ЭКОНОМИКА

УДК 330.44

E. Aksen
BSEU (Minsk)

MODELING OF INDUSTRY OUTPUTS' DYNAMICS USING THE THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

The paper presents a methodology for the stochastic modeling of dynamics of economic system's industry outputs and other relevant indicators. The methodology is based on the use of a system of the third-order ordinary differential equations taking into account the fluctuational nature of the dynamics of changes in gross outputs and also on the use of coefficients reflecting proportions of unit gross investments into different industries as well as coefficients describing the dependence of changes in gross outputs on net investments into the relevant industries. The mathematical correctness of the presented methodology is validated.

Keywords: *modeling; dynamics; gross output; investments; differential equation; input-output model; relative rate; fluctuation; industry; proportion; coefficient.*

Э. М. Аксень
доктор экономических наук, доцент
БГЭУ (Минск)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЫПУСКОВ ОТРАСЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье представлена методика моделирования динамики выпусков отраслей экономической системы и связанных с ними показателей. Методика основана на использовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, учитывающих колебательный характер динамики изменений валовых выпусков, а также на использовании коэффициентов, отражающих пропорции удельных валовых инвестиций в разные отрасли, и коэффициентов, описывающих зависимость изменений валовых выпусков отраслей от чистых инвестиций в данные отрасли. Обоснована математическая корректность представленной методики.

Ключевые слова: *моделирование; динамика; валовой выпуск; инвестиции; дифференциальное уравнение; балансовая модель; относительная скорость; колебание; отрасль; пропорция; коэффициент.*

При моделировании динамики валовых выпусков отраслей экономики ключевую роль играют инвестиции в основной капитал указанных отраслей. При этом можно заметить, что динамика изменения выпусков отраслей носит колебательный характер. В частности, валовой выпуск отрасли может падать несмотря на положительное значение чистых инвестиций в рассматриваемую отрасль. Это является основой разработанной нами и представленной в данной статье методики, в соответствии с которой используются соотношения, аналогичные дифференциальному уравнению для гармонических колебаний [1, с. 98]. Как и динамическая модель Леонтьева [2, с. 122–124; 3, с. 68–74], представленная в настоящей статье модель использует основные балансовые соотношения [3, с. 18–20; 4, с. 371–375; 5, с. 11–14]. Однако в отличие от подхода, используемого в динамической модели Леонтьева, мы предлагаем моделировать динамику отраслей на основе информации о размере инвестиций в отрасли национальной экономики без детализации о том, продукция каких именно отраслей используется для инвестиций (что значительно упрощает информационное обеспечение модели). Для этого мы используем коэффициенты, отражающие пропорции удельных валовых инвестиций в разные отрасли (в расчете на валовые выпуски соответствующих отраслей), а также коэффициенты, описывающие зависимость изменений валовых выпусков отраслей от чистых инвестиций в данные отрасли.

Коэффициенты пропорций инвестирования. Пусть n — общее количество отраслей экономической системы. Обозначим через $x_i(t)$ интенсивность (скорость) производства валового выпуска i-й отрасли в момент времени t, через $x(t)$ — вектор-столбец значений $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, (т.е. $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, где верхний индекс T означает транспонирование), через $v_{ij}(t)$ — интенсивность валового инвестирования продукции вида i в основной капитал отрасли j в момент времени t, через $v_{*j}(t)$ — интенсивность валового инвестирования продукции всех видов в основной капитал отрасли j

$$v_{*j}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}(t). \tag{1}$$

Обозначим через $\alpha_i(t)$ следующее отношение:

$$\alpha_i(t) = \frac{v_{*i}(t) / x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} v_{*j}(t) / x_j(t)}. \tag{2}$$

Отметим, что из равенства (2) следуют соотношения

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)} = \frac{v_{*i}(t) / x_i(t)}{v_{*j}(t) / x_j(t)}, \qquad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

т.е. значение $\dfrac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)}$ равно отношению валовых инвестиций в i-ю отрасль в расчете на единицу валового выпуска i-й отрасли к валовым инвестициям в j-ю отрасль в расчете на единицу валового выпуска j-й отрасли.

В силу соотношений (3) коэффициенты $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, описывают пропорции удельных валовых инвестиций в разные отрасли (в расчете на валовые выпуски соответствующих отраслей).

Отметим, что из равенства (2) вытекает также следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = 1. \tag{4}$$

Выразив $v_{*i}(t)$ из равенства (2) при $j = 1$, получим

$$v_{*i}(t) = \frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t) x_1(t)} \alpha_i(t) x_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Обозначим через $v_*(t)$ интенсивность валового инвестирования всех видов продукции во все отрасли экономической системы. Отметим, что в соответствии с формулой (1) для $v_*(t)$ справедливо равенство

$$v_*(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{*j}(t). \tag{6}$$

Просуммировав соотношения (5) по индексу i, с учетом формулы (6) будем иметь

$$v_*(t) = \frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t)x_1(t)} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(t)x_i(t). \tag{7}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t)x_1(t)} = \frac{v_*(t)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t)}. \tag{8}$$

Подставив правую часть равенства (8) в соотношение (5), получим

$$v_{*i}(t) = \frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)x_j(t)} v_*(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений для динамики выпусков отраслей. Обозначим через $d_i(t)$ интенсивность потребления основного капитала i-й отрасли (при производстве продукции i-го вида), через $d(t)$ — вектор-столбец значений $d_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ (т.е. $d(t) = [d_1(t),\ldots,d_n(t)]^T$), через $g_i(t)$ — интенсивность чистого инвестирования всех видов продукции в основной капитал i-й отрасли, через $g(t)$ — вектор-столбец значений $g_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Отметим, что

$$g_i(t) = v_{*i}(t) - d_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Обозначим через $\dot{x}_i(t)$ мгновенную скорость изменения интенсивности производства валового выпуска i-й отрасли. Математически значение $\dot{x}_i(t)$ равно производной от $x_i(t)$ по временному аргументу t (т.е. $\dot{x}_i(t) = \frac{dx}{dt}(t)$). Заметим, что значение $\dot{x}_i(t) / x_i(t)$ — это относительная скорость изменения интенсивности производства валового выпуска i-й отрасли, а $g_i(t) / x_i(t)$ — относительная (удельная) интенсивность чистого инвестирования в основной капитал i-й отрасли.

Естественно считать, что относительная скорость изменения значения $\dot{x}_i(t) / x_i(t)$ увеличивается при увеличении значения $g_i(t) / x_i(t)$ и при этом когда значение $\dot{x}_i(t) / x_i(t)$ становится слишком большим, указанная скорость начинает уменьшаться. В соответствии с этими соображениями будем считать, что соответствующие значения взаимосвязаны следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}\right] = \beta_i(t)\frac{g_i(t)}{x_i(t)} - \gamma_i(t)\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

где $\beta_i(t)$ и $\gamma_i(t)$ — некоторые положительные параметры (вообще говоря, зависящие от временного аргумента t).

Замечание 1. Для того чтобы прояснить экономический смысл соотношений (11), рассмотрим частный случай, когда удельная интенсивность чистого инвестирования $g_i(t) / x_i(t)$ постоянна и равна λ_i, и при этом коэффициенты $\beta_i(t)$ и $\gamma_i(t)$ постоянны. Тогда, обозначив относительную скорость $\dot{x}_i(t) / x_i(t)$ через $y(t)$, равенство (11) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2}(t) = \beta_i\lambda - \gamma_i y_i(t). \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение (12) описывает колебания гармонического осциллятора [1, с. 98]. При этом что отношение $\beta_i\lambda / \gamma_i$ определяет среднее значение, около которого колеблется значение $y_i(t)$, а γ_i — параметр, характеризующий интенсивность этих колебаний, отметим, что в соответствии с уравнением (12) относительная скорость $y_i(t)$ изменения интенсивности производства валового выпуска i-й отрасли может быть отрицательной даже при положительной интенсивности чистого инвестирования λ.

Пусть $\delta_i(t)$ — коэффициент потребления основного капитала i-й отрасли

$$\delta_i(t) = \frac{d_i(t)}{x_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Заметим, что из равенств (13) следует

$$d_i(t) = \delta_i(t) x_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Подставив формулы (9) и (13) в равенства (10), получим

$$g_i(t) = \frac{\alpha_i(t) x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) x_j(t)} v_*(t) - \delta_i(t) x_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Отметим, что наряду с формулой (6) для значения $v_*(t)$ справедлива также следующая формула:

$$v_*(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{i*}(t), \tag{16}$$

где $v_{i*}(t)$ — интенсивность валового инвестирования i-го вида продукции в основной капитал всех отраслей (т.е. $v_{i*}(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}(t)$).

Обозначим через $v_{\bullet *}(t)$ вектор-столбец значений $v_{i*}(t), i = \overline{1, n}$ (т.е. $v_{\bullet *}(t) = [v_{1*}(t), \ldots, v_{n*}(t)]^T$), через $h_i(t)$ — суммарную интенсивность конечного потребления и чистого экспорта продукции i-го вида и через $h(t)$ — вектор-столбец значений $h_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. В соответствии с [3, с. 18–20; 4, с. 371–375; 5, с. 11–14] основные балансовые соотношения в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$x(t) = A(t)x(t) + v_{\bullet *}(t) + h(t), \tag{17}$$

где $A(t) = [a_{ij}(t)]$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$) — матрица коэффициентов интенсивностей прямых затрат в момент времени t (коэффициент $a_{ij}(t)$ равен интенсивности использования продукции вида i в качестве оборотного капитала отрасли j в расчете на производство единицы продукции отрасли j в момент времен t).

Методика стохастического моделирования динамики коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, представлена в статье [6].

Выразим вектор $v_{\bullet *}(t)$ из матричного равенства (17)

$$v_{\bullet *}(t) = [I_n - A(t)]x(t) - h(t). \tag{18}$$

Предположим, что вектор $h(t) = [h_1(t), \ldots, h_n(t)]^T$ суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта зависит от вектора $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$ валовых выпусков, причем указанная зависимость описывается следующей формулой

$$h(t) = H(t)x(t), \tag{19}$$

где $H(t)$ — квадратная матрица размером $n \times n$ (вообще говоря, зависящая от временного аргумента t).

Подставив формулу (19) в соотношение (18), получим

$$v_{\bullet *}(t) = [I_n - A(t) - H(t)]x(t). \tag{20}$$

В соответствии с равенством (16) будем иметь

$$v_{*}(t) = 1_n^T[I_n - A(t) - H(t)]x(t), \tag{21}$$

где 1_n^T — вектор-строка, состоящая из n единиц.

Подставим формулу (21) в равенства (15)

$$g_i(t) = \frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} 1_n^T[I_n - A(t) - H(t)]x(t) - \delta_i(t)x_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{22}$$

Подставив последнюю формулу в соотношение (11), получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}\right] = \beta_i(t)\left\{\frac{\alpha_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} 1_n^{\mathrm{T}}[I_n - A(t) - H(t)]x(t) - \delta_i(t)\right\} - \gamma_i(t)\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Равенства (23) можно рассматривать в качестве системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. При экзогенно заданных векторах $x(t_0) = [x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)]^T$, $\dot{x}(t_0) = [\dot{x}_1(t_0),\ldots,\dot{x}_n(t_0)]^T$, $\ddot{x}(t_0) = [\ddot{x}_1(t_0),\ldots,\ddot{x}_n(t_0)]^T$ интенсивностей валового выпуска и его (первой и второй) производных в начальный момент времени t_0 система дифференциальных уравнений (23) определяет траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \geq t_0$ (при выполнении некоторых условий для процессов $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$; см. ниже).

Замечание 2. В случае когда процессы $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ являются случайными, решение системы дифференциальных уравнений (23) (а также других дифференциальных уравнений, фигурирующих в настоящей статье) будем понимать как потраекторное решение. Это значит, что для всех элементарных событий $\omega \in \Omega$ (где Ω — множество всех элементарных событий) имеют место соотношения:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\dot{x}_i(t,\omega)}{x_i(t,\omega)}\right] = \beta_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)x_j(t,\omega)} 1_n^T[I_n - A(t,\omega) - H(t,\omega)]x(t,\omega) - \delta_i(t,\omega)\right\} - \gamma_i(t,\omega)\frac{\dot{x}_i(t,\omega)}{x_i(t,\omega)}, \ \forall t \geq t_0, \ i = \overline{1,n}. \tag{24}$$

При таком подходе исследование дифференциальных уравнений со случайными процессами сводится к исследованию детерминированных дифференциальных уравнений (для которых можно использовать соответствующие широко известные результаты).

В дальнейшем будем считать, что процессы $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ (а следовательно, и $x(t)$) являются случайными. (Для краткости в некоторых случаях мы не будем указывать элементарное событие в списке аргументов соответствующих случайных процессов.)

Существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений. Покажем, что при любом заданном положительном начальном векторе $x(t_0) = [x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)]^T$ система дифференциальных уравнений (23) имеет единственное решение, причем оно положительно и определено на всем интервале $[t_0,\infty)$.

Для этого вначале предположим, что существует положительный векторный случайный процесс $x(t) = [x_1(t),\ldots,x_n(t)]^T$, $t \geq t_0$, для которого справедливы равенства (23).

Обозначим $z_i(t) = \ln x_i(t)$, $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_n(t)]^T$ и $\exp z(t) = [\exp z_1(t), \ldots, \exp z_n(t)]^T$. Тогда в силу равенств (23)

$$\frac{d^3 z_i}{dt^3}(t) = \beta_i(t)\left\{\frac{\alpha_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\exp z_j(t)} 1_n^T[I_n - A(t) - H(t)]\exp z(t) - \delta_i(t)\right\} - \gamma_i(t)\frac{dz_i}{dt}(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{25}$$

Несложно заметить, что существование, единственность и положительность решения $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$ системы дифференциальных уравнений (23) на интервале $[t_0, \infty)$, (при заданном начальном векторе $x(t_0)$) равносильны существованию и единственности решения $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_n(t)]^T$ системы дифференциальных уравнений (25) на указанном интервале (при заданном начальном векторе $z(t_0) = [\ln x_1(t_0), \ldots, \ln x_n(t_0)]^T$).

Запишем систему дифференциальных уравнений (25) в следующем виде (в соответствии с замечанием 2):

$$\frac{d^3 z_i}{dt^3}(t,\omega) = f_i[t, z(t), \dot{z}(t), \omega], \quad i = \overline{1,n}, \tag{26}$$

где функции $f_i(t, z, \dot{z}, \omega)$, $i = \overline{1,n}$, определены по формуле

$$f_i(t, z, \dot{z}, \omega) = \beta_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j} 1_n^T[I_n - A(t,\omega) - H(t,\omega)]\exp z - \delta_i(t,\omega)\right\} - \gamma_i(t,\omega)\dot{z}_i. \tag{27}$$

Заметим, что система дифференциальных уравнений (26) третьего порядка равносильна следующей системе первого порядка:

$$\frac{d\ddot{z}_i}{dt}(t,\omega) = f_i[t, z(t,\omega), \dot{z}(t,\omega), \omega], \quad i = \overline{1,n}, \tag{28}$$

$$\frac{d\dot{z}_i}{dt}(t,\omega) = \ddot{z}_i(t,\omega), \quad i = \overline{1,n}, \tag{29}$$

$$\frac{dz_i}{dt}(t,\omega) = \dot{z}_i(t,\omega), \quad i = \overline{1,n} \tag{30}$$

относительно (неизвестных) функций $z(t,\omega)$, $\dot{z}_i(t,\omega)$, $\ddot{z}_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим через $f(t,z,\omega)$ векторную функцию с компонентами $f_i(t,z,\omega)$ (т.е. $f(t,z,\omega) = [f_i(t,z,\omega)]_{i=\overline{1,n}}$). С помощью теоремы 2.1 монографии [7, с. 69], а также с учетом материала указанной монографии, несложно показать, что для существования и единственности решения системы (28)–(30) (а следовательно, и системы (26)) на интервале $[t_0, \infty)$ при заданном начальном векторе $z(t_0)$ при каждом фиксированном элементарном событии $\omega \in \Omega$ достаточно существования таких неубывающих по аргументу T функций $k_1(T,a,\omega)$ и $k_2(T,\omega)$, $T \geq t_0$, $a \geq 0$, $\omega \in \Omega$, что

1) $\left\| f(t,z',\dot{z}',\omega) - f(t,z'',\dot{z}',\omega)\right\| \leq k_1(T,a,\omega)\left(\left\|z' - z''\right\| + \left\|\dot{z}' - \dot{z}''\right\|\right)$ (31)

$\forall\ T \geq t_0, t \leq T, a \geq 0, \left\|z'\right\| \leq a, \left\|z''\right\| \leq a, \left\|\dot{z}'\right\| \leq a, \left\|\dot{z}''\right\| \leq a, \omega \in \Omega$ (локальное условие Липшица);

2) $\left\|f(t,z,\dot{z},\omega)\right\| \leq k_2(T,\omega)\left(1 + \left\|z\right\| + \left\|\dot{z}\right\|\right)$ (32)

$\forall\ T \geq t_0$, $t \leq T$, $z \in R^n$, $\omega \in \Omega$ (линейный порядок роста по z).

Здесь $\|\cdot\|$ — оператор векторной нормы.

В дальнейшем будем считать, что случайные процессы $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ потраекторно непрерывны. Очевидно, что потраекторная непрерывность указанных случайных процессов обеспечивает потраекторную непрерывность частных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(t,z,\dot z,\omega)$ и $\dfrac{\partial f_i}{\partial \dot z_j}(t,z,\dot z,\omega)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, функций (27) по векторному аргументу $(t,z,\dot z)$ при любом $\omega\in\Omega$, что в свою очередь гарантирует выполнение локального условия Липшица (31).

Исследуем функцию $f(t,z,\omega)=[f_i(t,z,\omega)]_{i=\overline{1,n}}$ на предмет выполнения условия (32).

Введем следующие обозначения:

$$\beta^+(T,\omega)=\max\left\{\gamma_i(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}\right\}, \tag{33}$$

$$\gamma^+(T,\omega)=\max\left\{\gamma_i(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}\right\}, \tag{34}$$

$$\alpha^+(T,\omega)=\max\left\{\alpha_i(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}\right\}, \tag{35}$$

$$\alpha^-(T,\omega)=\min\left\{\alpha_i(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}\right\}, \tag{36}$$

$$\delta^+(T,\omega)=\max\left\{\delta_i(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}\right\}, \tag{37}$$

$$A^+(T,\omega)=\max\left\{a_{ij}(t,\omega)\,\middle|\,t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n}\right\}, \tag{38}$$

$$H^+(T,\omega)=\max\left\{\left|H_{ij}(t,\omega)\right|:t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n}\right\}. \tag{39}$$

Отметим, что потраекторная непрерывность случайных процессов $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ обеспечивает существование значений (33)–(39). При этом в силу положительности случайных процессов $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, значения (33)–(37) положительны, а из неотрицательности значений $a_{ij}(t,\omega)$ и $\left|H_{ij}(t,\omega)\right|$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, следует неотрицательность значений (38), (39).

Обозначим через $M(T,\omega)$ максимальное из значений $\beta^+(T,\omega)$, $\gamma^+(T,\omega)$, $\alpha^+(T,\omega)$, $1/\alpha^-(T,\omega)$, $\delta^+(T,\omega)$, $A^+(T,\omega)$, $H^+(T,\omega)$. Несложно заметить, что функция $M(T,\omega)$ положительна, не убывает по аргументу T, и при этом имеют место следующие неравенства:

$$\beta_i(T,\omega)\le M(T,\omega),\quad \gamma_i(T,\omega)\le M(T,\omega),\quad \frac{1}{M(T,\omega)}\le\alpha_i(t,\omega)\le M(T,\omega), \tag{40}$$

$$\delta_i(t,\omega)\le M(T,\omega),\quad a_{ij}(t,\omega)\le M(T,\omega),\quad \left|H_{ij}(t,\omega)\right|\le M(T,\omega) \tag{41}$$

при любых $T\ge t_0$, $t\le T$, $\omega\in\Omega$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда

$$\left|\beta_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j}1_n^T[I_n-A(t,\omega)-H(t,\omega)]\exp z-\delta_i(t,\omega)\right\}-\gamma_i(t,\omega)\dot z_i\right|\le$$

$$\le\beta_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j}1_n^T\Big[I_n+A(t,\omega)+\left|H(t,\omega)\right|\Big]\exp z+\delta_i(t,\omega)\right\}+\gamma_i(t,\omega)\left|\dot z_i\right|\le$$

$$\le M(T,\omega)\left\{\frac{M^2(T,\omega)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\exp z_j}(1+2nM)\sum_{j=1}^{n}\exp z_j+M(T,\omega)\right\}+M(T,\omega)\left|\dot z_i\right|=$$

$$=M^3(T,\omega)[1+2nM(T,\omega)]+M^2(T,\omega)+M(T,\omega)\left|\dot z_i\right|,$$

где J_n — матрица единиц размера $n\times n$ (т.е. матрица, каждый элемент которой равен единице).

Итак (с учетом обозначения (27)), мы показали, что при выполнении неравенств (40), (41) справедливо соотношение

$$\left|f_i(t, z, \dot{z}, \omega)\right| \le M^3(T,\omega)[1 + 2nM(T,\omega)] + M^2(T,\omega) + M(T,\omega)\left|\dot{z}_i\right| \quad (42)$$

при любых $T \ge t_0$, $t \le T$, $z \in R^n$, $\omega \in \Omega$, $i = \overline{1,n}$, отсюда следует неравенство

$$\left\|f(t, z, \dot{z}, \omega)\right\| \le \left\{M^3(T,\omega)[1 + 2nM(T,\omega)] + M^2(T,\omega) + M(T,\omega)\right\}\sqrt{n}\left(1 + \left\|\dot{z}_i\right\|\right). \quad (43)$$

Следовательно, условие (32) выполняется при функции $k_2(T,\omega)$, равной правой части неравенства (43).

Таким образом, в случае когда случайные процессы $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ потраекторно непрерывны, система дифференциальных уравнений (26) имеет единственное решение при любом начальном условии. Следовательно, в соответствии с изложенным выше потраекторная непрерывность указанных случайных процессов обеспечивает существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений (23) при любом положительном векторе $x(t_0) = [x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)]^T$ интенсивностей валового выпуска отраслей в начальный момент времени t_0.

Описанная в настоящей статье методика позволяет моделировать динамику валовых выпусков отраслей экономики и связанных с ними показателей (таких как конечные выпуски отраслей, прямое и полное использование продукции одних отраслей при производстве продукции других отраслей, валовое и чистое инвестирование в разные отрасли, суммарное конечное потребление и чистый экспорт продукции разных отраслей). При этом допускается случай, когда получаемые прогнозы носят стохастический характер, что дает возможность рассчитывать их вероятностные характеристики. Для такого (стохастического) случая нами доказаны существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих динамику валовых выпусков, что обосновывает корректность численного прогнозирования валовых выпусков с помощью указанной системы уравнений.

Источники

1. *Фейнман, Р.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М. : Мир, 1965. — 166 с.

Feynman, R. Feynmanovskie lektsii po fizike. Vyp. 2 / R. Feynman, R. Leyton, M. Sends. — M. : Mir, 1965. — 166 s.

2. *Гранберг, А. Г.* Динамические модели народного хозяйства / А. Г. Гранберг. — М. : Экономика, 1985. — 240 с.

Granberg, A. G. Dinamicheskie modeli narodnogo khozyaystva / A. G. Granberg. — M. : Ekonomika, 1985. — 240 s.

3. Исследования структуры американской экономики / В. Леонтьев [и др.]. — М. : Гос. стат. изд-во, 1958. — 640 с.

Issledovaniya struktury amerikanskoy ekonomiki / V. Leont'ev [i dr.]. — M. : Gos. stat. izd-vo, 1958. — 640 c.

4. Экономико-математические методы и модели / Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Минск : БГЭУ, 1999. — 413 с.

Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli / N. I. Kholod [i dr.] ; pod obshch. red. A. V. Kuznetsova. — Minsk : BGEU, 1999. — 413 s.

5. *Miller, R. E.* Input-Output Analysis / R. E. Miller, P. D. Blair. — New York : Cambridge Univ. Press, 2009. — 750 p.

6. *Аксень, Э. М.* Стохастическое моделирование коэффициентов прямых затрат / Э. М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2017. — № 5. — С. 40–49.

Aksen', E. M. Stokhasticheskoe modelirovanie koeffitsientov pryamykh zatrat / E. M. Aksen' // Vesn. Belarus. dzyarzh. ekan. un-ta. — 2017. — № 5. — S. 40–49.

7. *Леваков, А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. — Минск : БГЭУ, 2009. — 231 с.

Levakov, A. A. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya / A. A. Levakov. — Minsk : BGEU, 2009. — 231 c.

Статья поступила в редакцию 12.11.2018 г.

УДК 338

I. Akulich
A. Sverlov
V. Golik
BSEU (Minsk)

DEVELOPED MARKET INFRASTRUCTURE AS A PREREQUISITE AND CONDITION FOR THE FORMATION OF JOINT INDUSTRIAL CLUSTERS

The concept of infrastructure discussed in the content of the article. Effect on the efficiency of the economic activities of the individual industries enterprises is shown. The relationship between the efficiency of business activities of a group of enterprises in a separate territory and the state of the market infrastructure are substantiated. To determine the efficiency of economic activity by numerous enterprises, a cluster approach is used. It is shown how to improve the quality of doing business effects on the infrastructure content changing.

Keywords: *specialization; cooperation; cluster; industry; market; technology; infrastructure; enterprise; capital; cooperation; logistics; complementarity.*

И. Л. Акулич
доктор экономических наук, профессор
А. С. Сверлов
кандидат экономических наук, доцент
В. С. Голик
кандидат экономических наук, доцент
БГЭУ (Минск)

РАЗВИТАЯ РЫНОЧНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА КАК ПРЕДПОСЫЛКА И УСЛОВИЕ ФОРМИРОВАНИЯ СОВМЕСТНЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

В статье рассмотрено содержание понятие инфраструктуры. Показано ее влияние на эффективность хозяйственной деятельности предприятий отдельных отраслей. Обоснована связь между эффективностью ведения хозяйственной деятельности группы предприятий на отдельной территории и состоянием рыночной инфраструктуры. Для определения эффективности хозяйственной деятельности множества предприятий использован кластерный подход. Показано, каким образом необходимость повышения качества ведения предпринимательской деятельности влияет на изменение содержания рыночной инфраструктуры.

Ключевые слова: *специализация; кооперация; кластер; промышленность; рынок; технология; инфраструктура; предприятие; капитал; сотрудничество; логистика; комплиментарность.*

---

[1] Публикуется в рамках белорусско-азербайджанского проекта по договору между БГЭУ и БРФФИ от 25.01.2018 г. № Г18АЗ–017.