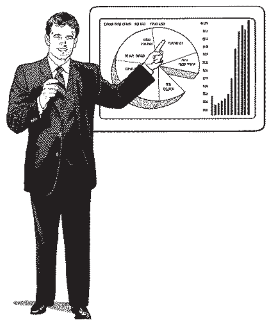

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Э. М. АКСЕНЬ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЫПУСКОВ ОТРАСЛЕЙ ЭКОНОМИКИ

В статье представлена методика стохастического моделирования динамики выпусков отраслей экономической системы и связанных с ними показателей, основанная на использовании коэффициентов, отражающих пропорции удельных валовых инвестиций. Обоснована математическая корректность представленной методики. Предложена методика моделирования коэффициентов пропорций валового инвестирования с помощью аппарата стохастических дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: стохастическое моделирование; валовой выпуск; стохастическое дифференциальное уравнение.

УДК 330.44

При моделировании динамики валовых выпусков отраслей экономики ключевую роль играют инвестиции в основной капитал указанных отраслей. Однако размеры инвестиций продукции разных видов в основной капитал разных отраслей обычно не указываются в балансовых таблицах, представленных в статистических сборниках (например, в системах таблиц «Затраты — Выпуск», публикуемых Национальным статистическим комитетом Республики Беларусь). Поэтому, основываясь только на такой (официально публикуемой) информации, невозможно рассчитать коэффициенты капиталоемкости приростов производства [1, *123*] для динамической балансовой модели В. Леонтьева [1, *122—124*; 2, *68—74*]. (Напомним, что указанные коэффициенты описывают инвестиции продукции разных видов в основной капитал разных отраслей, необходимые для единичного прироста валовых выпусков соответствующих отраслей.) В отличие от подхода, используемого в динамической модели Леонтьева, предлагаемый в настоящей статье подход нацелен на моделирование динамики отраслей только на основе информации, представленной в сборниках, публикуемых Национальным статистическим комитетом Республики Беларусь. Разработанная нами методика основана на использовании коэффициентов, отражающих пропорции удельных валовых инвестиций в разные отрасли (в расчете на валовые выпуски соответствующих отраслей), а также коэффициентов, описывающих зависимость измене-

Эрнест Маврициевич АКСЕНЬ (eaksen@mail.ru)*, доктор экономических наук, доцент кафедры математических методов в экономике Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).*

ний валовых выпусков отраслей от чистых инвестиций в данные отрасли. Как и динамическая модель Леонтьева, представленная в настоящей статье модель использует основные балансовые соотношения [2, *18—20*; 3, *371—375*; 4, *11—14*]. Моделирование динамики осуществляется в непрерывном времени с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии с подходами, описанными в монографии [2, *68—74*]. Наша методика допускает случай, когда упомянутые выше коэффициенты пропорций инвестирования являются случайными, что более адекватно соответствует экономическим реалиям в сравнении с детерминированным случаем.

Коэффициенты пропорций инвестирования. Пусть n — общее количество отраслей экономической системы. Обозначим через $x_i(t)$ интенсивность (скорость) производства валового выпуска i-й отрасли в момент времени t, через $x(t)$ — вектор-столбец значений $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ (т. е. $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, где верхний индекс Т означает транспонирование), через $v_{ij}(t)$ интенсивность валового инвестирования продукции вида i в основной капитал отрасли j в момент времени t, через $v_{*j}(t)$ — интенсивность валового инвестирования продукции всех видов в основной капитал отрасли j, т. е.

$$v_{*j}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}(t). \tag{1}$$

Обозначим через $\alpha_i(t)$ следующее отношение:

$$\alpha_i(t) = \frac{v_{*i}(t)/x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} v_{*j}(t)/x_j(t)}. \tag{2}$$

Отметим, что из равенства (2) следуют соотношения

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)} = \frac{v_{*i}(t)/x_i(t)}{v_{*j}(t)/x_j(t)}, \qquad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

т. е. значение $\dfrac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)}$ равно отношению валовых инвестиций в i-ю отрасль в расчете на единицу валового выпуска i-й отрасли к валовым инвестициям в j-ю отрасль в расчете на единицу валового выпуска j-й отрасли.

В силу соотношений (3) коэффициенты $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ описывают пропорции удельных валовых инвестиций в разные отрасли (в расчете на валовые выпуски соответствующих отраслей).

Отметим, что из равенства (2) вытекает также следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = 1. \tag{4}$$

Выразив $v_{*i}(t)$ из равенства (2) при $j = 1$, получим:

$$v_{*i}(t) = \frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t)x_1(t)} \alpha_i(t) x_i(t), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Обозначим через $v_*(t)$ интенсивность валового инвестирования всех видов продукции во все отрасли экономической системы. Отметим, что в соответствии с формулой (1) для $v_*(t)$ справедливо равенство

$$v_*(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{*j}(t). \tag{6}$$

Просуммировав соотношения (5) по индексу i, с учетом формулы (6) будем иметь:

$$v_*(t)=\frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t)x_1(t)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)x_i(t). \tag{7}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{v_{*1}(t)}{\alpha_1(t)x_1(t)}=\frac{v_*(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)}. \tag{8}$$

Подставив правую часть равенства (8) в соотношение (5), получим:

$$v_{*i}(t)=\frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)}v_*(t). \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений для динамики выпусков отраслей. Обозначим через $d_i(t)$ интенсивность потребления основного капитала i-й отрасли (при производстве продукции i-го вида), через $d(t)$ — вектор-столбец значений $d_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ (т. е. $d(t)=[d_1(t),\ \ldots,\ d_n(t)]^{\mathrm{T}}$), через $g_i(t)$ — интенсивность чистого инвестирования всех видов продукции в основной капитал i-й отрасли, через $g(t)$ — вектор-столбец значений $g_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Отметим, что

$$g_i(t)=v_{*i}(t)-d_i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Обозначим через $\dot{x}_i(t)$ мгновенную скорость изменения интенсивности производства валового выпуска i-й отрасли. Математически значение $\dot{x}_i(t)$ равно производной от $x_i(t)$ по временному аргументу t (т. е. $\dot{x}_i(t)=\frac{dx}{dt}(t)$).

Естественно считать, что значение $\dot{x}_i(t)$ зависит от интенсивности $g_i(t)$ чистого инвестирования в основной капитал i-й отрасли (причем при увеличении значения $g_i(t)$ значение $\dot{x}_i(t)$ должно увеличиваться). В соответствии с этими соображениями будем считать, что указанные значения взаимосвязаны следующим образом:

$$\dot{x}_i(t)=\gamma_i(t)g_i(t),\qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

где $\gamma_i(t)$ — некоторый положительный параметр (вообще говоря, зависящий от временного аргумента t).

Пусть $\delta_i(t)$ коэффициент потребления основного капитала i-й отрасли, т. е.

$$\delta_i(t)=\frac{d_i(t)}{x_i(t)},\qquad i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Заметим, из равенств (12) следует, что

$$d_i(t)=\delta_i(t)x_i(t),\qquad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Подставив формулы (9) и (13) в равенства (10), получим

$$g_i(t) = \frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} v_*(t) - \delta_i(t)x_i(t), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Отметим, что наряду с формулой (6) для значения $v_*(t)$ справедлива также следующая формула:

$$v_*(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{i*}(t), \tag{15}$$

где $v_{i*}(t)$ — интенсивность валового инвестирования i-го вида продукции в основной капитал всех отраслей (т. е. $v_{i*}(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}(t)$).

Обозначим через $v_{\cdot*}(t)$ вектор-столбец значений $v_{i*}(t)$, $i = \overline{1,n}$ (т. е. $v_{\cdot*}(t) = [v_{1*}(t), \ldots, v_{n*}(t)]^{\mathrm{T}}$), через $h_i(t)$ — суммарную интенсивность конечного потребления и чистого экспорта продукции i-го вида, и через $h(t)$ — вектор-столбец значений $h_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. В соответствии с [2, *18—20*; 3, *371—375*; 4, *11—14*] основные балансовые соотношения в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$x(t) = A(t)x(t) + v_{\cdot*}(t) + h(t), \tag{16}$$

где $A(t) = [a_{ij}(t)]$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$ — матрица коэффициентов интенсивностей прямых затрат в момент времени t (коэффициент $a_{ij}(t)$ равен интенсивности использования продукции вида i в качестве оборотного капитала отрасли j в расчете на производство единицы продукции отрасли j в момент времени t).

Выразим вектор $v_{\cdot*}(t)$ из матричного равенства (16):

$$v_{\cdot*}(t) = \left[I_n - A(t)\right]x(t) - h(t). \tag{17}$$

Предположим, что вектор $h(t) = [h_1(t), \ldots, h_n(t)]^{\mathrm{T}}$ суммарных интенсивностей конечного потребления и чистого экспорта зависит от вектора $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ валовых выпусков, причем указанная зависимость описывается следующей формулой:

$$h(t) = H(t)x(t), \tag{18}$$

где $H(t)$ — квадратная матрица размером $n \times n$ (вообще говоря, зависящая от временного аргумента t).

Подставив формулу (18) в соотношение (17), получим

$$v_{\cdot*}(t) = \left[I_n - A(t) - H(t)\right]x(t). \tag{19}$$

Отсюда в соответствии с равенством (15) будем иметь

$$v_*(t) = 1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n - A(t) - H(t)\right]x(t), \tag{20}$$

где 1_n^{T} — вектор-строка, состоящая из n единиц.

Подставим формулу (20) в равенства (14):

$$g_i(t) = \frac{\alpha_i(t)x_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)} 1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n - A(t) - H(t)\right]x(t) - \delta_i(t)x_i(t), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Подставив последнюю формулу в соотношение (11), получим:

$$\dot{x}_i(t)=\gamma_i(t)x_i(t)\left\{\frac{\alpha_i(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t)x_j(t)}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n-A(t)-H(t)\right]x(t)-\delta_i(t)\right\},\quad i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Равенства (22) можно рассматривать в качестве системы дифференциальных уравнений относительно $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. При экзогенно заданном векторе $x(t_0)=[x_1(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)]^{\mathrm{T}}$ интенсивностей валового выпуска в начальный момент времени t_0 система дифференциальных уравнений (22) определяет траектории $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $t\geq t_0$ (при выполнении некоторых условий для процессов $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$).

Замечание. В случае, когда процессы $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ являются случайными, решение системы дифференциальных уравнений (22) (а также других дифференциальных уравнений, фигурирующих в настоящей статье) будем понимать как потраекторное решение. Это значит, что для всех элементарных событий $\omega\in\Omega$ (где Ω — множество всех элементарных событий) имеют место соотношения:

$$\dot{x}_i(t,\omega)=\gamma_i(t,\omega)x_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)x_j(t,\omega)}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n-A(t,\omega)-H(t,\omega)\right]x(t,\omega)-\delta_i(t,\omega)\right\} \tag{23}$$

$$i=\overline{1,n},\qquad \forall t\geq t_0.$$

При таком подходе исследование дифференциальных уравнений со случайными процессами сводится к исследованию детерминированных дифференциальных уравнений (для которых можно использовать соответствующие широко известные результаты).

В дальнейшем будем считать, что процессы $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ (а следовательно, и $x(t)$) являются случайными. (Для краткости мы не указываем элементарное событие ω в списке аргументов соответствующих случайных процессов.)

Существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений. Покажем, что при любом заданном положительном начальном векторе $x(t_0)=[x_1(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)]^{\mathrm{T}}$ система дифференциальных уравнений (22) имеет единственное решение, причем оно положительно и определено на всем интервале $[t_0,\infty)$.

Для этого вначале предположим, что существует положительный векторный случайный процесс $x(t)=[x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, $t\geq t_0$, для которого справедливы равенства (22). Обозначим $z_i(t)=\ln x_1(t)$, $z(t)=[z_1(t),\ \ldots,\ z_n(t)]^{\mathrm{T}}$ и $\exp z(t)=[\exp z_1(t),\ \ldots,\ \exp z_n(t)]^{\mathrm{T}}$. Тогда в силу равенств (22)

$$\dot{z}_i(t)=\gamma_i(t)\left\{\frac{\alpha_i(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\exp z_j(t)}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n-A(t)-H(t)\right]\exp z(t)-\delta_i(t)\right\},\quad i=\overline{1,n}. \tag{24}$$

Несложно заметить, что существование, единственность и положительность решения $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ системы дифференциальных уравнений (22) на интервале $[t_0, \infty)$ (при заданном начальном векторе $x(t_0)$) равносильны существованию и единственности решения $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_n(t)]^{\mathrm{T}}$ системы дифференциальных уравнений (24) на указанном интервале (при заданном начальном векторе $z(t) = [\ln x_1(t_0), \ldots, \ln x_n(t_0)]^{\mathrm{T}}$).

Запишем систему дифференциальных уравнений (24) в следующем виде (в соответствии с замечанием):

$$\dot{z}(t,\omega) = f_i\left[t, z(t), \omega\right], \quad \omega \in \Omega, \quad i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

где функции $f_i(t, z, \omega)$, $i = \overline{1,n}$ определены по формуле

$$f_i\left(t,z,\omega\right) = \gamma_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n - A(t,\omega) - H(t,\omega)\right]\exp z - \delta_i(t,\omega)\right\}. \tag{26}$$

Обозначим через $f(t, z, \omega)$ векторную функцию с компонентами $f_i(t, z, \omega)$ (т. е. $f\left(t,z,\omega\right) = \left[f_i\left(t,z,\omega\right)\right]_{i=\overline{1,n}}$). С помощью теоремы 2.1 монографии [5, *69*] (а также с учетом материала на с. 72—73 указанной монографии) несложно показать, что для существования и единственности решения системы (25) на интервале $[t_0, \infty)$ при заданном начальном векторе $z(t_0)$ при каждом фиксированном элементарном событии $\omega \in \Omega$ достаточно существования таких неотрицательных функций $k_1(T, a, \omega)$ и $k_2(T, \omega)$, $T \geq t_0$, $a \geq 0$, $\omega \in \Omega$, что

1) $\left\|f\left(t,z',\omega\right) - f\left(t,z'',\omega\right)\right\| \leq k_1(T,a,\omega)\left\|z' - z''\right\|$ (локальное условие Липшица) (27)
$\forall\ T \geq t_0, t \leq T, a \geq 0, \left\|z'\right\| \leq a, \left\|z''\right\| \leq a, \quad \omega \in \Omega;$

2) $\left\|f\left(t,z,\omega\right)\right\| \leq k_2(T,\omega)\left(1 + \left\|z\right\|\right)$ (линейный порядок роста по z) (28)
$\forall\ T \geq t_0, t \leq T, z \in R^n, \quad \omega \in \Omega.$

Здесь $\|\cdot\|$ — оператор векторной нормы.

В дальнейшем будем считать, что случайные процессы $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ потраекторно непрерывны. Очевидно, что потраекторная непрерывность указанных случайных процессов обеспечивает потраекторную непрерывность частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\left(t,z,\omega\right), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$ функций (26) по векторному аргументу (t, z) при $\forall t \geq t_0$ и $\forall z \in \mathrm{R}^n$, что в свою очередь гарантирует выполнение локального условия Липшица (27).

Исследуем функцию $f\left(t,z,\omega\right) = \left[f_i\left(t,z,\omega\right)\right]_{i=\overline{1,n}}$ на предмет выполнения условия (28).

Введем следующие обозначения

$$\gamma^+(T,\omega) = \max\left\{\gamma_i(t,\omega)\,|\,t \in [t_0,T], i = \overline{1,n}\right\}; \tag{29}$$

$$\alpha^+(T,\omega) = \max\left\{\alpha_i(t,\omega)\,|\,t \in [t_0,T], i = \overline{1,n}\right\}; \tag{30}$$

$$\alpha^-(T,\omega) = \min\left\{\alpha_i(t,\omega)\,|\,t \in [t_0,T], i = \overline{1,n}\right\}; \tag{31}$$

$$\delta^+(T,\omega) = \max\left\{\delta_i(t,\omega)\,|\,t \in [t_0,T], i = \overline{1,n}\right\}; \tag{32}$$

$$A^{+}(T,\omega)=\max\left\{a_{ij}(t,\omega)\mid\ t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\right\};\tag{33}$$

$$H^{+}(T,\omega)=\max\left\{\left|H_{ij}(t,\omega)\right|\ :\ t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\right\}.\tag{34}$$

Отметим, что потраекторная непрерывность случайных процессов $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ обеспечивает существование значений (29)–(34). При этом в силу положительности случайных процессов $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, значения (29)–(32) положительны, а из неотрицательности значений $a_{ij}(t,\omega)$ и $|H_{ij}(t,\omega)|$ следует неотрицательность значений (33), (34).

Несложно показать, что при любых $T\geq t_0$, $t\leq T$, $z\in \mathrm{R}^n$, $\omega\in\Omega$, $i=\overline{1,n}$ справедливы неравенства

$$\gamma_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n-A(t,\omega)-H(t,\omega)\right]\exp z-\delta_i(t,\omega)\right\}\leq$$
$$\leq\gamma^{+}(T,\omega)\frac{\alpha^{+}(T,\omega)}{\alpha^{-}(T,\omega)}\left[1+nH^{+}(T,\omega)\right];\tag{35}$$

$$\gamma_i(t,\omega)\left\{\frac{\alpha_i(t,\omega)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t,\omega)\exp z_j}1_n^{\mathrm{T}}\left[I_n-A(t,\omega)-H(t,\omega)\right]\exp z-\delta_i(t,\omega)\right\}\geq$$
$$\geq-\gamma^{+}(T,\omega)\left\{\frac{\alpha^{+}(T,\omega)}{\alpha^{-}(T,\omega)}n\left[A^{+}(T,\omega)+H^{+}(T,\omega)\right]+\delta^{+}(t,\omega)\right\}.\tag{36}$$

В силу соотношений (26), (35), (36) при любых $T\geq t_0$, $t\leq T$, $z\in\mathrm{R}^n$, $\omega\in\Omega$, $i=\overline{1,n}$ имеет место неравенство

$$\left\|f(t,z,\omega)\right\|\leq\gamma^{+}(T,\omega)\left\{\frac{\alpha^{+}(T,\omega)}{\alpha^{-}(T,\omega)}n\left[1+A^{+}(T,\omega)+H^{+}(T,\omega)\right]+\delta^{+}(t,\omega)\right\}.\tag{37}$$

Следовательно, условие (28) выполняется при $k_2(T,\omega)$, равном правой части неравенства (37).

Таким образом, когда случайные процессы $\gamma_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $A(t)$, $H(t)$ потраекторно непрерывны, система дифференциальных уравнений (25) имеет единственное решение при любом начальном условии. Следовательно, в соответствии с вышеизложенным потраекторная непрерывность указанных случайных процессов обеспечивает существование, единственность и положительность решения системы дифференциальных уравнений (22) при любом положительном векторе $x(t_0)=[x_1(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)]^{\mathrm{T}}$ интенсивностей валового выпуска отраслей в начальный момент времени t_0.

Методика стохастического моделирования динамики коэффициентов пропорций инвестирования. Коэффициенты $\alpha_i(t)$ положительны и их сумма равна единице (в соответствии с равенством (4)). Следовательно, векторная функция $\alpha(t)=[\alpha_1(t),\ \ldots,\ \alpha_n(t)]^{\mathrm{T}}$ принимает значения на множестве Ω, которое (в данном подразделе) определяется следующим образом:

$$\Omega=\left\{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\in\mathrm{R}_{++}^{n}:\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right\},\tag{38}$$

где R_{++}^{n} — множество всех векторов, состоящих из n положительных компонент. Отметим, что замыкание множества Ω является симплексом.

Для моделирования динамики коэффициентов $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ мы предлагаем использовать случайные процессы $z_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$, которые могут принимать любые вещественные значения и которые описываются стохастическими дифференциальными уравнениями [6, *201—211*]. При этом векторные случайные процессы $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)]^{\mathrm{T}}$ и $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)]^{\mathrm{T}}$ связываются между собой при помощи гомеоморфизма между множествами R^{n-1} и Ω описанным ниже образом.

Пусть f — дважды непрерывно-дифференцируемый гомеоморфизм множества R^{n-1} на множество Ω (т. е. заданная на R^{n-1} векторная функция, множество значений которой совпадает с множеством Ω и для которой существует непрерывная обратная функция f^{-1}). В соответствии с предлагаемой методикой мы считаем, что векторный коэффициент $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)]^{\mathrm{T}}$ связан с векторным случайным процессом $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)]^{\mathrm{T}}$ следующим образом:

$$\alpha(t) = f\left[z(t)\right]. \tag{39}$$

Векторное равенство (39) можно также записать в скалярном виде:

$$\alpha_i(t) = f_i\left[z_1(t), \ \ldots, \ z_{n-1}(t)\right]^{\mathrm{T}}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{40}$$

где f_i — i-я компонента векторной функции $f = (f_i, \ldots, f_n)$ (заданной на множестве R^{n-1}).

Из равенства (39) следует, что

$$z(t) = f^{-1}\left[\alpha(t)\right]. \tag{41}$$

Обозначим через g обратную функцию f^{-1}. Тогда равенство (41) запишется следующим образом:

$$z(t) = g\left[\alpha(t)\right], \tag{42}$$

или, в скалярном виде:

$$z_i(t) = g_i\left[\alpha_1(t), \ \ldots, \ \alpha_n(t)\right]^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{43}$$

где g_i — i-я компонента векторной функции $g_1 = (g_1 \ldots, g_{n-1})$ (заданной на множестве Ω).

Будем считать, что случайные процессы $z_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ описываются следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dz_i(t) = \varphi_i\left[z_i(t), t\right]dt + \psi_i\left[z_i(t), t\right]dW_i(t), \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{44}$$

где $\varphi_i(z_i, t)$ и $\psi_i(z_i, t)$ — экзогенно заданные функции (возможно, с неизвестными параметрами), $W_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ — коррелированные между собой стандартные винеровские процессы [6, *181—182*]. При этом желательно, чтобы стохастические дифференциальные уравнения (44) решались аналитически.

Моделирование динамики коэффициентов пропорций инвестирования в частном случае. В качестве примера, иллюстрирующего предлагаемую методику моделирования динамики коэффициентов $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, рассмотрим случай, когда функции $\varphi_i(z_i, t)$ и $\psi_i(z_i, t)$, $i = \overline{1,n-1}$, фигурирующие в уравнениях (44), имеют следующий вид:

$$\varphi_i(z_i, t) = \xi_i - \beta_i z_i, \quad \psi_i(z_i, t) = \eta_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{45}$$

где ξ_i, β_i и η_i — некоторые константы (параметры).

В таком случае уравнения (44) принимают следующий вид:

$$dz_i(t) = \left[\xi_i - \beta_i z_i(t)\right]dt + \eta_i dW_i(t), \quad i = \overline{1,n-1}. \tag{46}$$

Отметим, что в случае, когда $\beta_i > 0$, отдельно взятое уравнение (46) описывает так называемый процесс Орнштейна-Уленбека [7, *34*]. При этом ξ_i / β_i — средний уровень случайного процесса $z_i(t)$; β_i — параметр, характеризующий скорость возврата к среднему значению; η_i — параметр волатильности. Уравнение вида (46) при $\beta_i > 0$ известно в финансовой экономике также как уравнение Васичека [7, *34*] и используется для описания динамики краткосрочных доходностей облигаций.

Известно [7, *34*], что уравнения (46) имеют аналитические решения следующего вида:

$$z_i(t) = z_i(t_0)\exp\left[-\beta_i(t-t_0)\right] + \left\{1-\exp\left[-\beta_i(t-t_0)\right]\right\}\frac{\xi_i}{\beta_i} + \eta_i\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\beta_i(t-\tau)\right]dW_i(\tau). \quad (47)$$

Примерами функций f_i, $i = \overline{1,n}$, с помощью которых по формуле (40) случайные процессы $z_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ преобразуются в процессы $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, являются следующие функции:

$$f_i(z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}) = \exp\left(z_i\right)\Bigg/\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\exp\left(z_j\right)\right], \qquad i=\overline{1,n-1}; \quad (48)$$

$$f_n(z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}) = 1\Bigg/\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\exp\left(z_j\right)\right]. \quad (49)$$

Отметим, что правые части равенств (48), (49) положительны, а их сумма равна единице.

Несложно показать, что в этом случае функции g_i (компоненты обратной векторной функции f^{-1}) имеют вид

$$g_i(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) = \ln\alpha_1 - \ln\alpha_n, \quad i=\overline{1,n-1}. \quad (50)$$

Итак, описанная в настоящей статье методика позволяет моделировать динамику валовых выпусков отраслей экономики и связанных с ними показателей (таких, как конечные выпуски отраслей, прямое и полное использование продукции одних отраслей при производстве продукции других отраслей, валовое и чистое инвестирование в разные отрасли, суммарное конечное потребление и чистый экспорт продукции разных отраслей). При этом допускается случай, когда получаемые прогнозы носят стохастический характер, что дает возможность рассчитывать их вероятностные характеристики. Для такого (стохастического) случая нами доказаны существование, единственность и положительность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику валовых выпусков, что обосновывает корректность численного прогнозирования валовых выпусков с помощью указанной системы уравнений. Кроме того, в настоящей работе описана разработанная нами методика стохастического моделирования динамики коэффициентов пропорций валового инвестирования.

Литература

1. *Гранберг, А. Г.* Динамические модели народного хозяйства / А. Г. Гранберг. — М. : Экономика, 1985. — 240 с.

Granberg, A. G. Dinamicheskie modeli narodnogo hozyaystva [Dynamic models of national economy] / A. G. Granberg. — M. : Ekonomika, 1985. — 240 p.

2. Исследования структуры американской экономики / В. Леонтьев [и др.]. — М. : Гос. стат. изд-во, 1958. — 640 с.

Issledovaniya strukturyi amerikanskoy ekonomiki [Studies in the structure of the American economy] / V. Leontev [i dr.]. — M. : Gos. stat. izd-vo, 1958. — 640 p.

3. Экономико-математические методы и модели / Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Минск : БГЭУ, 1999. — 413 с.

Ekonomiko-matematicheskie metodyi i modeli [Economic-mathematical methods and models] / N. I. Holod [i dr.] ; pod obsch. red. A. V. Kuznetsova. — Minsk : BGEU, 1999. — 413 p.

4. *Miller, R. E.* Input-Output Analysis / R. E. Miller, P. D. Blair. — New York : Cambridge University Press, 2009. — 750 p.

5. *Леваков, А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. — Минск : БГЭУ, 2009. — 231 с.

Levakov, A. A. Stohasticheskie differentsialnyie uravneniya [Stochastic differential equations] / A. A. Levakov. — Minsk : BGEU, 2009. — 231 p.

6. *Пугачев, В. С.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. — М. : Наука, 1990. — 642 с.

Pugachev, V. S. Stohasticheskie differentsialnyie sistemyi. Analiz i filtratsiya [Stochastic differential systems. Analysis and filtration] / V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyin. — M. : Nauka, 1990. — 642 p.

7. *Медведев, Г. А.* Математические основы финансовой экономики : в 2 ч. / Г. А. Медведев. — Минск : БГУ, 2003. — Ч. 2 : Определение рыночной стоимости ценных бумаг. — 293 с.

Medvedev, G. A. Matematicheskie osnovyi finansovoy ekonomiki [Mathematical foundations of financial economics] : v 2 ch. / G. A. Medvedev. — Minsk : BGU, 2003. — Ch. 2 : Opredelenie ryinochnoy stoimosti tsennyih bumag. — 293 p.

ERNEST AKSEN

STOCHASTIC MODELING OF ECONOMY'S SECTORAL OUTPUT DYNAMICS

Author affiliation. *Ernest AKSEN* (eaksen@mail.ru), *Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus).*

Abstract. The paper presents methods for the stochastic modeling of dynamics of economic system's sectoral outputs and other related indicators, which are based on the use of coefficients reflecting proportions of specific gross investments. The mathematical correctness of the methods is validated. The techniques are suggested for modeling coefficients of gross investment proportions with the use of stochastic differential equations.

Keywords: stochastic modeling; gross output; stochastic differential equation.

UDC 330.44

Статья поступила в редакцию 14.05. 2018 г.