс. Данные табл. 2 отображают график работы сотрудников посменно, согласно которому на протяжении 28 суток в разные смены постоянно имеется 2 работающие кассы. Также следует указать на отдельные численные данные посменной работы кассиров, которые выглядят нереалистично. Так, например, сотрудник 9 работает 7 июня во вторую смену, т. е. с 16.00 до 01.00. А на следующий день (8 июня) ему необходимо быть на работе с 01.00 до 09.00, т.е. фактически он работает 2 смены подряд, хотя конфликта с количеством смен в сутки не наблюдается. Это свидетельствует о качестве математической модели, которая лишь претендует на приближение к действительности, а не является полноценной.

Таблица 2. Посменный график работы кассиров на предстоящий четырехнедельный период

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
С. 10	16-01		8-17		16-01	01-09		01-09	16-01		8-17	16-01	01-09	
кассир	1		1		1	1	1		1	1		1	1	1
С. 9	8-17			8-17	16-01	01-09	8-17	16-01						01-09
кассир	1			1	1	1	1	1	1	1	1			1
С. 8			01-09	8-17	01-09	8-17		01-09	8-17					16-01
кассир			1	1	1	1	1		1	1	1			1
С. 7	01-09	16-01		16-01	8-17			16-01	8-17				16-01	8-17
кассир	1	1		1	1	1			1	1	1		1	1
С. 6		8-17			16-01	8-17	16-01	8-17	01-09	16-01		01-09	8-17	
кассир		1	1		1	1	1	1	1	1		1	1	
С. 5	8-17	01-09	16-01		01-09	8-17		16-01		16-01	01-09	16-01	8-17	
кассир	1	1	1		1	1		1		1	1	1	1	
С. 4	01-09	16-01			01-09			16-01		01-09	16-01	8-17	16-01	
кассир	1	1	1	1		1			1		1	1	1	1
С. 3		01-09	16-01	01-09		01-09	8-17	01-09		01-09	16-01	01-09		
кассир		1	1	1		1	1	1		1	1	1	1	
С. 2		16-01		16-01	01-09	16-01	01-09	16-01	01-09		16-01	01-09		
кассир		1		1	1	1	1	1	1		1	1	1	
С. 1	16-01	8-17	01-09		16-01			01-09	8-17		16-01	01-09		8-17
кассир	1	1	1	1	1			1	1		1	1		1
Итого	6	7	7	7	8	9	6	7	7	7	8	8	7	6

	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
С. 10	01-09		8-17		01-09		01-09		01-09		16-01	01-09	8-17	
кассир	1		1	1	1		1		1		1	1	1	1
С. 9		8-17		16-01				01-09	16-01	8-17			01-09	
кассир		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	
С. 8		01-09		01-09	8-17			16-01		01-09			16-01	8-17
кассир		1		1	1	1	1	1		1	1		1	1
С. 7	16-01	01-09				16-01	8-17	8-17		16-01		8-17	01-09	
кассир	1	1	1			1	1	1		1		1	1	1
С. 6	16-01		01-09		8-17	16-01			01-09	8-17			16-01	
кассир	1		1		1	1	1		1	1	1		1	1
С. 5	8-17			01-09					01-09	8-17		01-09	8-17	
кассир	1	1	1	1	1			1	1		1	1	1	
С. 4	8-17	16-01		16-01		01-09	8-17	8-17		8-17		16-01	8-17	01-09
кассир	1	1		1		1	1	1		1		1	1	1
С. 3	01-09			8-17		8-17	16-01	01-09	16-01			16-01		16-01
кассир	1	1		1		1	1	1	1	1		1		1
С. 2	16-01				8-17	01-09		8-17	16-01	01-09	16-01			01-09
кассир	1	1	1		1	1		1	1	1	1			1
С. 1	01-09	8-17	01-09		16-01		16-01		16-01	01-09	8-17	16-01		8-17
кассир	1	1	1		1		1		1	1	1	1		1
Итого	8	8	7	6	7	6	8	7	7	8	6	7	7	8

Источник: составлено авторами.

В соответствии с полученным оптимальным решением все кассиры выполнили в полном объеме нагрузку на неделю — они отработали по 5 смен (табл. 3).

Таблица 3. Количество обрабатываемых смен на предстоящие недели

Сотрудник	01.06.2015— 07.06.2015	08.06.2015— 14.06.2015	16.06.2015— 21.06.2015	22.06.2015— 28.06.2015	Итого
1	2	3	4	5	6
Сотрудник 10	5	5	5	5	20
Сотрудник 9	5	5	5	5	20
Сотрудник 8	5	5	5	5	20
Сотрудник 7	5	5	5	5	20
Сотрудник 6	5	5	5	5	20
Сотрудник 5	5	5	5	5	20

1	2	3	4	5	6
Сотрудник 4	5	5	5	5	20
Сотрудник 3	5	5	5	5	20
Сотрудник 2	5	5	5	5	20
Сотрудник 1	5	5	5	5	20
Итого	50	50	50	50	200

Источники: составлено авторами.

Заключение

В экономико-математической модели построения графика работы кассиров малого реально функционирующего продовольственного магазина не учтены случаи, когда сотрудники не могут работать в определенный день или уходят в отпуск. Кроме того, как ранее отмечалось, не наложено ограничение на отсутствие двух смежных смен. В модели не учтены ограничивающие условия на переработку или недоработку сотрудниками в часах за рабочую смену. Существует еще множество условий и ограничений, которые следует принимать в расчет при построении реалистичной модели несмотря на то, что все это значительно усложняет решение задачи с экспоненциально увеличивающейся размерностью. Как неоднократно подчеркивалось, оптимальный график строился для реального круглосуточно работающего продовольственного магазина с численностью в 15 кассиров. Согласно оптимальному решению, которое правомерно признавать локальным (в связи с отсутствием ряда ограничений), экономия фонда заработной платы на месяц могла составить около 40 млн руб. [3, 4].

Литература

1. Конвей, Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер — М. : Наука, 1975.
Konvey, R. V. Teoriya raspisaniy / R. V. Konvey, V. L. Maksvell, L. V. Miller — M. : Nauka, 1975.
2. Лазарев, А. А. Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний : учеб. пособие / А. А. Лазарев. — М. : МФТИ, 2008.
Lazarev, A. A. Teoriya raspisaniy. Otsenki absolyutnoy pogreshnosti i skhema priblizhennogo resheniya zadach teorii raspisaniy : ucheb. posobie / A. A. Lazarev. — M. : MFТИ, 2008.
3. Пенталь, С. В. К проблеме построения алгоритмов оптимизации графиков работы персонала торгового предприятия / С. В. Пенталь, Г. О. Читая // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 21—22 мая 2015 г. : в 2 т. / Белорус. гос. экон. ун-т ; редкол.: В. Н. Шимов (отв. ред.) [и др.]. — Минск, 2015. — Т. 2. — С. 282—283.
Pental', S. V. K probleme postroeniya algoritmov optimizatsii grafikov raboty personala torgovogo predpriyatiya / S. V. Pental', G. O. Chitaya // Ekonomicheskiy rost Respubliki Belarus': globalizatsiya, innovatsionnost', ustoychivost' : materialy VIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Minsk, 21—22 maya 2015 g. : v 2 t. / Belarus. gos. ekon. un-t ; redkol.: V. N. Shimov (otv. red.) [i dr.]. — Minsk, 2015. — T. 2. — S. 282—283.
4. Танаев, В. С. Введение в теорию расписаний / В. С. Танаев, В. В. Шкурба ; под ред. Д. Б. Юдина. — М. : Наука, 1975.
Tanaev, V. S. Vvedenie v teoriyu raspisaniy / V. S. Tanaev, V. V. Shkurba ; pod red. D. B. Yudina. — M. : Nauka, 1975.

Статья поступила в редакцию 09.12.2015 г.