АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ [3]

Емеличев В.А., доктор физ.-мат. наук, профессор

Кузьмин К.Г.

БГУ, г. Минск

В последние годы резко возрос интерес к процессам принятия многоцелевых решений в условиях неопределенности и риска (задачи теории игр, математической экономики, оптимального управления, инвестиционного анализа, банковской сферы, страхового бизнеса и т. п.). При решении многих экономических задач необходимо учитывать различные факторы неопределенности и случайности (такие как неточность входной информации, неадеквантность математических моделей реальным процессам, погрешность вычислений на ЭВМ и т. п.). В русле этого направления лежат и исследования устойчивости дискретных оптимизационных задач с одним или несколькими частными критериями [1–4].

В данной заметке рассматривается n-критериальная (векторная) комбинаторная задача в пространстве параметров частных критериев вида *MINSUM MODUL* с метрикой l_1. Приводится предельный уровень изменений этих параметров, сохраняющих парето-оптимальность (эффективность) решения такой задачи.

Пусть на множестве траекторий $T \subseteq 2^E$ заданы частные критерии вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} |a_{ij}| \quad \min_{t \in T}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Здесь $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $|T| \quad 2$, A_i – i-я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{R}^{nm}$, $m \quad 2$, $n \quad 1$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. Через $P^n(A)$ обозначим множество парето-оптимальных траекторий. Радиусом устойчивости траектории $t \in P^n(A)$ называется число $\rho^n(t, A) = \sup \Xi$, если $\Xi \neq \varnothing$, и $\rho^n(t, A) = 0$, если $\Xi = \varnothing$, где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon) \ \ (t \in P^n(A+B))\}$, $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\|_1 < \varepsilon\}$,

[3] Работа финансировалась Государственной программой фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры – 29".

$\| B \|_1$ –норма l_1 матрицы $B = [\, b_{ij} \,]_{n \times m}$, т. е. $\| B \|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} | b_{ij} |$. Тем самым радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений в пространстве параметров частных критериев с метрикой l_1, сохраняющих парето-оптимальность траектории.

Пусть $t \in P^n(A)$. Естественно считать, что $\rho^n(t, A) = \infty$, если $\Xi = \mathbf{R}_+ \setminus \{ 0 \}$, т. е. в случае, когда $t \in P^n(A+B)$ при любой матрице $B \in \mathbf{R}^{nm}$. Для $t \in P^n(A)$ положим $T^*(t) = \{ t' \in T \setminus \{ t \} : \; t \subset t' \}$, $\; T_*(t) = \{ t' \in T : \; t \setminus t' \neq \varnothing \}$.

Т е о р е м а. При любом натуральном числе n 1 справедливы утверждения: 1) если траектория $t \in P^n(A)$ такова, что $T \setminus \{ t \} \neq T^*(t)$, то для радиуса устойчивости справедлива формула

$$\rho^n(t, A) = \min \{ \sum_{i \in N_n} [\, f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i) \,]^+ : \; t' \in T_*(t) \},$$

где $[\, \gamma \,]^+ = \max\{ 0, \gamma \}$; 2) если $T \setminus \{ t \} = T^*(t)$, то $\rho^n(t, A) = \infty$.

С л е д с т в и е. Если $t \in P^n(A)$ и $T \setminus \{ t \} \neq T^*(t)$, то

$$\rho^n(t, A) > 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall\, t' \in T_*(t) \;\; \exists\, i \in N_n \;\; (\, f_i(t, A_i) \neq f_i(t', A_i) \,).$$

Литература

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995. 170 с.

2. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, № 2, P. 169–190.

3. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2001. Т. 8. № 1. С. 47–69.

4. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. N., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problem of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, № 4, P. 645–676.