ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА[2]

Гирлих Э., доктор наук, профессор

университет Отто-фон-Гирике, г. Магдебург, ФРГ,

Емеличев В.А., доктор физ.-мат. наук, профессор,

Подкопаев Д.П., кандидат физ.-мат. наук

БГУ, г. Минск

Нестационарность, неустойчивость экономических процессов в переходной экономике предъявляет особые требования к моделям принятия решений, широко применяемым при исследовании экономических объектов и явлений. В частности, актуальными становятся методы анализа устойчивости принимаемых многокритериальных (многоцелевых) решений в условиях неопределенности и риска.

В настоящем докладе рассмотрены вопросы устойчивости многокритериальных моделей целочисленного линейного программирования. Такие модели используются для решения многих экономических задач: размещения производства, коммивояжера, составления оптимального портфеля инвестиций (задача о рюкзаке) и др.

Многокритериальная модель целочисленного линейного программирования имеет следующую постановку.

Пусть n – число переменных (размерность задачи), k – число целей (критериев), $C=[c_{ij}]_{k\times n}\in\mathbf{R}^{k\times n}$ – матрица коэффициентов, $X\subset\mathbf{Z}^n$ – множество допустимых решений, представленных целочисленными векторами. Будем предполагать, что множество X ограничено.

[2] Работа выполнена при поддержке DAAD (ФРГ) и Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры".

Количественная оценка решения x по i-му (частному) критерию – сумма всех элементов решения, умноженных на соответствующие элементы i-й строки C_i матрицы C:

$$C_i x = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n.$$

Таким образом, в отличие от однокритериальных (скалярных) задач, когда решение оценивается по одному критерию, здесь мы имеем дело с векторной оценкой

$$C x = (C_1 x, C_2 x, \ldots, C_k x)^{\mathrm{T}}.$$

В дальнейшем будем считать, что все частные критерии требуется минимизировать:

$$C_i x \to \min_{x \in X}, \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Тем самым моделируется ситуация, связанная с минимизацией издержек, стоимости, потерь, сроков исполнения и т.д.

Общеизвестно, что решение, наилучшее сразу по всем критерием, на практике – большая редкость. Поэтому вместо минимизации одновременно по всем критериям вводят другие, более сложные принципы оптимальности. Одним из наиболее широко известных и используемых в экономике является принцип оптимальности по Парето. В соответствии с ним, решение считается оптимальным, если его оценку можно улучшить по одному критерию только за счет ухудшения по другому критерию.

Будем считать, что наша задача состоит в поиске множества Парето. Такую задачу с коэффициентами из матрицы C будем обозначать через $Z^k(C)$, а множество Парето – через $P^k(C)$.

Смоделируем ситуацию неопределенности или риска, которая проявляется в том, что заданные коэффициенты c_{ij} известны нам лишь с некоторой степенью точности или могут непредсказуемо измениться. Пусть ε – величина максимального непредсказуемого изменения или максимальной неточности наших коэффициентов. Через $\Re(\varepsilon)$ будем обозначать множество матриц размера $k \times n$, каждый элемент которых по модулю меньше ε. Тогда указанная ситуация моделируется путем сложения исходной матрицы C с "возмущающей" матрицей $B \in \Re(\varepsilon)$.

Задача $Z^k(C)$ называется ***устойчивой***, если при "малых" возмущениях коэффициентов не появляются новые оптимальные по Парето решения, т.е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, B \in \Re(\varepsilon) \quad (P^k(C+B) \subseteq P^k(C)).$$

Тем самым, решив устойчивую задачу, мы не упустим ни одного решения из-за ситуации неопределенности, в которой мы находимся.

Задача $Z^k(C)$ называется ***квазиустойчивой***, если при "малых" возмущениях коэффициентов не исчезнет ни одно оптимальное по Парето решение:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, B \in \Re(\varepsilon) \quad (P^k(C) \subseteq P^k(C+B)).$$

Таким образом, среди решений квазиустойчивой задачи нет ни одного "лишнего", т.е. такого, которое бы не являлось решением "возмущенной" задачи.

Радиусом устойчивости (квазиустойчивости) называется максимальная величина возмущений ε, при которой не появляются (соответственно не исчезают) оптимальные по Парето решения.

В докладе излагаются результаты [1], касающиеся условий устойчивости и вычисления радиуса устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования. Указаны направления дальнейших исследований в этой области.

Литература

1. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. V. 51, № 4, 2002. P. 645-676.