Белорусский экономический журнал. 2018. № 4. С. 123–147.
*Belarusian Economic Journal*. 2018. No 4. PP. 123–147.



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОТРАСЛЕВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

**Э.М. Аксень***

Представлена методика моделирования динамики конечного выпуска отраслей, конечного потребления и чистого экспорта, основанная на использовании теории полезности и аппарата дифференциальных уравнений. Теория полезности позволяет сопоставлять уровни конечного потребления и чистого экспорта с темпами изменения конечного выпуска отраслей и выбирать наиболее приемлемые варианты. Найденные таким образом темпы изменения конечного выпуска отраслей определяют динамику конечного выпуска. Предлагаемая методика дает возможность построения прогнозов отраслевых показателей при разных сценариях, связанных с выбором норм замещения упомянутых показателей. Получаемые прогнозы носят стохастический характер, что позволяет учитывать фактор неопределенности при моделировании динамики экономической системы.

**Ключевые слова:** конечный выпуск, динамика, случайный процесс, функция полезности, предельная норма замещения.

**JEL-классификация**: C67.

*Материал поступил 28.12.2017 г.*

В условиях рыночной экономики роль государства заключается в создании условий, при которых развитие экономической системы будет происходить в наиболее благоприятном для общества направлении. При этом важную роль в оценке сценариев динамики экономического развития играют отраслевые (и межотраслевые) показатели. В данной статье предложена методика моделирования динамики системы межотраслевых показателей в условиях, когда принимаются управленческие решения, учитывающие целесообразность использования конечного выпуска отраслей экономики как для текущего конечного потребления и экспорта, так и для инвестиций в основной капитал (с целью увеличения выпуска отраслей экономики в будущем). При этом применяется теория полезности, позволяющая, в частности, использовать нормы замещения для текущего потребления и чистого экспорта отраслей с одной стороны и прироста выпуска отраслей – с другой.

### *Динамическая межотраслевая модель с переменными случайными коэффициентами*

В соответствии с материалом монографий (Леонтьев, 1958. С. 18–20; Miller, Blair, 2009. PP. 11–14)[1] основные балансовые соотношения в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$x(t) = A(t)x(t) + v(t) + h(t), \tag{1}$$

где $x(t) = \left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец интенсивностей валового производства продукции отраслей ($n$ – общее количество отраслей, верхний индекс T означает транспонирование);

[1] Экономико-математические методы и модели: учебное пособие. 1999. Минск: БГЭУ. С. 371–375.

* **Аксень Эрнест Маврициевич** (eaksen@mail.ru), доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры математических методов в экономике Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).

$A(t)=[a_{ij}(t)]$ $(i\in\{1,2,\ldots,n\},\ j\in\{1,2,\ldots,n\})$ – матрица коэффициентов суммарных интенсивностей прямых затрат и потребления основного капитала в момент времени $t$ (коэффициент $a_{ij}(t)$ равен суммарной интенсивности использования продукции отрасли $i$ в качестве оборотного капитала отрасли $j$ и для замены изношенного основного капитала отрасли $j$ в расчете на производство единицы продукции отрасли $j$ в момент времен $t$);

$v(t)=\left[v_1(t),\ldots,v_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец интенсивностей чистого инвестирования (значение $v_i(t)$ равно интенсивности чистого инвестирования продукции отрасли $i$ в основной капитал всех отраслей);

$h(t)=\left[h_1(t),\ldots,h_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта.

Замечание 1. В соответствии с публикуемыми Национальным статистическим комитетом Республики Беларусь (2017) данными коэффициент прямых затрат $a_{ij}$ равен только удельному использованию продукции отрасли $i$ в качестве оборотного капитала отрасли $j$ (т. е. потребление основного капитала не учитывается), а значение $v_i$ равно валовым (а не чистым) инвестициям. Однако в динамической балансовой модели Леонтьева значения $a_{ij}$ и $v_i$ понимаются так же, как и в настоящей статье (Гранберг, 1985. С. 123).

Обозначим через $r_{ij}(t)$ коэффициенты капиталоемкости приростов производства (Там же). (Напомним, что коэффициент $r_{ij}(t)$ равен чистым инвестициям продукции отрасли $i$ в основной капитал отрасли $j$, необходимым для единичного прироста выпуска отрасли $j$.) В соответствии с материалом монографий (Леонтьев, 1958. С. 71–72; Гранберг, 1985. С. 123) имеет место равенство

$$v(t)=R(t)\dot{x}(t), \tag{2}$$

где $R(t)=\left[r_{ij}(t)\right]$ $(i\in\{1,2,\ldots,n\},\ j\in\{1,2,\ldots,n\})$ – матрица коэффициентов $r_{ij}(t)$;

$\dot{x}(t)$ – производная вектора $x(t)$ по переменной $t$ (значение $\dot{x}_i(t)$ равно темпу изменения интенсивности производства валового выпуска отрасли $i$).

Подставив выражение (2) в равенство (1), получим

$$x(t)=A(t)x(t)+R(t)\dot{x}(t)+h(t). \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что существует обратная к $R(t)$ матрица $R^{-1}(t)$. Из равенства (3) очевидным образом следует, что

$$\dot{x}(t)=R^{-1}(t)\left\{\left[I_n-A(t)\right]x(t)-h(t)\right\}, \tag{4}$$

где $I_n$ – единичная матрица размера $n\times n$.

Векторное дифференциальное уравнение (4) является основным соотношением динамической модели Леонтьева (Леонтьев, 1958. С. 72; Гранберг, 1985. С. 122–124).

При экзогенно заданных векторной функции $h(t)$ (описывающей процесс суммарной интенсивности конечного потребления и чистого экспорта) и векторе $x(t_0)$ интенсивностей валового выпуска в начальный момент времени $t_0$ векторное дифференциальное уравнение (4) однозначным образом определяет векторную траекторию $x(t)$, $t \ge t_0$ (при выполнении некоторых условий для функций $A(t)$, $R(t)$ и $h(t)$).

Замечание 2. В дифференциальном уравнении (4) можно считать, что $R(t)$, $A(t)$ и $h(t)$ – (соответственно матричные и векторный) случайные процессы. Тогда решение $x(t)$ указанного уравнения также является (векторным) случайным процессом. При этом случайный процесс $x(t)$ дифференцируем.

Замечание 3. В случае когда процессы $R(t)$, $A(t)$ и $h(t)$ являются случайными, решение векторного дифференциального уравнения (4) будем понимать как потраекторное решение. Это значит, что для всех элементарных событий $\omega \in \Omega$ (где $\Omega$ – множество всех элементарных событий) имеет место соотношение $\dot{x}(t,\omega) = R^{-1}(t,\omega)\left\{\left[I_n - A(t,\omega)\right]x(t,\omega) - h(t,\omega)\right\}$ $\forall t \ge t_0$. При таком подходе исследование дифференциальных уравнений со случайными процессами сводится к исследованию детерминированных дифференциальных уравнений (для которых можно использовать соответствующие широко известные результаты).

В дальнейшем будем считать, что процессы $R(t)$, $A(t)$ и $h(t)$ (а следовательно и $x(t)$) являются случайными. (Для краткости мы не указываем элементарное событие $\omega$ в списке аргументов соответствующих случайных процессов.)

Будем считать, что при любом $t$ (и при любом $\omega \in \Omega$) существует и неотрицательна матрица $\left[I_n - A(t)\right]^{-1}$, известная как матрица коэффициентов полных затрат. Для матрицы коэффициентов полных затрат $\left[I_n - A(t)\right]^{-1}$ будем использовать стандартное обозначение $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]$. Итак,

$$B(t) = \left[I_n - A(t)\right]^{-1}, \tag{5}$$

$$b_{ij}(t) \ge 0, \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Ключевой вопрос в модели Леонтьева (4) заключается в выборе процесса $h(t)$ суммарной интенсивности конечного потребления и чистого экспорта.

Замечание 4. В частном случае, когда общее число отраслей $n$ равно двум, коэффициенты полных затрат $b_{ij}(t)$ определяются по формулам:

$$b_{11}(t) = \frac{1 - a_{22}(t)}{1 - a_{11}(t) - a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)}, \tag{7}$$

$$b_{12}(t) = \frac{a_{12}(t)}{1 - a_{11}(t) - a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)}, \tag{8}$$

$$b_{21}(t) = \frac{a_{21}(t)}{1 - a_{11}(t) - a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)}, \tag{9}$$

$$b_{22}(t) = \frac{1 - a_{11}(t)}{1 - a_{11}(t) - a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)}. \tag{10}$$

Обозначим через $y(t)=\left[y_1(t),\ldots,y_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ вектор-столбец интенсивностей производства конечного выпуска. В соответствии с материалом монографий[2] (Miller, Blair, 2009. P. 20–21) имеют место равенства

$$y(t)=\left[I_n-A(t)\right]x(t). \tag{11}$$

$$x(t)=B(t)y(t). \tag{12}$$

Отметим также, что в соответствии с равенствами (1) и (11) справедливо соотношение

$$v(t)+h(t)=y(t). \tag{13}$$

В дальнейшем будем считать, что матричный случайный процесс $A(t)$ является дифференцируемым (по времени), и обозначим его производную через $\dot{A}(t)$. Динамика дифференцируемых коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(t)$ может описываться стохастическими дифференциальными уравнениями второго порядка[3]. (Методика моделирования коэффициентов прямых затрат представлена в следующем разделе настоящей статьи.)

Используя дифференцируемость случайных процессов $A(t)$ и $x(t)$, в силу формул (4), (5), (11), (12) получим:

$$\dot{y}(t)=\left\{\left[I_n-A(t)\right]R^{-1}(t)-\dot{A}(t)B(t)\right\}y(t)-\left[I_n-A(t)\right]R^{-1}(t)h(t). \tag{14}$$

Равенство (9) можно рассматривать в качестве векторного дифференциального уравнения относительно векторного случайного процесса $y(t)$. При экзогенно заданных векторном случайном процессе $h(t)$ (описывающем суммарный процесс конечного потребления и чистого экспорта) и векторе $y(t_0)$ интенсивностей конечного выпуска в начальный момент времени $t_0$ векторное дифференциальное уравнение (9) однозначным образом определяет векторную траекторию $y(t)$, $t \ge t_0$ (при выполнении некоторых условий для процессов $A(t)$, $R(t)$ и $h(t)$).

### *Моделирование динамики коэффициентов прямых затрат*

Коэффициенты прямых затрат обладают следующими свойствами. Во-первых, они не отрицательны. Во-вторых, сумма коэффициентов каждого столбца обычно не превосходит единицу (т. е. $\sum_{l=1}^{n} a_{ij}(t)<1$), что объясняется тем, что валовая добавленная стоимость, как правило, положительна. Некоторые коэффициенты прямых затрат $a_{ij}(t)$ всегда равны нулю, что объясняется тем, что продукция первой из соответствующих двух отраслей никогда (непосредственно) не используется в производственном процессе второй отрасли. Обозначим через $I_j$ множество номеров отраслей, продукция которых (непосредственно) используется при производстве продукции $j$-й отрасли, т. е.

[2] Экономико-математические методы и модели: учебное пособие. 1999. Минск: БГЭУ. С. 377.

[3] Медведев Г.А. 1999. Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок: учебное пособие. Минск: БГУ. С. 119–122.

для которых $a_{ij}(t) > 0$. (Очевидно, что $I_j \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.) Количество элементов множества $I_j$ обозначим через $n_j$. (Очевидно, что $n_j \le n$.) Обозначим через $a_{\bullet j}(t)$ вектор, состоящий из коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i \in I_j$ (т. е. из положительных элементов $j$-го столбца матрицы коэффициентов прямых затрат). Заметим, что вектор $a_{\bullet j}(t)$ состоит из $n_j$ компонент, т. е. $a_{\bullet j}(t) \in \mathrm{R}^{n_j}$. В соответствии с изложенным будем считать, что при любом $j = \overline{1, n}$ $a_{\bullet j}(t) \in \Omega_j$, где

$$\Omega_j = \left\{ x = \left( x_1, \ldots x_{n_j} \right) \in \mathrm{R}^{n_j} : \, x_l > 0, \; l = \overline{1, n_j}, \; \sum_{l=1}^{n_j} x_l < 1 \right\}. \tag{15}$$

Для моделирования динамики коэффициентов $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ мы предлагаем использовать случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$, которые принимают любые вещественные значения и описываются стохастическими дифференциальными уравнениями второго порядка[4]. При этом случайные процессы $a_{ij}(t)$, $i \in I_j$, и $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$, связываются между собой при помощи гомеоморфизмов между множествами $\Omega_j$ и $\mathrm{R}^{n_j}$, $j = \overline{1, n}$ (см. ниже).

Пусть $f_j$ – дважды непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм множества $\mathrm{R}^{n_j}$ на множество $\Omega_j$ (т. е. заданная на $\mathrm{R}^{n_j}$ векторная функция, множество значений которой совпадает с множеством $\Omega_j$ и для которой существует дважды непрерывно дифференцируемая обратная функция $f^{-1}$). Обозначим через $z_{\bullet j}(t)$ вектор, состоящий из $z_{ij}(t)$, $i \in I_j$. В соответствии с предлагаемой в данной статье методикой считаем, что коэффициенты прямых затрат $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ связаны с со случайными процессами $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ следующим образом:

$$a_{\bullet j}(t) = f_j \left[ z_{\bullet j}(t) \right], \; j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $z_{\bullet j}(t) = f_j^{-1} \left[ a_{\bullet j}(t) \right]$. Обозначим через $g_j$ обратную функцию $f_j^{-1}$. Таким образом,

$$z_{\bullet j}(t) = g_j \left[ a_{\bullet j}(t) \right], \; j = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Обозначим через $\kappa_j(i)$ при $i \in I_j$ номер $i$-й отрасли среди отраслей с номерами из множества $I_j$. (Например, если $I_2 = \{1, \; 3, \; 4, \; 6, \; 7\}$, то $\kappa_2(6) = 4$, т. е. 6-я отрасль – это четвертая отрасль среди отраслей, продукция которых непосредственно используется при производстве продукции 2-й отрасли.) Через $f_{ij}$ и $g_{ij}$ обозначим $\kappa_j(i)$-тые компоненты функций $f_j$ и $g_j$. Тогда векторные равенства (16) и (17) можно записать в виде систем скалярных равенств

$$a_{ij}(t) = f_{ij} \left[ z_{\bullet j}(t) \right], \; j = \overline{1, n}, \; i \in I_j, \tag{18}$$

[4] Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок: учебное пособие. 1999. Минск: БГУ. С. 119–122.

$$z_{ij}(t) = g_{ij}\left[a_{\bullet j}(t)\right],\ j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{19}$$

Примерами функций $f_{ij}$, с помощью которых по формуле (18) случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I_j$ преобразуется в процессы $a_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I_j$ коэффициентов прямых затрат, являются следующие функции:

$$f_{ij}(z_{\bullet j}) = \exp\left(z_{ij}\right) \Bigg/ \left[1+\sum_{l\in I_j}\exp\left(z_{lj}\right)\right],\ j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{20}$$

Несложно показать, что в этом случае описанные выше функции $g_{ij}$ имеют вид:

$$g_{ij}(a_{\bullet j}) = \ln a_{ij} - \ln\left(1-\sum_{l\in I_j} a_{lj}\right),\ j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{21}$$

В частном случае, когда общее число отраслей $n$ равно двум и при этом $I_1 = I_2 = \{1,\ 2\}$, формулы (20), (21) принимают вид:

$$f_{ij}(z_{1j}, z_{2j}) = \exp\left(z_{ij}\right) \Big/ \left[1+\exp\left(z_{1j}\right)+\exp\left(z_{2j}\right)\right],\ i, j \in \{1,\ 2\}, \tag{22}$$

$$g_{ij}(a_{1j}, a_{2j}) = \ln a_{ij} - \ln\left(1-a_{1j}-a_{2j}\right),\ i, j \in \{1,\ 2\}. \tag{23}$$

В соответствии с изложенным будем считать, что случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I_j$ подчиняются следующим стохастическим дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$d\dot{z}_{ij}(t) = \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t), \dot{z}_{ij}(t), t\right]dt + \psi_{ij}\left[z_{ij}(t), \dot{z}_{ij}(t), t\right]dW_{ij}(t), \tag{24}$$

где $\dot{z}_{ij}(t)$ – (первая) производная случайного процесса $z_{ij}(t)$ по временно́му аргументу $t$;

$\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ – экзогенно заданные функции (с неизвестными параметрами);

$W_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I_j$, – коррелированные между собой стандартные винеровские процессы (Пугачев, Синицын, 1990. С. 181–182).

Замечание 5. В случае моделирования динамики коэффициентов прямых затрат в дискретном времени для описания случайных процессов $z_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I_j$ можно использовать модели ARMA (авторегрессии и скользящего среднего[5]). В частности, модель AR(1)[6] для указанных процессов имеет вид:

$$z_{ij}(t_k) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{ij}(t_{k-1}) + \varepsilon_{ij}(t_k),\ k \in \left\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right\}, \tag{25}$$

где $\alpha_{ij}$ и $\beta_{ij}$ – параметры модели;

$t_k$, $k$ – номер момента времени $\varepsilon_{ij}(t_k)$, коррелированные между собой случайные процессы без автокорреляции (т. е. ковариации $\varepsilon_{ij}(t_k)$ и $\varepsilon_{rs}(t_k)$ могут быть отличны от нуля, а ковариации $\varepsilon_{ij}(t_k)$ и $\varepsilon_{rs}(t_l)$ должны быть равны нулю при $k \neq l$). Заметим, что модели ARMA нежелательно

[5] Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. 2000. Эконометрика. Начальный курс: учебник. Москва: Дело. С. 257.

[6] Там же. С. 241–242.

использовать непосредственно для описания динамики коэффициентов прямых затрат, поскольку значения этих коэффициентов должны быть не отрицательны и (как правило) для них имеет место неравенство $\sum_{l=1}^{n} a_{ij}(t) < 1$ (т. е. валовая добавленная стоимость обычно положительна), а случайные процессы, описываемые моделями ARMA, могут принимать любые значения в силу нормальной распределенности случайных отклонений $\varepsilon_{ij}(t_k)$.

С помощью формул (18), (19), уравнений (24) и формулы Ито можно получить стохастические дифференциальные уравнения второго порядка для коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(t)$. Однако в этом нет необходимости, поскольку для численного моделирования коэффициентов прямых затрат удобнее использовать стохастические дифференциальные уравнения (24) для случайных процессов $z_{ij}(t)$ с последующим преобразованием соответствующих значений в коэффициенты прямых затрат по формулам (4).

Рассмотрим случай, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$, фигурирующие в уравнениях (24), имеют следующий вид:

$$\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t) = \alpha_{ij} - \beta_{ij} z_{ij}, \quad \psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t) = \gamma_{ij}, \tag{26}$$

где $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij} > 0$ и $\gamma_{ij}$ – некоторые константы (параметры).

В таком случае уравнения (24) принимают вид:

$$d\dot{z}_{ij}(t) = \left[\alpha_{ij} - \beta_{ij} z_{ij}(t)\right]dt + \gamma_{ij} dW_{ij}(t), \; j = \overline{1,n}, \; i \in I_j. \tag{27}$$

Отметим, что отношение $\alpha_{ij}/\beta_{ij}$ определяет среднее значение, около которого колеблются траектории процесса $z_{ij}(t)$, $\beta_{ij}$ – параметр, характеризующий интенсивность колебаний $z_{ij}(t)$ вокруг среднего значения $\alpha_{ij}/\beta_{ij}$, $\gamma_{ij}$ – параметр волатильности.

Замечание 6. В случае, когда $\gamma_{ij} = 0$, уравнение (10) описывает колебания гармонического осциллятора[7].

С помощью методики, изложенной Медведевым[8], можно получить аналитические решения уравнений (27). Указанные решения задаются формулой:

$$\begin{aligned} z_{ij}(t) &= z_{ij}(t_0)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right] + \frac{\dot{z}_{ij}(t_0)}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right] + \\ &+ \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\left\{1-\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right]\right\} + \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\int_{t_0}^{t}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-\tau)\right]dW_{ij}(\tau), \quad j=\overline{1,n}, \; i \in I_j. \end{aligned} \tag{28}$$

Продифференцировав равенство (28) по временно́му аргументу $t$, получим:

[7] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. 1965. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 2. Москва: Мир. С. 98.

[8] Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок: учебное пособие. 1999. Минск: БГУ. С. 119–136.

$$\dot{z}_{ij}(t) = -z_{ij}(t_0)\sqrt{\beta_{ij}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right] + \dot{z}_{ij}(t_0)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right] +$$
$$+\frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-t_0)\right] + \gamma_{ij}\int_{t_0}^{t}\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t-\tau)\right]dW_{ij}(\tau), \quad j=\overline{1,n},\ i\in I_j. \tag{29}$$

Замечание 7. В том, что формула (28) действительно дает решение для уравнения (27), можно убедиться, продифференцировав формулу (29) и подставив полученную формулу (и формулу (28)) в уравнение (27).

Замечание 8. Коэффициенты корреляции приращений винеровских процессов в стохастических дифференциальных уравнениях (24), используемых для описания динамики коэффициентов прямых затрат, а также параметры функций $\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$, фигурирующих в уравнениях (24) (например, параметры $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ и $\gamma_{ij}$ в случае функций вида (26)), можно оценить с помощью метода максимального правдоподобия на основе известных значений $a_{ij}(t_k)$ аналогично тому, как это сделано на с. 43–46 в статье Аксеня (2017) (для случая, когда динамика коэффициентов прямых затрат описывается с использованием стохастических дифференциальных уравнений первого порядка).

Покажем, как можно получить последовательность значений $a_{ij}(t_k)$ для моментов времени $t_k$, $k=\overline{0,N}$ (в будущем).

Поскольку в формулах (28) и (29) в качестве начального момента времени $t_0$ можно использовать любой момент времени, из указанных формул следует, что

$$z_{ij}(t_{k+1}) = z_{ij}(t_k)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \frac{\dot{z}_{ij}(t_k)}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\left\{1-\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]\right\} +$$
$$+\frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]dW_{ij}(t), \tag{30}$$

$$\dot{z}_{ij}(t_{k+1}) = -z_{ij}(t_0)\sqrt{\beta_{ij}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \dot{z}_{ij}(t_0)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] +$$
$$+\gamma_{ij}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]dW_{ij}(t), \tag{31}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Интеграл $\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]dW_{ij}(t)$ в формуле (30) определяет нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной обычному (т. е. не стохастическому) интегралу, в котором в качестве интегрируемой функции фигурирует квадрат подынтегральной функции данного стохастического интеграла (Пугачев, Синицын, 1990. С. 153). Следовательно,

$$\operatorname{var}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]dW_{ij}(t)\right] = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\left\{\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]\right\}^2 dt, \tag{32}$$

откуда получим:

$$\operatorname{var}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{ij}(t)\right] = \frac{\Delta t_k}{2} - \frac{\sin\left[2\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]}{4\sqrt{\beta_{ij}}}. \qquad (33)$$

Обозначим через $E_{t_k}$ и $\operatorname{var}_{t_k}$ операторы условного математического ожидания и условной дисперсии в момент времени $t_k$. В соответствии с формулами (30) и (33) условное распределение случайной величины $z_{ij}(t_{k+1})$ в момент времени $t_k$ является нормальным с параметрами:

$$E_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1})\right] = z_{ij}(t_k)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \frac{\dot z_{ij}(t_k)}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right] + \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\left\{1-\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]\right\}, \qquad (34)$$

$$\operatorname{var}_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1})\right] = \frac{\gamma_{ij}^2}{\beta_{ij}}\left\{\frac{\Delta t_k}{2} - \frac{\sin\left[2\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]}{4\sqrt{\beta_{ij}}}\right\}. \qquad (35)$$

Обозначим через $\rho_{ij}^{rs}$, $j=\overline{1,n}$, $i\in I_j$, $s=\overline{1,n}$, $r\in I_s$ коэффициенты корреляции приращений винеровских процессов $W_{ij}(t)$ и $W_{rs}(t)$, фигурирующих в уравнениях (24) (т. е. $\rho_{ij}^{rs} = \operatorname{corr}\left[\Delta W_{ij}(t), \Delta W_{rs}(t)\right]$, где $\Delta W_{ij}(t) = W_{ij}(t+\Delta t) - W_{ij}(t)$ и $\Delta W_{rs}(t) = W_{rs}(t+\Delta t) - W_{rs}(t)$).

Ковариация случайных величин $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{ij}(t)$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{rs}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{rs}(t)$ равна обычному интегралу, в котором в качестве интегрируемой функции фигурирует произведение подынтегральных функций соответствующих стохастических интегралов и коэффициента корреляции $\rho_{ij}^{rs}$ винеровских процессов (Там же. С. 154). Следовательно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{ij}(t), \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{rs}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{rs}(t)\right] = \\ &= \rho_{ij}^{rs}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right]\sin\left[\sqrt{\beta_{rs}}(t_{k+1}-t)\right] dt, \end{aligned} \qquad (36)$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{ij}(t), \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin\left[\sqrt{\beta_{rs}}(t_{k+1}-t)\right] dW_{rs}(t)\right] = \\ &= \rho_{ij}^{rs}\left\{\frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)} - \frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)}\right\}. \end{aligned} \qquad (37)$$

Замечание 9. Можно показать, что в случае когда $\beta_{rs} = \beta_{ij}$ в формуле (37) выражение, стоящее в фигурных скобках, должно быть заменено правой частью формулы (33).

Обозначим через $\mathrm{cov}_{t_k}$ оператор условной ковариации в момент времени $t_k$. В силу формул (30) и (37)

$$\mathrm{cov}_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1}), z_{rs}(t_{k+1})\right]=$$
$$=\rho_{ij}^{rs}\frac{\gamma_{ij}\gamma_{rs}}{\sqrt{\beta_{ij}\beta_{rs}}}\left\{\frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)}-\frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)}\right\}. \tag{38}$$

Замечание 10. В соответствии с замечанием 9 в случае когда $\beta_{rs}=\beta_{ij}$, в формуле (38) выражение, стоящее в фигурных скобках, должно быть выражением, стоящим в фигурных скобках в формуле (37).

В силу формулы (31) условное распределение случайной величины $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ в момент времени $t_k$ является нормальным, причем (аналогично приведенному выше выводу равенств (34) и (35)) для его параметров можно получить следующие формулы:

$$E_{t_k}\left[\dot{z}_{ij}(t_{k+1})\right]=-z_{ij}(t_0)\sqrt{\beta_{ij}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]+\dot{z}_{ij}(t_0)\cos\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]+\frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right], \tag{39}$$

$$\mathrm{var}_{t_k}\left[\dot{z}_{ij}(t_{k+1})\right]=\gamma_{ij}^2\left\{\frac{t_{k+1}-t_k}{2}+\frac{\sin\left[2\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]}{4\sqrt{\beta_{ij}}}\right\}. \tag{40}$$

С помощью равенства (31) можно получить также (аналогично соотношению (38)) формулу для условной ковариации случайных величин $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{rs}(t_{k+1})$

$$\mathrm{cov}_{t_k}\left[\dot{z}_{ij}(t_{k+1}), \dot{z}_{rs}(t_{k+1})\right]=\rho_{ij}^{rs}\gamma_{ij}\gamma_{rs}\left\{\frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)}+\frac{\sin\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)}\right\}. \tag{41}$$

Замечание 11. Можно показать, что в случае, когда $\beta_{rs}=\beta_{ij}$, в формуле (41) выражение, стоящее в фигурных скобках, должно быть заменено выражением, стоящим в фигурных скобках в равенстве (40).

Кроме того, с помощью равенств (30) и (31) можно получить (аналогично соотношению (38)) формулы для условной ковариации случайных величин $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{rs}(t_{k+1})$:

$$\mathrm{cov}_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1}), \dot{z}_{ij}(t_{k+1})\right]=\gamma_{ij}^2\frac{\left\{\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]\right\}^2}{2\beta_{ij}}, \tag{42}$$

$$\mathrm{cov}_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1}), \dot{z}_{rs}(t_{k+1})\right]=$$
$$=\rho_{ij}^{rs}\frac{\gamma_{ij}\gamma_{rs}}{\sqrt{\beta_{ij}}}\left\{\frac{\sqrt{\beta_{ij}}}{\beta_{ij}-\beta_{rs}}-\frac{\cos\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}-\sqrt{\beta_{rs}}\right)}-\frac{\cos\left[\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)\Delta t_k\right]}{2\left(\sqrt{\beta_{ij}}+\sqrt{\beta_{rs}}\right)}\right\}. \tag{43}$$

Замечание 12. Можно показать, что в случае когда $\beta_{rs} = \beta_{ij}$ вместо формулы (43) должна использоваться следующая формула:

$$\operatorname{cov}_{t_k}\left[z_{ij}(t_{k+1}), \dot{z}_{rs}(t_{k+1})\right] = \rho_{ij}^{rs}\gamma_{ij}^2 \frac{\left\{\sin\left[\sqrt{\beta_{ij}}\Delta t_k\right]\right\}^2}{2\beta_{ij}}. \tag{44}$$

Итак, при известных значениях $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$ случайные величины $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ распределены нормально с математическими ожиданиями, дисперсиями и ковариациями, определяемыми формулами (34), (35), (38)–(44). Следовательно, набор случайных величин $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ можно рассматривать как многомерную нормально распределенную случайную величину с известными параметрами. Для такой многомерной нормально распределенной случайной величины можно генерировать псевдослучайные числа (в частности, в пакете MatLab с помощью датчика mvnrnd многомерных нормальных псевдослучайных чисел).

Таким образом, зная значения для $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$, можно получить значения для $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$. Следовательно, при заданных начальных значениях $z_{ij}(t_0)$ и $\dot{z}_{ij}(t_0)$, начиная с $k=0$ и используя указанный алгоритм, можно найти значения $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ для всех $k=\overline{0,n-1}$ с помощью увеличения значение индекса $k$ на единицу на каждом шаге можно найти значения $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$. При этом начальные значения $z_{ij}(t_0)$ рассчитываются с помощью известных начальных значений в соответствии с формулой (19), т. е.

$$z_{ij}(t_0) = g_{ij}\left[a_{\bullet j}(t_0)\right], \quad j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{45}$$

Для того чтобы вывести формулу для расчета начальных значений $\dot{z}_{ij}(t_0)$, продифференцируем равенство (19) по временнóму аргументу $t$:

$$\dot{z}_{ij}(t) = \sum_{l \in I_{\partial j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial a_{lj}}\left[a_{\bullet j}(t)\right]\dot{a}_{lj}(t), \quad j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{46}$$

В силу равенства (46) начальные значения $\dot{z}_{ij}(t_0)$ можно найти с помощью заданных начальных значений $a_{ij}(t_0)$ и $\dot{a}_{ij}(t_0)$ по формуле:

$$\dot{z}_{ij}(t_0) = \sum_{l \in I_{\partial j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial a_{lj}}\left[a_{\bullet j}(t_0)\right]\dot{a}_{lj}(t_0), \quad j=\overline{1,n},\ i \in I_j. \tag{47}$$

В случае когда функции $g_{ij}$ определяются формулой (21), формула (47) принимает вид:

$$\dot{z}_{ij}(t_0) = \frac{\dot{a}_{ij}(t)}{a_{ij}(t)} + \left[\sum_{l \in I_j}\dot{a}_{lj}(t)\right] \Big/ \left[1 - \sum_{l \in I_j} a_{lj}(t)\right]. \tag{48}$$

В частном случае, когда число общее отраслей $n$ равно двум и при этом $I_1 = I_2 = \{1,\ 2\}$, формула (48) выглядит следующим образом:

$$\dot{z}_{ij}(t_0) = \frac{\dot{a}_{ij}(t)}{a_{ij}(t)} + \frac{\dot{a}_{1j}(t) + \dot{a}_{2j}(t)}{1 - a_{1j}(t) - a_{2j}(t)}. \tag{49}$$

Таким образом, для получения псевдослучайных значений для случайных $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$ можно использовать следующий алгоритм:

1) с помощью формул (45) и (47) находим начальные значения $z_{ij}(t_0)$ и $\dot{z}_{ij}(t_0)$;

2) устанавливаем $k=0$;

3) при уже найденных значениях $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$ используем формулы (34), (35), (38)–(44) для расчета соответствующих условных математических ожиданий, дисперсий и ковариаций (т. е. параметров многомерного нормального распределения для набора случайных величин $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$);

4) на основе полученных на 3-м шаге значений параметров генерируем псевдослучайные числа для набора случайных величин $z_{ij}(t_{k+1})$ и $\dot{z}_{ij}(t_{k+1})$ с использованием датчика многомерных нормальных псевдослучайных чисел (например, с помощью датчика mvnrnd в пакете MatLab);

5) если $k<n-1$, увеличиваем значение $k$ на единицу и переходим к шагу 3; если $k=n-1$, завершаем вычисления.

После нахождения значений $z_{ij}(t_k)$ и $\dot{z}_{ij}(t_k)$, $k=\overline{1,n}$, значения $a_{ij}(t_k)$, $k=\overline{1,n}$, рассчитываются в соответствии с формулой (18), т. е.

$$a_{ij}(t_k)=f_{ij}\left[z_{\bullet j}(t_k)\right],\ j=\overline{1,n},\ i\in I_j. \tag{50}$$

При уже известных матрицах $A(t_k)=\left[a_{ij}(t_k)\right]$ коэффициентов прямых затрат в соответствии с равенством (5) можно рассчитать матрицы $B(t_k)=\left[b_{ij}(t_k)\right]$ коэффициентов полных затрат по формуле:

$$B(t_k)=\left[I_n-A(t_k)\right]^{-1}. \tag{51}$$

### *Моделирование коэффициентов капиталоемкости приростов производства*

Коэффициенты капиталоемкости $r_{ij}(t)$ неотрицательны, причем некоторые из них всегда равны нулю, поскольку продукция некоторых отраслей может никогда не использоваться в качестве основного капитала некоторых других отраслей. Обозначим через $I'_j$ множество номеров отраслей, продукция которых используется при производстве продукции $j$-й отрасли в качестве основного капитала, т. е. для которых $r_{ij}(t)>0$. Для моделирования динамики коэффициентов $r_{ij}(t)$ мы предлагаем использовать стохастические дифференциальные уравнения, описывающие положительные случайные процессы. В частности, можно использовать следующие уравнения:

$$dr_{ij}(t)=\left[\eta_{ij}-\xi_{ij}r_{ij}(t)\right]dt+\zeta_{ij}r_{ij}(t)d\tilde{W}_{ij}(t),\ j=\overline{1,n},\ i\in I'_j. \tag{52}$$

где $\eta_{ij}>0$, $\xi_{ij}>0$ и $\zeta_{ij}$ – некоторые константы (параметры);

$\tilde{W}_{ij}(t)$, $j=\overline{1,n}$, $i \in I'_j$, – коррелированные между собой стандартные винеровские процессы (Пугачев, Синицын, 1990. С. 181–182).

Замечание 13. Случайный процесс $r_{ij}(t)$, описываемый уравнением (52), относится к классу процессов Орнштейна–Уленбека[9]. При этом отношение $\eta_{ij}/\xi_{ij}$ определяет среднее значение, около которого колеблются траектории процесса $r_{ij}(t)$, $\xi_{ij}$ – параметр, характеризующий интенсивность колебаний $r_{ij}(t)$ вокруг среднего значения $\eta_{ij}/\xi_{ij}$, а $\zeta_{ij}$ – параметр волатильности.

С помощью методики[10] можно получить аналитические решения уравнений (52). Указанные решения задаются формулой:

$$\begin{aligned} r_{ij}(t) = r_{ij}(t_0)\exp\left\{-\left(\xi_{ij}+\frac{1}{2}\zeta_{ij}^2\right)\left(t-t_0\right)+\zeta_{ij}\left[\tilde{W}_{ij}(t)-\tilde{W}_{ij}(t_0)\right]\right\}+ \\ +\xi_{ij}\int_{t_0}^{t}\exp\left\{-\left(\xi_{ij}+\frac{1}{2}\zeta_{ij}^2\right)\left(t-s\right)+\zeta_{ij}\left[\tilde{W}_{ij}(t)-\tilde{W}_{ij}(s)\right]\right\}ds. \end{aligned} \tag{53}$$

Параметры динамики коэффициентов $r_{ij}(t)$ (в частности параметры $\eta_{ij}$, $\xi_{ij}$ и $\zeta_{ij}$ в случае использования уравнений (52) для описания динамики указанных коэффициентов) можно оценить с помощью метода максимального правдоподобия на основе известных значений $r_{ij}(t_k)$ (для моментов времени $t_k$ в прошлом) аналогично тому, как это сделано в статье Аксеня (2017. С. 43–46). Методика прогнозирования коэффициентов $r_{ij}(t)$ аналогична представленной выше методике получения прогнозных значений для коэффициентов $a_{ij}(t)$ с помощью датчика случайных чисел.

### *Максимизация полезности для конечного потребления, чистого экспорта и темпов изменения выпуска отраслей*

Исходя из соображений экономического характера естественно считать, что государство, с одной стороны, заинтересовано в увеличении суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта, описываемых вектором $h(t)$, а с другой – в увеличении темпов изменений интенсивностей конечного выпуска, описываемых вектором $\dot{y}(t)$. При этом должен учитываться вектор $y(t)$ текущих интенсивностей конечного выпуска. Указанную заинтересованность можно моделировать с помощью максимизации уровня полезности $u$, зависящего от упомянутых векторов $h(t)$, $\dot{y}(t)$ и $y(t)$ (т. е. $u=u\left(h,\dot{y},y\right)$). Таким образом, будем считать, что в каждый момент времени $t$ при заданном векторе $y$ мы должны найти значения $h$ и $\dot{y}$, максимизирующие значение функции $u=u\left(h,\dot{y},y\right)$ при выполнении равенства (9), т. е. решить задачу

$$u\left(h,\dot{y},y\right)\to\max, \tag{54}$$

[9] Медведев Г.А. 2011. Математические основы финансовой экономики: учебник. Минск: БГУ. С. 107.

[10] Там же. С. 113–114.

$$\dot{y} = \left[ \left( I_n - A \right) R^{-1} - \dot{A} \left( I_n - A \right)^{-1} \right] y - \left( I_n - A \right) R^{-1} h \tag{55}$$

относительно переменных $h$ и $\dot{y}$ при заданном векторе $y$. (Здесь для краткости мы не указали момент времени $t$.)

Замечание 14. В рамках предлагаемого подхода функция полезности $u\left(h, \dot{y}, y\right)$ позволяет сравнивать между собой разные наборы $(h, \dot{y})$, вообще говоря, только при одном и том же векторе $y$.

Замечание 15. Пример функции полезности $u\left(h, \dot{y}, y\right)$, соответствующей описанным выше соображениям, приведен ниже в тексте настоящей статьи.

Обозначим через $\left(h^*, \dot{y}^*\right)$ оптимальное решение задачи (54), (55) (при условии его существования). Очевидно, что оно зависит от вектора $y$ (как от вектора параметров оптимизационной задачи), а также от экзогенно заданных матриц $A$, $\dot{A}$ и $R$, т. е.

$$h^* = h^*\left(y, A, \dot{A}, R\right), \tag{56}$$

$$\dot{y}^* = \dot{y}^*\left(y, A, \dot{A}, R\right). \tag{57}$$

Замечание 16. В левых частях формул (56), (57) обозначения $h^*$ и $\dot{y}^*$ используются для векторов, а в правых частях эти же обозначения используются для соответствующих функций. Такое использование обозначений (т. е. одних и тех же обозначений для разных объектов) довольно часто встречается в экономико-математической литературе (в отличие от «чисто» математической литературы).

Замечание 17. В силу равенства (55) функции $h^*\left(y, A, \dot{A}, R\right)$ и $\dot{y}^*\left(y, A, \dot{A}, R\right)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\dot{y}^*\left(y, A, \dot{A}, R\right) = \left[ \left( I_n - A \right) R^{-1} - \dot{A} \left( I_n - A \right)^{-1} \right] y - \left( I_n - A \right) R^{-1} h^*\left(y, A, \dot{A}, R\right), \tag{58}$$

$$h^*\left(y, A, \dot{A}, R\right) = \left[ I_n - R\left(I_n - A\right)^{-1} \dot{A}\left(I_n - A\right)^{-1} \right] y - R\left(I_n - A\right)^{-1} \dot{y}^*\left(y, A, \dot{A}, R\right). \tag{59}$$

### *Оптимальные случайные траектории интенсивностей конечного потребления, чистого экспорта и конечного выпуска отраслей*

Обозначим через $y^\circ(t)$ и $h^\circ(t)$, $t \ge t_0$ случайные траектории интенсивностей конечного выпуска и суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта при условии, что в каждый момент времени принимаются оптимальные решения, максимизирующие функцию полезности (54) (при заданном начальном векторе $y(t_0)$). В силу формулы (57) случайный процесс $y^\circ(t)$ является решением следующего векторного дифференциального уравнения:

$$\dot{y}^\circ(t) = \dot{y}^*\left[ y^\circ(t), A(t), \dot{A}(t), R(t) \right] \tag{60}$$

при заданном начальном векторе $y(t_0)$. При уже известной траектории $y^\circ(t)$ случайный процесс $h^\circ(t)$ определяется в соответствии с формулой (59), т. е.

$$h^\circ(t) = \left[ I_n - R(t)B(t)\dot{A}(t)B(t) \right] y^\circ(t) - R(t)B(t)\dot{y}^\circ(t). \tag{61}$$

Векторное дифференциальное уравнение (60) может решаться численно с использованием датчика псевдослучайных чисел (метод Монте-Карло), например, методом Эйлера (Пугачев, Синицын, 1990. С. 217). В результате получаются наборы (дискретновременных) реализаций для векторных случайных процессов $y^\circ(t)$ и $\dot{y}^\circ(t)$ (причем количество реализаций равно количеству прогонов модели). С помощью найденных реализаций случайных процессов $y^\circ(t)$ и $\dot{y}^\circ(t)$ можно рассчитать соответствующие траектории для случайных процессов $h^\circ(t)$ и $x^\circ(t)$ в соответствии с формулами (61) и (12). На основе уже известных реализаций для указанных случайных процессов можно найти соответствующие выборочные показатели (математические ожидания, дисперсии, интервальные прогнозы и др.).

При реализации предлагаемой методики возникают следующие проблемы:

выбор вида функции полезности (54), исходя из соображений экономического характера;

оценивание параметров выбранной функции полезности;

исследование задачи (54), (55) на предмет существования и единственности оптимального решения;

исследование векторного дифференциального уравнения (60) на предмет существования, единственности и неотрицательности (либо положительности) его решения $y^\circ(t)$ на интервале $[t_0, \infty)$ (при заданном начальном векторе $y(t_0)$).

Покажем, как исследуются указанные проблемы в случае, когда функция полезности (54) задана в явном виде.

### *Функция полезности в частном случае, ее свойства и оценивание параметров*

В качестве примера рассмотрим функцию полезности (54) следующего вида:

$$u(h, \dot{y}, y) = \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i h_i}{y_i} - \beta_i \exp\left( -\frac{\gamma_i \dot{y}_i}{y_i} \right) \right], \tag{62}$$

где $\alpha_i$, $\beta_i$ и $\gamma_i$ – экзогенно заданные положительные параметры, а вектор $y$ строго положителен.

Несложно показать, что функция полезности (62) соответствует приведенным в предыдущем параграфе соображениям, т. е. ее значение увеличивается при возрастании суммарных интенсивностей $h_i$, $i = \overline{1, n}$, конечного потребления и чистого экспорта и при возрастании темпов $\dot{y}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, изменении интенсивностей конечного выпуска. При этом в соответствии с замечанием 14 указанная функция предназначена для сравнения предпочтительности разных наборов $(h, \dot{y})$ только при одном и том же векторе $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ интенсивностей конечного выпуска. (Это значит, что вектор $y$ играет роль параметра функции полезности (62).)

Замечание 18. Выбор функции (62) в качестве примера функции полезности $u(h, \dot{y}, y)$ обусловлен прежде всего возможностью получения решения оптимизационной задачи (54), (55) в аналитическом виде (см. формулы (83), (84) ниже). Кроме того, данная функция полезности обладает свойствами, которые могут соответствовать (изложенным ниже) соображениям экономического характера.

Выясним экономический смысл коэффициентов $\alpha_i$, $\beta_i$ и $\gamma_i$. Обозначим через $\xi_i$ и $\eta_i$ долю суммарной интенсивности конечного потребления и чистого выпуска в интенсивности конечного выпуска и относительный темп изменения интенсивности конечного выпуска, т. е.

$$\xi_i = \frac{h_i}{y_i}, \ \eta_i = \frac{\dot{y}_i}{y_i}, \ i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{63}$$

(Если, например, $\xi_i = 0,7$, то это значит, что доля конечного потребления и чистого экспорта составляет 70% в конечном выпуске $i$-той отрасли; если $\eta_i = 0,04$, то интенсивность конечного выпуска увеличивается на 4% в год.)

Определим функцию полезности $\upsilon(\xi, \eta)$ следующим образом:

$$\upsilon(\xi, \eta) = \left[ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i - \beta_i \exp\left(-\gamma_i \eta_i\right) \right], \tag{64}$$

где $\xi = \left(\xi_1, \dots, \xi_n\right)^{\mathrm{T}}$ и $\eta = \left(\eta_1, \dots, \eta_n\right)^{\mathrm{T}}$.

Очевидно, что $u(h, \dot{y}, y) = \upsilon(\xi, \eta)$ при любых векторах $h$, $\dot{y}$, $y \in R^n_{++}$, $\xi$ и $\eta$, удовлетворяющих условиям (63). Следовательно, для сравнения разных векторов $(h, \dot{y})$ (при одном и том же векторе $y$; см. замечание 14) вместо функции полезности $u(h, \dot{y}, y)$ можно использовать функцию полезности $\upsilon(\xi, \eta)$.

Обозначим через $S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta)$ предельную норму замещения $\xi_i$ на $\xi_j$. (Если, например, $S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta) = 0,8$, то при уменьшении значения $\xi_i$ на 1% нужно увеличить значение $\xi_j$ на 0,8% для того, чтобы уровень полезности не изменился.)

В соответствии с материалом монографии Вэриана (Varian, 1992. P. 98) для предельной нормы замещения $S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta)$ справедлива формула

$$S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta) = \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_i}(\xi, \eta) \Big/ \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_j}(\xi, \eta). \tag{65}$$

Из равенства (64) очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_i}(\xi, \eta) = \alpha_i, \ i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{66}$$

В силу равенств (65), (66)

$$S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, \ i \in \{1, 2, \dots, n\}, \ j \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{67}$$

Следовательно, отношение коэффициентов $\alpha_i$ и $\alpha_j$ равно предельной норме замещения $\xi_i$ на $\xi_j$. При этом при использовании функции полезности (62) указанная предельная норма замещения постоянна (т. е. не зависит от вектора $(\xi, \eta)$).

Заметим, что в соответствии с формулой (62) параметры $\alpha_i$ определятся с точностью до постоянного положительного множителя (умножив функцию полезности (62) на произвольную положительную константу, получим эквивалентную функцию полезности). Поэтому (без ограничения общности) можно считать, что $\alpha_1 = 1$. Подставив это значение в формулы (67) при $j = 1$, получим:

$$\alpha_i = S_{\xi_i \xi_1}(\xi, \eta),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{68}$$

Следовательно, при $\alpha_1 = 1$ коэффициенты $\alpha_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ равны предельным нормам замещения $\xi_i$ на $\xi_1$. Формула (68) может использоваться для нахождения коэффициентов $\alpha_i$.

Обозначим через $S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta)$ предельную норму замещения $\xi_i$ на $\eta_j$. (Если, например, $S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta) = 1,2$, то при уменьшении значения $\xi_i$ на 1% нужно увеличить значение $\eta_j$ на 1,8% для того, чтобы уровень полезности не изменился.)

В соответствии с материалом монографии Вэриана (Varian, 1992. P. 98) для $S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta)$ справедлива формула

$$S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta) = \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_i}(\xi, \eta) \Big/ \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta_j}(\xi, \eta). \tag{69}$$

Из равенства (64) следует, что

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta_j}(\xi, \eta) = \beta_j \gamma_j \exp\left(-\gamma_j \eta_j\right),\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{70}$$

В силу равенств (66), (69), (70)

$$S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta) = \frac{\alpha_i}{\beta_j \gamma_j} \exp\left(\gamma_j \eta_j\right),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{71}$$

Из равенства (71) следует, что коэффициент $\gamma_j$ равен относительному темпу изменения предельной нормы замещения при изменении $\eta_j$. Действительно,

$$\frac{\partial S_{\xi_i \eta_j}}{\partial \eta_j}(\xi, \eta) \Big/ S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta) = \left[\frac{\alpha_i}{\beta_j} \exp\left(\gamma_j \eta_j\right)\right] \Big/ \left[\frac{\alpha_i}{\beta_j \gamma_j} \exp\left(\gamma_j \eta_j\right)\right] = \gamma_j. \tag{72}$$

При этом при использовании функции полезности (62) указанный относительный темп изменения постоянен (т. е. не зависит от вектора $(\xi, \eta)$).

В силу полученных выше результатов можно сделать вывод о целесообразности использования функции полезности вида (62) в случае, когда есть основания полагать о постоянстве предельных норм замещения $S_{\xi_i \xi_j}(\xi, \eta)$ и относительных темпах роста предельных норм замещения $S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta)$ при изменении $\eta_j$ (для любых $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Из равенств (71) следует, что для любых двух наборов $(\xi', \eta')$ и $(\xi'', \eta'')$ справедливо соотношение

$$S_{\xi_i \eta_j}(\xi'', \eta'') = S_{\xi_i \eta_j}(\xi', \eta') \exp\left[\gamma_j \left(\eta''_j - \eta'_j\right)\right], \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{73}$$

откуда вытекает, что

$$\gamma_j = \frac{\ln S_{\xi_i \eta_j}(\xi'', \eta'') - \ln S_{\xi_i \eta_j}(\xi', \eta')}{\eta''_j - \eta'_j}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{74}$$

Формула (74) может использоваться для нахождения коэффициентов $\gamma_j$.

Выразим коэффициенты $\beta_j$ из равенств (70):

$$\beta_j = \frac{\alpha_i}{\gamma_j S_{\xi_i \eta_j}(\xi, \eta)} \exp\left(\gamma_j \eta_j\right), \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{75}$$

Формула (75) может использоваться для нахождения коэффициентов $\beta_j$ при уже известных значениях коэффициентов $\alpha_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и $\gamma_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (рассчитанных, например, по формулам (68), (74)).

***Аналитическое решение задачи максимизации полезности в частном случае***

Заметим, что функция (62) вогнута относительно вектора переменных $(h, \dot{y})$ при любом фиксированном положительном векторе $y$. Следовательно (с учетом линейности ограничения (55)), условия первого порядка являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для оптимальности решения задачи (54), (55).

Используя равенство (55), выразим вектор $h$ через вектор $\dot{y}$:

$$h = \left[I_n - RB\dot{A}B\right] y - RB\dot{y}. \tag{76}$$

В силу соотношения (76) вектор $h$ можно рассматривать как функцию от вектора $\dot{y}$, и при этом

$$\frac{\partial h_i}{\partial \dot{y}_j} = -[RB]_{ij}, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{77}$$

где $[RB]_{ij}$ – элемент матрицы $RB$, находящийся на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца, т. е. $[RB]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} r_{il} b_{lj}$.

С учетом указанной зависимости вектора $h$ от вектора $\dot{y}$ условия первого порядка для задачи (54), (55) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{d\dot{y}_j} u(h^*, \dot{y}^*, y) = 0, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{78}$$

Поскольку (согласно правилам дифференцирования сложной функции) $\frac{d}{d\dot{y}_j}u(h,\dot{y},y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial h_i}(h,\dot{y},y)\frac{\partial h_i}{\partial \dot{y}_j}+\frac{\partial u}{\partial \dot{y}_j}(h,\dot{y},y)$, с учетом формулы (77) условия (78) могут быть записаны следующим образом:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial h_i}(h^*,\dot{y}^*,y)\left[RB\right]_{ij}+\frac{\partial u}{\partial \dot{y}_j}(h^*,\dot{y}^*,y)=0,\ j\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{79}$$

Заметим, что в случае функции полезности (62)

$$\frac{\partial u}{\partial h_i}(h,\dot{y},y)=\frac{\alpha_i}{y_i},\ \ \frac{\partial u}{\partial \dot{y}_i}(h,\dot{y},y)=\frac{\beta_i\gamma_i}{y_i}\exp\left(-\frac{\gamma_i\dot{y}_i}{y_i}\right). \tag{80}$$

Подставив формулы (80) в условия (79), получим

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{y_i}\left[RB\right]_{ij}+\frac{\beta_j\gamma_j}{y_j}\exp\left(-\frac{\gamma_j\dot{y}_j^*}{y_j}\right)=0,\ j\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{81}$$

В силу неотрицательности матриц $R$ и $B$ (в соответствии с неравенствами (6)) матрица $RB$ также неотрицательна. Кроме того, она не вырождена. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{y_i}\left[RB\right]_{ij}>0\ \ \forall j\in\{1,2,\ldots,n\} \tag{82}$$

при положительных значениях $y_i$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Решив уравнения (81) относительно $\dot{y}_j^*$ (с учетом неравенств (82)), будем иметь

$$\dot{y}_j^*=-\frac{y_j}{\gamma_j}\ln\left(\frac{y_j}{\beta_j\gamma_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{y_i}\left[RB\right]_{ij}\right),\ j\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{83}$$

В силу формул (76) и (83)

$$h_j^*=\sum_{l=1}^{n}\left\{\left[I_n-RB\dot{A}B\right]_{jl}+\frac{\left[RB\right]_{jl}}{\gamma_l}\ln\left(\frac{y_l}{\beta_l\gamma_l}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{y_i}\left[RB\right]_{il}\right)\right\}y_l,\ j\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{84}$$

Таким образом, в случае использования функции полезности (62) задача максимизации полезности (54), (55) имеет единственное решение, для которого справедливы формулы (83) и (84).

Замечание 19. Компоненты векторных функций $h^*\left(y,A,\dot{A},R\right)$ и $\dot{y}^*\left(y,A,\dot{A},R\right)$ определяются правыми частями формул (84) и (83)).

Замечание 20. На основе формулы (84) можно разработать методику оценивания параметров $\alpha_i$, $\beta_i$ и $\gamma_i$ функции полезности вида (62). Основная идея такой методики заключается в том, чтобы подобрать такие значения указанных параметров, при которых отклонения значений правой части равенства (84), рассчитываемых с помощью известных значений коэффициентов $r_{ij}(t_k)$ и $b_{ij}(t_k)$ и (также известных) значений $y_i(t_k)$ в моменты времени $t_k$, от известных значений $h_i(t_k)$, были как можно меньше (в частности, можно минимизировать сумму квадратов указанных отклонений).

***Существование и положительность оптимальных траекторий конечного выпуска отраслей в частном случае***

В соответствии с замечанием 19 в силу формулы (83) векторное дифференциальное уравнение (60) можно записать в виде следующей системы скалярных дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_j^{\circ}(t) = -\frac{y_j^{\circ}(t)}{\gamma_j} \ln\left( \frac{y_j^{\circ}(t)}{\beta_j \gamma_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{y_i^{\circ}(t)} \left[ R(t)B(t) \right]_{ij} \right), \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{85}$$

В частном случае, когда общее отраслей $n$ равно двум, система дифференциальных уравнений (41) принимает вид:

$$\dot{y}_1^{\circ}(t) = -\frac{y_1^{\circ}(t)}{\gamma_1} \ln\left( \frac{\alpha_1 \left[ r_{11}(t)b_{11}(t) + r_{12}(t)b_{21}(t) \right] + \alpha_2 \left[ r_{21}(t)b_{11}(t) + r_{22}(t)b_{21}(t) \right] y_1^{\circ}(t) / y_2^{\circ}(t)}{\beta_1 \gamma_1} \right), \tag{86}$$

$$\dot{y}_2^{\circ}(t) = -\frac{y_2^{\circ}(t)}{\gamma_2} \ln\left( \frac{\alpha_1 \left[ r_{11}(t)b_{12}(t) + r_{12}(t)b_{22}(t) \right] y_2^{\circ}(t) / y_1^{\circ}(t) + \alpha_2 \left[ r_{21}(t)b_{12}(t) + r_{22}(t)b_{22}(t) \right]}{\beta_2 \gamma_2} \right). \tag{87}$$

Покажем, что при любом заданном положительном начальном векторе $y(t_0)$ система дифференциальных уравнений (85) имеет единственное решение, причем оно положительно и определено на всем интервале $\left[ t_0, \infty \right)$.

Для этого вначале предположим, что существует положительный векторный случайный процесс $y^{\circ}(t) = \left[ y_1^{\circ}(t), \ldots, y_n^{\circ}(t) \right]$, $t \geq t_0$, для которого справедливы равенства (85). Тогда в силу равенств (85)

$$\frac{d}{dt} \ln\left[ y_j^{\circ}(t) \right] = -\frac{1}{\gamma_j} \ln\left( \frac{y_j^{\circ}(t)}{\beta_j \gamma_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{y_i^{\circ}(t)} \left[ R(t)B(t) \right]_{ij} \right), \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{88}$$

Обозначим $z_i^{\circ}(t) = \ln y_i^{\circ}(t)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $z^{\circ}(t) = \left[ z_1^{\circ}(t), \ldots, z_n^{\circ}(t) \right]$. Тогда соотношения (88) можно будет записать в следующем виде:

$$\dot{z}_j^{\circ}(t) = -\frac{1}{\gamma_j} \ln\left( \frac{1}{\beta_j \gamma_j} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[ R(t)B(t) \right]_{ij} \exp\left[ z_j^{\circ}(t) - z_i^{\circ}(t) \right] \right), \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{89}$$

Несложно заметить, что существование, единственность и положительность решения $y^{\circ}(t)$ системы дифференциальных уравнений (85) на интервале $\left[ t_0, \infty \right)$ (при заданном начальном векторе $y(t_0)$) равносильны существованию и единственности решения $z^{\circ}(t)$ системы дифференциальных уравнений (89) на указанном интервале (при заданном начальном векторе $z(t_0) = \left[ \ln y_i(t_0) \right]_{i=\overline{1,n}}$).

Запишем систему дифференциальных уравнений (89) в следующем виде (в соответствии с замечанием 3):

$$\dot{z}_j^{\circ}(t, \omega) = f_j\left[ t, z^{\circ}(t), \omega \right], \; \omega \in \Omega, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{90}$$

где функции $f_j\left( t, z, \omega \right)$ определены по формуле

$$f_j\left(t,z,\omega\right)=-\frac{1}{\gamma_j}\ln\left(\frac{1}{\beta_j\gamma_j}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\exp\left[z_j-z_i\right]\right). \qquad (91)$$

С помощью теоремы 2.1 монографии Левакова (2009. С. 69) (и с учетом материала на с. 72–73 указанной монографии) несложно показать, что для существования и единственности решения системы (90) на интервале $\left[t_0,\infty\right)$ при заданном начальном векторе $z(t_0)$ при каждом фиксированном элементарном событии $\omega\in\Omega$ достаточно существования таких неотрицательных функций $k_1(T,a,\omega)$ и $k_2(T,\omega)$, $T\geq t_0$, $a\geq 0$, $\omega\in\Omega$, что

1) $\left\|f\left(t,z',\omega\right)-f\left(t,z'',\omega\right)\right\|\leq k_1(T,a,\omega)\left\|z'-z''\right\|$ (локальное условие Липшица) (92)

$\forall\ T\geq t_0$, $t\leq T$, $a\geq 0$, $\left\|z'\right\|\leq a$, $\left\|z''\right\|\leq a$, $\omega\in\Omega$;

2) $\left\|f\left(t,z,\omega\right)\right\|\leq k_2(T,\omega)\left(1+\left\|z\right\|\right)$ (линейный порядок роста по $z$) (93)

$\forall\ T\geq t_0$, $t\leq T$, $z\in R^n$, $\omega\in\Omega$.

Здесь $f\left(t,z,\omega\right)=\left[f_j\left(t,z,\omega\right)\right]_{j=\overline{1,n}}$, а $\|\cdot\|$ – оператор векторной нормы.

В силу сделанного выше предположения о потраекторной дифференцируемости коэффициентов $a_{ij}(t)$ прямых затрат по аргументу $t$, указанные коэффициенты потраекторно непрерывны. Следовательно, (с учетом формулы (5)) коэффициенты $b_{ij}(t)$ полных затрат также потраекторно непрерывны. В дальнейшем также будем считать, что коэффициенты $r_{ij}(t)$ потраекторно непрерывны. Очевидно, что потраекторная непрерывность коэффициентов $b_{ij}(t)$ и $r_{ij}(t)$ обеспечивает потраекторную непрерывность частных производных $\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(t,z,\omega\right)$, $i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$, от функции (91) по векторному аргументу $(t,z)$ при $\forall t\geq t_0$ и $\forall z\in R^n$, что в свою очередь гарантирует выполнение локального условия Липшица (92).

Исследуем функцию (91) на предмет выполнения условия (93). Будем считать, что коэффициенты $b_{ij}(t)$ и $r_{ij}(t)$ потраекторно непрерывны.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\exp\left[z_j-z_i\right]\right)&\leq\ln\left[\left(\max_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\exp\left(2\left\|z\right\|\right)\right]=\\&=\ln\left(\max_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)+\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\right]+2\left\|z\right\|,\end{aligned} \qquad (94)$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\exp\left[z_j-z_i\right]\right)&\geq\ln\left[\left(\min_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\exp\left(-2\left\|z\right\|\right)\right]=\\&=\ln\left(\min_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)+\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}\right]-2\left\|z\right\|.\end{aligned} \qquad (95)$$

В силу непрерывности функций $\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}$ по аргументу $t$ при любом фиксированном $\omega\in\Omega$ (а также неотрицательности и невырожденности матрицы $R(t,\omega)B(t,\omega)$) функции $\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}$ принимают максимальные и минимальные значения на любом отрезке $[t_0,T]$, причем эти значения положительны, т. е. при любых $T\geq t_0$ и $\omega\in\Omega$ существуют значения

$$\pi_j^+(T,\omega)=\max_{t\in[t_0,T]}\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij},\quad \pi_j^-(T,\omega)=\min_{t\in[t_0,T]}\sum_{i=1}^{n}\left[R(t,\omega)B(t,\omega)\right]_{ij}, \tag{96}$$

и при этом

$$\pi_j^+(T,\omega)>0,\qquad \pi_j^-(T,\omega)>0\quad \forall T\geq t_0,\ \forall\omega\in\Omega. \tag{97}$$

Из соотношений (91), (94)–(97) следует, что при любых $T\geq t_0$, $t\leq T$, $z\in R^n$, $\omega\in\Omega$ справедливо неравенство

$$\left|f_j\left(t,z,\omega\right)\right|\leq\max\left\{\left|\ln\left(\max_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)\right|,\left|\ln\left(\min_{i=\overline{1,n}}\alpha_i\right)\right|\right\}+\max\left\{\left|\ln\pi_j^+(T,\omega)\right|,\left|\ln\pi_j^-(T,\omega)\right|\right\}+2\|z\|. \tag{98}$$

Существование функции $k_2(T,\omega)$, удовлетворяющей условию (93), очевидным образом следует из последнего неравенства.

Из изложенного следует, что в случае, когда функция полезности $u(h,\dot{y},y)$ имеет вид (62) и случайные коэффициенты $b_{ij}(t)$ и $r_{ij}(t)$ ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$) потраекторно непрерывны, векторное дифференциальное уравнение (60) (которое в данном случае принимает вид (85)) имеет единственное решение, причем оно положительно.

**Численное решение.** При численном решении векторного дифференциального уравнения (60) вначале нужно получить (псевдослучайные) значения $a_{ij}(t_k)$ для коэффициентов прямых затрат с использованием представленной выше методики и с их помощью рассчитать значения $b_{ij}(t_k)$ для коэффициентов полных затрат по формуле (5). Кроме того, нужно также получить значения $r_{ij}(t_k)$ для коэффициентов капиталоемкости приростов производства (в соответствии с описанной выше методикой). Затем при уже известных значениях $b_{ij}(t_k)$ и $r_{ij}(t_k)$ можно находить значения $y_j^{\circ}(t_k)$ для решения векторного дифференциального уравнения (60), используя известные алгоритмы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (с начальными условиями). В частности, в случае когда функция полезности имеет вид (62) (и векторное дифференциальное уравнение (60) можно записать в виде системы скалярных дифференциальных уравнений (85)) при использовании метода Эйлера (Пугачев, Синицын, 1990. С. 217) значения $y_j^{\circ}(t_k)$ находятся рекуррентным образом по формуле:

$$y_j^{\circ}(t_{k+1})=y_j^{\circ}(t_{k+1})-\frac{y_j^{\circ}(t_k)}{\gamma_j}\ln\left(\frac{y_j^{\circ}(t_k)}{\beta_j\gamma_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{y_i^{\circ}(t_k)}\left[R(t_k)B(t_k)\right]_{ij}\right)\Delta t_k, \tag{99}$$

начиная с $k=1$ при заданных начальных значениях $y_j^{\circ}(t_0)$.

Замечание 21. Значения $b_{ij}(t_k)$ и $r_{ij}(t_k)$ можно рассчитывать одновременно со значениями $y_j^{\circ}(t_k)$. Такой подход позволяет выбирать шаг $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ изменения временнóго аргумента $t$ в процессе численного решения (а не заранее).

Замечание 22. Для численного решения векторного дифференциального уравнения (60) можно использовать уже готовые программы, предназначенные для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности программу ode45 пакета MatLab. (Программа ode45 пакета MatLab позволяет (численно) решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большого размера (например, систему из 40 уравнений с таким же числом неизвестных функций), сопоставимого с числом отраслей в балансовых таблицах разных стран (в том числе с числом отраслей в таблицах «Затраты–Выпуск» Республики Беларусь)[11].

Поскольку процессы $b_{ij}(t)$ и $r_{ij}(t)$ являются случайными и при вычислении значений $b_{ij}(t_k)$ и $r_{ij}(t_k)$ используются датчики случайных чисел, получаемые значения $y_j^{\circ}(t_k)$ зависят от прогона модели (например, по рекуррентной формуле (99)). Прогнав модель достаточно большое количество раз, можно получить последовательности псевдослучайных значений $y_{lj}^{\circ}(t_k)$ (где индексом $l$ обозначен номер прогона). В соответствии с методом Монте-Карло на основе значений $y_{lj}^{\circ}(t_k)$ можно рассчитать выборочные характеристики для случайных величин $y_j^{\circ}(t_k)$ (такие как выборочные математические ожидания, дисперсии, ковариации, интервальные оценки и т. п.)

**Информационное обеспечение модели.** В соответствии с изложенным для численной реализации предложенной модели нужно вначале оценить следующие параметры:

1) параметры функций $\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$, используемых в стохастических дифференциальных уравнениях (24), описывающих динамику коэффициентов прямых затрат (например, параметры $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ и $\gamma_{ij}$ при использовании функций $\varphi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, \dot{z}_{ij}, t)$ вида (26)), а также коэффициенты корреляции $\rho_{ij}^{rs}$ приращений винеровских процессов в указанных стохастических дифференциальных уравнениях;

2) параметры, используемые в стохастических дифференциальных уравнениях, описывающих динамику коэффициентов капиталоемкости (например, параметры $\eta_{ij}$, $\xi_{ij}$ и $\zeta_{ij}$ в уравнениях (52)), а также коэффициенты корреляции приращений винеровских процессов в указанных уравнениях;

3) параметры функции полезности $u(h, \dot{y}, y)$ (например, параметры $\alpha_i$, $\beta_i$ и $\gamma_i$ при использовании функции полезности вида (18)).

Для оценивания параметров, указанных в пунктах 1 и 2, нужно знать значения коэффициентов $a_{ij}(t_k)$ прямых затрат и коэффициентов $r_{ij}(t_k)$ капиталоемкости приростов производства в некоторые моменты времени $t_k$ в прошлом. В свою очередь (как и для оценивания параметров динамической модели Леонтьева; см. замечание 1) для нахождения значений коэффициентов $a_{ij}(t_k)$

[11] Система таблиц «Затраты–Выпуск» Республики Беларусь за 2015 год.

нужно знать не только промежуточное потребление продукции одних отраслей другими отраслями, но и потребление основного капитала, производимого отдельно взятыми отраслями, в производственном процессе отдельно взятых отраслей, а для нахождения значений коэффициентов $r_{ij}(t_k)$ необходимы данные о чистых инвестициях продукции отдельно взятых отраслей в основной капитал других отдельно взятых отраслей. На основании анализа литературы автором сделан вывод о том, такая информация (с необходимой степенью детализации) отсутствует в сборниках, публикуемых Национальным статистическим комитетом Республики Беларусь[12]. Однако опыт сотрудничества с указанным комитетом в рамках выполнения ряда научно-исследовательских проектов позволяет полагать, что упомянутая информация имеется в базах данных указанного комитета и может быть предоставлена на основании соответствующего запроса. Следует также отметить, что данные точно таких же (указанных выше) видов используются для оценивания параметров (хорошо известной и достаточно широко используемой в мировой практике) динамической модели Леонтьева. Кроме того, предлагаемая модель может также использоваться для агрегированных отраслей (в частности, все фондообразующие отрасли можно объединить в одну), что может облегчить информационное обеспечение практической реализации модели. Для оценивания параметров функции полезности (см. п. 3) используются значения конечного потребления, чистого экспорта и конечного выпуска $y_i(t_k)$, которые могут быть получены из балансовых таблиц и упомянутых выше данных.

Итак, описанная в настоящей статье методика позволяет моделировать динамику интенсивностей конечного выпуска отраслей, суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта (а также валового выпуска отраслей, прямого и полного использования продукции одних отраслей при производстве продукции других отраслей и использования продукции одних отраслей для инвестирования в основной капитал других отраслей). При этом получаемые прогнозы носят стохастический характер, что дает возможность рассчитывать их вероятностные характеристики. Использование теории полезности позволяет на практике исследовать различные сценарии развития экономической системы, связанные с разными вариантами выбора норм замещения между отраслевыми показателями. В статье также обоснована математическая корректность представленной методики в случае функции полезности, заданной в явном виде, а именно доказаны существование и единственность решения задачи максимизации полезности и существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику конечного выпуска отраслей.

[12] Система таблиц «Затраты–Выпуск» Республики Беларусь за 2015 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

**Аксень Э.М.** 2017. Стохастическое моделирование коэффициентов прямых затрат. *Вестник БГЭУ*. № 5. С. 40–49. [Aksen E.M. 2017. Stochastic modeling of direct input coefficients. *Vestnik BGEU*. No. 5. PP. 40–49. (In Russ.)]

**Гранберг А.Г.** 1985. *Динамические модели народного хозяйства*. Москва: Экономика. [Granberg A.G. 1985. *Dynamic models of national economy*. Moscow: Ekonomika. (In Russ.)]

**Леваков А.А.** 2009. *Стохастические дифференциальные уравнения*. Минск: БГЭУ. [Levakov A.A. 2009. *Stochastic differential equations*. Minsk: BGEU. (In Russ.)]

**Леонтьев В.** 1958. *Исследования структуры американской экономики*. Москва: Государственное статистическое издательство. [Leontief V. 1958. *Studies in the structure of the American economy*. Moscow: Gosudarstvennoye statisticheskoye izdatelstvo. (In Russ.)]

**Пугачев В.С., Синицын И.Н.** 1990. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*. Москва: Наука. [Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. 1990. *Stochastic differential systems. Analysis and filtration*. Moscow: Nauka. (In Russ.)]

**Miller R.E., Blair P.D.** 2009. *Input-Output Analysis*. New York: Cambridge University Press.

**Varian H.R.** 1992. *Microeconomic Analysis*. New York: Norton.

In citation: *Belorusskiy Ekonomicheskiy zhurnal*. 2018. No 4. PP. 123–147.

*Belarusian Economic Journal*. 2018. No 4. PP. 123–147.

# MODELING OF SECTORAL INDICATORS DYNAMICS WITH THE APPLICATION OF UTILITY THEORY

**Ernest Aksen[1]**

*Author affiliation:* [1] Belarus State Economic University (Minsk, Belarus).

*Corresponding author*: Ernest Aksen (eaksen@mail.ru).

**ABSTRACT.** The paper presents a methodology for the modeling of the dynamics of final sectoral output, final consumption and net exports based on the application of the utility theory and differential equations. The application of the utility theory allows to compare the levels of the final consumption and net exports with the rates of the change in the final sectoral output, as well as to choose the most acceptable options. The rates of the change in the final sectoral output identified in such a way determine the final output dynamics. The suggested methodology enables to make projections for sectoral indicators at various scenarios related to the choice of the substitution rates of the relevant indicators. The projections being made are stochastic, which allows to take into account the uncertainty factor while modeling the economic system's dynamics.

**KEYWORDS:** final output, dynamics, random process, utility function, marginal rate of substitution.

**JEL-code:** C67.

*Received 28.12.2017*

■ ■ ■