Список использованных источников

1. Голик В.С. Эффективность интернет-маркетинга в бизнесе – Дикта, 2008. – С. 196.

2. Гуров, Ф. Продвижение бизнеса в Интернет. Все о PR и рекламе в Сети – Вершина, 2008.- С. 152.

3. Успенский, И.В. Интернет-маркетинг: Учебник. – СПб.: Изд-во СПГУЭиФ, 2003.- 347 с.

Л.И.Шевченко, канд. физ.-мат. наук, доцент, БНТУ (г. Минск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ранее нами в [1] была получена однородная производственная CES функция с постоянным эффектом от расширения масштаба производства

$$F(K,L) = \left(A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}, \qquad (1)$$

где A и B – положительные величины, а параметр p связан с эластичностью замены σ соотношением $p = \dfrac{1-\sigma}{\sigma}$.

Сравним функцию (1) с известной степенной производственной функцией типа Кобба-Дугласа, которая имеет вид

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \qquad (2)$$

где Y - национальный доход, K - капитал, L - труд, A, α, β - положительные числа. Естественно, при $\alpha + \beta = 1$, мы имеем классическую функцию Кобба-Дугласа. Для этого исследуем поведение каждой из них.

Функция Кобба-Дугласа (2) определена при всевозможных наборах значений капитала и труда $(K \geq 0,\ L \geq 0)$. Она дважды дифференцируема в области задания, т.е.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = \alpha \cdot \frac{Y}{K} > 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \cdot A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} = \beta \cdot \frac{Y}{L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot A \cdot K^{\alpha-2} \cdot L^{\beta},$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = \alpha \cdot \beta \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta-1},$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \beta \cdot (\beta - 1) \cdot A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-2}.$$

Согласно условию: если отсутствует хотя бы один из факторов, то выпуск невозможен, т.е. при $K=0$ выпуск $Y=0$ и при $L=0$ также $Y=0$.

Поскольку $\frac{\partial Y}{\partial K}>0$ и $\frac{\partial Y}{\partial L}>0$, то функция Y монотонно возрастает по каждому аргументу. Известно, что для такой функции имеет место закон убывающей эффективности производства при $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$. Это следу-

ет из выражений для вторых частных производных:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}<0,\ \ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}<0. \tag{3}$$

Поскольку матрица Гессе для функции Y имеет вид

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial L} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial L} & \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

и является отрицательно определенной, то функция (2) является вогнутой при $\alpha,\beta\in(0;1)$. Таким образом, функция Кобба-Дугласа при $A>0;\alpha,\beta\in(0;1)$

обладает всеми свойствами макроэкономических функций $Y=F(K,L)$:

1) Областью задания этой функции является множество всевозможных наборов $K\geq 0$ и $L\geq 0$;
2) Функция $Y=F(K,L)$ является дважды непрерывно дифференцируемой в области ее задания;
3) Выпуск невозможен, если отсутствует хотя бы один из факторов производства, т.е. $F(0,L)=F(K,0)=0$;
4) Функция монотонно возрастает по каждому аргументу, т.е. $\frac{\partial F}{\partial K}>0$ и $\frac{\partial F}{\partial L}>0$;
5) Функция имеет убывающие первые частные производные, т.е. $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$.

Заметим, что эта функция является однородной степени $\alpha+\beta=1$.

Рассмотрим поведение данной функции в случае постоянного выпуска,

т.е. при $Y=C$. Из уравнения $A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}=C$ получим

$$K=\left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot L^{-\frac{\beta}{\alpha}}=B\cdot L^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{5}$$

где $B=\left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$ - константа. Из (5) следуют два предельных равенства

$$\lim_{L\to\infty} K=0 \text{ и } \lim_{L\to 0} K=+\infty, \qquad (6)$$

которые четко указывают зависимость одного фактора производства от другого в предельных случаях. Асимптотами графика данной функции

являются оси координат(OL соответствует оси OX, а OK соответст-

вует оси OY).

Поскольку $\frac{\partial K}{\partial L}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot B\cdot L^{-\frac{\beta}{\alpha}-1}<0$, то функция (5) является монотонно убы-

вающей, т.е. с ростом L значение K уменьшается. Предельная норма замены труда капиталом для функции Кобба-Дугласа имеет вид

$$n_K=-\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot k, \qquad (7)$$

где $k=\frac{K}{L}$ - фондовооруженность труда. Аналогично можно найти и n_L - предельную норму замены капитала трудом. Коэффициенты эластичности

выпуска по фондам (по капиталу) и по труду имеют вид

$$E_K=\frac{\partial Y}{\partial K}:\frac{Y}{K}=\alpha\cdot A\cdot K^{\alpha-1}\cdot L^{\beta}\cdot\frac{K}{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}=\alpha. \qquad (8)$$

$$E_L=\frac{\partial Y}{\partial L}:\frac{Y}{L}=\beta\cdot A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta-1}\cdot\frac{L}{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}=\beta. \qquad (9)$$

На основании равенств (8) и (9) можно судить о том, что для данного вида производственных функций типа Кобба-Дугласа, коэффициенты эластичности выпуска по факторам производства постоянны и равны показателям α и β степеней величин K и L соответственно. Если ввести

функцию $f(k)=F\left(\frac{K}{L},1\right)=\frac{Y}{L}$, то с учетом (2), она будет иметь вид

$f(k)=\frac{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}{L^{\alpha+\beta}}=A\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=A\cdot k^{\alpha}$. Более того, известно, что если $\alpha+\beta=1$, то

функция $y=f(k)=\frac{Y}{L}$ задает зависимость между производительностью труда y и фондовооруженностью труда k. Заметим, что с ростом k неограниченно растет и производительность труда. Используя формулу для нахождения коэффициентов эластичности замены факторов производства

$$\sigma = \frac{f'(k)\cdot[k\cdot f'(k)-f(k)]}{k\cdot f''(k)\cdot f(k)}, \qquad (10)$$

получим $\sigma = \sigma_K = \sigma_L = 1$.

Однако, несмотря на свое широкое применение в различных экономических исследованиях, производственная функция типа Кобба-Дугласа не лишена недостатков. Основным таким ее недостатком можно считать полную заменяемость факторов производства, которая предполагает, что любое заданное количество продукта может быть произведено даже при очень малом объеме одного из факторов производства при условии, что другой фактор будет в достаточном объеме. Очевидно, что такое положение не всегда имеет место (так, например, отсутствие капитала не удается заменить достаточным количеством рабочей силы).

Рассмотрим теперь однородную CES функцию с постоянным эффектом от расширения масштаба производства (1). Она также определена при $K > 0$, $L > 0$, и дважды непрерывно дифференцируема

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{A\cdot K^{-p-1}}{\left(A\cdot K^{-p}+B\cdot L^{-p}\right)^{\frac{1}{p}+1}},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial L} = \frac{A\cdot B\cdot(p+1)\cdot K^{-p-1}\cdot L^{-p-1}}{\left(A\cdot K^{-p}+B\cdot L^{-p}\right)^{\frac{1}{p}+2}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{B\cdot L^{-p-1}}{\left(A\cdot K^{-p}+B\cdot L^{-p}\right)^{\frac{1}{p}+1}},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{-A\cdot B\cdot(p+1)\cdot K^{-p-2}\cdot L^{-p}}{\left(A\cdot K^{-p}+BL^{-p}\right)^{\frac{1}{p}+2}},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \frac{-A\cdot B\cdot(p+1)\cdot K^{-p}\cdot L^{-p-2}}{\left(A\cdot K^{-p}+B\cdot L^{-p}\right)^{\frac{1}{p}+2}}.$$

При положительных значениях A, B, p имеем $\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \frac{\partial Y}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$.

Т.е. функция (1) также монотонно возрастает по каждому аргументу и для нее справедлив закон убывающей эффективности производства (это следует из (3). Поскольку матрица Гессе (4) для нее отрицательно определенная, то функция (1) является вогнутой.

Рассмотрим ее поведение при постоянном выпуске, т.е. при $Y = C$.

Имеем $A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p} = C^{-p}$, откуда

$$K = \left(\frac{C^{-p} - B \cdot L^{-p}}{A}\right)^{-\frac{1}{p}} = A^{\frac{1}{p}} \cdot \left(C^{-p} - B \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}. \qquad (11)$$

Для кривой (11) справедливы следующие предельные равенства

$$\lim_{L \to \infty} K = A^{\frac{1}{p}} \cdot C \text{ и } \lim_{K \to \infty} L = B^{\frac{1}{p}} \cdot C. \qquad (12)$$

Таким образом, асимптотами для графика кривой служат прямые, параллельные осям OL и OK. Более того, т.к.

$\frac{\partial K}{\partial L} = -A^{\frac{1}{p}} \cdot B \cdot L^{-p-1} \cdot \left(C^{-p} - B \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}-1} < 0$, то функция (11) является монотонно убывающей, т.е. с ростом L значения K уменьшаются.

В этой ситуации уже при ограниченном количестве одного из ресурсов нельзя достигнуть любого наперед заданного объема выпуска за счет увеличения другого. Далее запишем коэффициенты эластичности по факторам производства

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{Y}{K} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \frac{A \cdot K^{-p}}{A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p}},$$
$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{Y}{L} = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{B \cdot L^{-p}}{A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p}}.$$

Очевидно, что $E_K + E_L = 1$. Находим предельную норму замены труда капиталом $n_K = -\frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{B \cdot L^{-p-1}}{A \cdot K^{-p-1}} = -\frac{B}{A} \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{p+1} = -\frac{B}{A} \cdot k^{p+1}$. Ранее было установлено, что эластичность такой замены $\sigma = \frac{1}{p+1}$. Производительность

труда задается в виде функции

$$y = f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{\left(A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}}{L} = \left[A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} + B\right]^{-\frac{1}{p}} = \left(A \cdot k^{-p} + B\right)^{-\frac{1}{p}}. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что если $k \to +\infty$ (фондовооруженность труда неограниченно растет), то производительность труда согласно (13) будет стремиться к величине $B^{-\frac{1}{p}}$, т.е. функция $y = f(k)$ будет иметь горизонтальную асимптоту. А это уже говорит о том, что при неограниченном росте фондовооруженности k производительность труда не растет безмерно, а ограничивается конкретным значением.

Исходя из проведенных исследований, можно сделать вывод об отдаче предпочтения при макроэкономическом моделировании однородной CES функции с постоянным эффектом от расширения масштаба производства.

Литература:

1. Построение однородной производственной CES функции. В сб. научн. трудов «Менеджмент и маркетинг: опыт и проблемы» под общей редак- цией д.э.н., проф. Акулича И.Л.- Минск, ООО «Мэджик», 2011 г., С.49.

Е.М.Шелег, канд. экон. наук, доцент, БГЭУ, г. Минск (Беларусь)

УПРАВЛЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

В управлении инновационными процессами важную роль играет выбор оптимальной схемы финансирования инноваций. Развитие инновационной деятельности, как на уровне государства, так и на уровне отдельных субъектов хозяйствования предполагает использование различных форм финансирования. Перспективной формой финансового обеспечения инновационных проектов в настоящее время выступает венчурное финансирование.

Под венчурным финансированием обычно понимают долгосрочные вложения во вновь создаваемые или действующие молодые компании, которые за счет использования новейших технологий и достижений науки потенциально способны обеспечить производство конкурентоспособной продукции, создание новых рынков. Венчурное финансирование можно рассматривать и как современную разновидность учредительства, то есть создания перспективных фирм, компаний с целью быстрого приумножения первоначального вклада в их уставный капитал и последующей его реализации по рыночной стоимости. Венчурное финансирование имеет ряд особенностей, отличающих его от других форм финансирования:

– является долговременным;

– предоставляется преимущественно инновационным компаниям с потенциалом роста, акции которых еще не котируются на фондовой бирже;

– не предусматривает возможность изъятия капитала до завершения жизненного цикла компании;

– не требует от финансируемых предприятий залога, гарантий;