АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

Кравцов В.М.

ПРОМАТОМНАДЗОР МЧС Республики Беларусь, г. Минск

Многие практически важные экономические и технико-экономические задачи, например [1 – 3], задачи размещения производств, распределения капитальных вложений по стройкам, запуска метеорологических спутников с поверхности земли на разные атмосферные уровни, сопоставления данных приводят к p-индексной ($p \geq 2$) аксиальной проблеме выбора (p-аксиальной ПВ) порядка n, которая формулируется так:

$$f(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} c_{i_1 i_2 \cdots i_p} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} \to \min,$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{n} \sum_{i_{s+1}=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} = 1 \ \forall i_s \in N_n, \ \forall s \in N_p,$$

$$x_{i_1 i_2 \cdots i_p} = 0 \text{ или } 1 \ \forall i_s \in N_n, \ \forall s \in N_p,$$

где $c = \left\| c_{i_1 i_2 \cdots i_p} \right\|_n$ - заданная матрица порядка n, $N_t = \{1, 2, \ldots, t\}$. В дальнейшем такую задачу будем обозначать через $Z(c)$.

Для p - аксиальной ПВ, начиная с $p = 3$, до сих пор не удается построить точного полиномиального алгоритма, что и неудивительно, поскольку она (даже при $p = 3$) является NP-полной. В связи с чем представляет несомненный интерес разработка малотрудоемких приближенных алгоритмов, решающих задачу $Z(c)$ за полиномиальное время и обоснование оценок качества этих алгоритмов на определенных классах входных данных.

Зафиксируем $q \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Совокупность элементов матрицы

$c = \left\| c_{i_1 i_2 \cdots i_p} \right\|_n$ с фиксированными значениями q индексов, например, $i_1, \ldots, i_q$, будем называть ($p-q$)-мерным сечением ориентации $(i_{q+1}, \ldots, i_p)$ матрицы c. Всякое ($p-q$)-мерное сечение матрицы c представляет собой ($p-q$)-мерную подматрицу матрицы c. Заметим, что при $q=0$ получаем p-мерное сечение ориентации $(i_1, \ldots, i_p)$ матрицы c, которое совпадает с матрицей c. Алгоритм α_q, $q \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, нахождения приближенного решения задачи $Z(c)$ состоит из последовательно проводимых шагов.

Шаг 1. Найти минимальный элемент в ($p-q$)-мерном сечении p-индексной матрицы c ориентации $(i_{q+1}, \ldots, i_p)$ с фиксированными значениями индексов $(i_1^0, \ldots, i_q^0)$. Если таким элементом оказался $c_{i_1^0 \cdots i_q^0, i_{q+1}^0 \cdots i_p^0}$, то положить $x^*_{i_1^0 \cdots i_p^0} = 1$, $x^*_{i_1 \cdots i_{t-1} i_t^0 i_{t+1} \cdots i_p} = 0$ $\forall i_s \in N_n$, $\forall s \in N_p \setminus \{t\}$, $\forall t \in N_p$.

Далее, определим подматрицу $c^{(1)}$ порядка $n-1$ матрицы c согласно равенству $c^{(1)} = \{c_{i_1 i_2 \cdots i_p} : i_s \in N_n \setminus \{i_s^0\}, s \in N_p\}$.

Шаг 2. Он заключается в проведении уже описанных операций применительно к матрице $c^{(1)}$. В результате этого шага определяется еще одна компонента плана x^*, равная 1. Затем следует шаг 3 и т. д.

Очевидно, что за n шагов построим план x^* задачи $Z(c)$. Легко также убедиться, что трудоемкость алгоритма α_q составляет $\mathrm{O}(n^{p-q+1})$ действий.

Пусть $V(n,r)$ - множество всех матриц, элементы которых равновероятно и независимо принимают целочисленные значения из отрезка $[1,r]$, а $V^{\beta}(n,r)$ - множество всех тех матриц из множества $V(n,r)$, которые обладают свойством β. Говорят, что почти каждая матрица множества $V(n,r)$ обладает свойством β, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|V^{\beta}(n,r)\right|}{\left|V(n,r)\right|}=1$. Говорят также, что алгоритм α_q почти всегда строит асимптотически оптимальный план x^* задачи $Z(c)$, если существует такая последовательность $\varepsilon_n(q)\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(q)=0$, что для почти каждой матрицы c из множества $V(n,r)$ выполняется неравенство $f(x^*)\leq f(x^0)(1+\varepsilon_n(q))$, где x^0 - оптимальный план задачи $Z(c)$.

Теорема. Для любого числа $q\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ алгоритм α_q почти всегда строит асимптотически оптимальный план p-аксиальной ПВ, если $r\leq n^{\frac{1-\theta}{1+q}}$, где θ - любое число, удовлетворяющее неравенствам: $\dfrac{1}{p+1}<\theta<1$ при $q=0$; $0\leq\theta<1$ при $q\in N_{p-1}$, $p>2$; $0<\theta<1$ при $q=1$, $p=2$.

Частный случай этой теоремы $\left(\textit{при}\;\; q=0\;\; \textit{и}\;\; \dfrac{1}{2}<\theta<1\right)$ был доказан в [4].

Литература

1. Pierskalla W.P. The multidimensional assignment problem // Operations Research. V. 16. 1968. P. 422–431.

2. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglio S. A three-dimensional matching model for perishable production scheduling // Discrete Applied Mathematics. V. 92. 1999. P. 1–15.

3. Лукшин Е.В. Об одном подходе к решению оптимизационной задачи размещения производства // Моделирование экономических процессов на основе методов и средств компьютерной математики. Минск: НИЭИ Минэкономики РБ. 2003. С. 39–44.

4. Кравцов М. К., Крачковский А. П. Асимптотический подход к решению многоиндексной аксиальной проблемы выбора // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 2. С. 123-126.