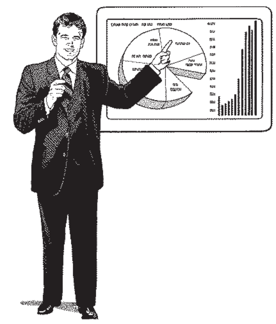

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

М. П. ДЫМКОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В работе анализируется конечный многошаговый процесс. На каждом этапе он задается системой линейных нестационарных дифференциальных уравнений, правые части которых формируются с помощью внешнего управления и состояния, реализовавшегося на предыдущем шаге. Такого типа динамические системы возникают при математическом моделировании различных экономических процессов и индустриальных производств. Примерами таких производств могут быть химико-технологические процессы, сложные наукоемкие технологические линии конвейерного типа, каскадные очистительные сооружения, крупные многоотраслевые и взаимосвязанные производства в рамках национальных экономик. В статье развивается операторный подход исследования указанных систем, который затем используется для исследования линейно-квадратичной задачи оптимизации. Получено представление оптимального управления через переменные двойственной системы управления, а также посредством фазовых переменных исходной системы.

Ключевые слова: многошаговые динамические системы; управляемые соответствия; линейно-квадратичные задачи оптимизации; оптимальное управление; интегральные уравнения.

УДК 517.977

Введение. В последнее время возрос интерес к специальным многошаговым или композитным системам, в которых каждое последующее состояние зависит помимо внешних управляющих воздействий также и от состояний, которые реализовались на предыдущем шаге [1; 2]. Многошаговые динамические системы возникают при математическом моделировании различных экономических процессов и индустриальных производств. Примерами таких производств могут быть химико-технологические процессы, сложные наукоемкие технологические линии конвейерного типа, каскадные очистительные сооружения, крупные многоотраслевые и взаимосвязанные производства в рамках национальных экономик и др. [2; 3]. Например, в [3; 4] приведены двухпараметрические дискретные многошаговые модели процесса накопления и распределения доходов в условиях простейшего рынка, композитная модель многоотраслевого производства и экономической системы, учитывающей

Михаил Пахомович ДЫМКОВ (dymkov_m@bsey.by), *доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).*

экологический фактор, когда наряду с процессом производства товаров присутствует процесс ликвидации ущербов в окружающую среду, порождаемых процессом производства.

В настоящей работе рассматривается конечный многошаговый процесс, который на каждом этапе задается системой линейных нестационарных дифференциальных уравнений. В данной работе развивается операторный подход к исследованию многошаговых распределенных процессов. Опираясь на понятие управляемых соответствий, разработанное для обыкновенных систем управления и изложенное в [5], получено описание области значений оператора, задающего систему управления. Предложенный операторный подход используется затем для решения задачи оптимизации квадратичного функционала на траекториях изучаемой системы управления. Подобные задачи для дискретных аналогов многошаговых моделей исследовались в [6; 7]. Традиционным для линейно-квадратичных задач оптимизации являтся вопрос о возможности представления оптимальных управлений в форме обратной связи, что является важным для теории и практики автоматического управления. В данной работе получено представление оптимального управления через переменные двойственной системы управления, а также посредством фазовых переменных исходной системы.

Модель объекта управления и основные понятия. Пусть система управления в пространстве R_n на отрезке времени $t \in [0, 1]$ описывается совокупностью дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = A(t)x_k(t) + D(t)x_{k-1}(t) + B(t)u_k(t) + f_k(t), \quad k = 1,\ldots,N \tag{1}$$

с граничными данными вида

$$x_0(t) = g(t), t \in [0,1], x_k(0) = c_k, x_k(1) = d_k, k = 1,\ldots,N \tag{2}$$

Здесь $A(t)$, $D(t)$ — матрицы с элементами из пространства измеримых квадратично суммируемых на отрезке [0, 1] функций; $B(t)$ — матрица, элементы которой ограничены в существенном; $u_k(t)$ — m-мерные функции управления из $L_2^m[0,1]$; c_k, d_k и $f_k(t)$, $g(t)$ — заданные n-векторы и n-вектор-функции соответственно. Обозначим через $H^n[0, 1]$ гильбертово пространство абсолютно непрерывных n-вектор-функций $x(t)$, $t \in [0, 1]$, таких что $\dot{x}(t) \in L_2^n[0,1]$, скалярное произведение в котором задается в виде

$$\langle x, y \rangle_H = (x(0), y(0)) + \int_0^1 (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt,$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в конечномерном пространстве R_n.

Введем еще пространство $W = (L_2^n[0,1])^N \times (R_n)^N \times (R_n)^N$ и $E = (H^n[0,1])^{N+1} \times (L_2^m[0,1])^N$, скалярное произведение в котором определим стандартным образом

$$\langle v, \mu \rangle_E = \sum_{k=0}^{N} \langle x_k, y_k \rangle_H + \sum_{k=1}^{N} \langle u_k, v_k \rangle_{L_2^m}, v = (x, u) \in E, \mu = (y, v) \in E. \tag{3}$$

Рассмотрим ограниченный оператор $M : E \to W$, который определяется правой частью системы управления и граничными условиями, его значение для каждого элемента $(x, u = (x_0, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N)$ из E задается формулой

$$M(x, u) = (y, \alpha, \beta) \in W, \tag{4}$$

где

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{x}_k(t) - A(t)x_k(t) - D(t)x_{k-1}(t) - B(t)u_k(t), \\ x_k(0), \\ x_k(1), \\ k = 1,\dots,N \end{cases}$$

Далее покажем, что введенный оператор играет важную роль при исследовании задач оптимизации в рассматриваемой системе управления.

Теорема 1. Сопряженный оператор $M^*: W \to E$ для каждого элемента $(y, c, d) \in W$ определяется формулой

$$M^*(y, c, d) = (\gamma, \delta), \tag{5}$$

где элемент $(\gamma, \delta) = (\gamma_0, \dots, \gamma_N, \delta_1, \dots, \delta_N) \in E$ задается следующим образом:

$$\delta_k(t) = B^*(t)y_k(t),\ k = 1,\dots,N,$$

$$\gamma_0(t) = -\int_0^t \left[\int_\tau^1 D^*(s)y_1(s)ds\right]d\tau - \int_0^1 D^*(s)y_1(s)ds,$$

$$\gamma_{k+1}(t) = -\int_0^t \left[y_k(\tau) + d_k - \int_\tau^1 \left(A^*(s)y_k(s) + D^*(s)y_{k+1}(s)\right)ds\right]d\tau -$$

$$-\int_0^1 \left(A^*(s)y_k(s) + D^*(s)y_{k+1}(s)\right)ds + c_k + d_k, k = 1,\dots,N-1,$$

$$\gamma_N(t) = -\int_0^t \left[y_N(\tau) + d_N - \int_\tau^1 A^*(s)y_N(s)ds\right]d\tau - \int_0^1 A^*(s)y_N(s)ds + c_N + d_N.$$

Доказательство. Так как E и W являются гильбертовыми пространствами и функция $x(t) \in H^n[0,1]$ представима в виде $x(s) = x(0) + \int_0^s \dot{x}(\tau)d\tau \quad \forall s \in [0,1]$, то имеем

$$\langle M(x,u),(y,c,d)\rangle_W = \sum_{k=1}^N [\int_0^1 \left(\dot{x}_k(t), y_k(t)\right)dt - \int_0^1 \left(A(t)x_k(t), y_k(t)\right)dt -$$

$$-\int_0^1 \left(D(t)x_{k-1}(t), y_k(t)\right)dt - \int_0^1 \left(B(t)u_k(t), y_k(t)\right)dt + \left(x_k(0), c_k\right) + \left(x_k(1), d_k\right)] =$$

$$= -\left(x_0(0), \int_0^1 D^*(t)y_1(t)\right)dt) + \left(x_N(0), c_N + d_N - \int_0^1 A^*(t)y_N(t)dt\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[\left(x_k(0), c_k + d_k - \int_0^1 \left(A^*(t)y_k(t) + D^*(t)y_{k+1}(t)\right)dt\right)\right] -$$

$$-\int_0^1 \left(\dot{x}_0(\tau), \int_\tau^1 D^*(t)y_1(t)dt\right)d\tau + \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 (\dot{x}_k(\tau), d_k + y_k(\tau) - \int_\tau^1 (A^*(t)y_k(t) +$$

$$+D^*(t)y_{k+1}(t))dt)d\tau+\int_0^1\left(\dot{x}_N(\tau),d_N+y_N(\tau)-\int_\tau^1 A^*(t)y_N(t)dt\right)d\tau-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\left(u_k(t),B^*(t)y_k(t)\right)dt=\langle(x,u),M^*(y,c,d)\rangle_E.$$

Значит, для элементов $(\gamma,\ \delta)=M^*(y,\ c,\ d)$ из E имеем следующие соотношения:

$$\delta_k(t)=B^*(t)y_k(t),\ k=1,\dots,N,$$

$$\dot{\gamma}_0(\tau)=-\int_\tau^1 D^*(s)y_1(s),\ \gamma_1(0)=-\int_0^1 D^*(s)y_1(s)ds,$$

$$\dot{\gamma}_{k+1}(\tau)=y_k(\tau)+d_k-\int_\tau^1\left(A^*(s)y_k(s)+D^*(s)y_{k+1}(s)\right)ds,$$

$$\gamma_k(0)=c_k+d_k-\int_0^1\left(A^*(s)y_k(s)+D^*(s)y_{k+1}(s)\right)ds,\ k=0,\dots,N-1,$$

$$\dot{\gamma}_N(\tau)=y_N(\tau)+d_N-\int_\tau^1 A^*(s)y_N(s)ds,\ \gamma_N(0)=c_N+d_N-\int_0^1 A^*(s)y_N(s)ds.$$

Интегрируя полученные дифференциальные выражения с учетом начальных данных, получим требуемую формулу для сопряженного оператора M^*. Теорема доказана.

Задача квадратичной оптимизации. Операторный подход удобно использовать для исследования линейно-квадратичных задач оптимального управления. Рассмотрим квадратичный функционал качества вида

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(x_k(0),x_k(0)\right)+\int_0^1\left[\left(\dot{x}_k(t),\dot{x}_k(t)\right)+\left(u_k(t),u_k(t)\right)\right]dt\right]\to\min_{\{u_k(\cdot)\}},\quad(6)$$

который требуется минимизировать на решениях системы управления (1) — (2). Для упрощения функционал качества выбран с заданными начальными данными в форме, которая непосредственно связана со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, введенным в пространстве $H^n[0,\ 1]$. Предположим, что рассматриваемая система управляема. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Задача оптимального управлени (1) — (2), (6) имеет единственное решение. Если $(u^0,\ x^0)$ есть оптимальное решение, то найдутся функция $y\in(L_2^n[0,1])^N$ и векторы α, β из пространства $(R_n)^N$, которые удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\dot{g}(t)+\int_t^1 D^*(s)y_1(s)ds=0,\ y_N(t)=\dot{x}_N^0(t)-d_N+\int_t^1 A^*(s)y_N(s)ds,\quad(7)$$

$$y_k(t)=\dot{x}_k^0(t)-d_k+\int_t^1\left(A^*(s)y_k(s)+D^*(s)y_{k+1}(s)\right)ds,\ k=1,\dots,N-1$$

с краевыми условиями:

$$g(0)+\int_0^1 D^*(s)y_1(s)ds=0,\ c_N=\alpha_N+\beta_N-\int_0^1 A^*(s)y_N(s)ds,\quad(8)$$

$$c_k = \alpha_k + \beta_k - \int_0^1 \left(A^*(s) y_k(s) + D^*(s) y_{k+1}(s) \right) ds,\ k = 1,\dots,N-1$$

и

$$d_k = \beta_k + c_k + \int_0^1 \left(\left(\dot{I} + (s-1) A^*(s) \right) y_k(s) + D^*(s) y_{k+1}(s) \right) ds,\ k = 1,\dots,N-1$$

$$d_N = \beta_N + c_N + \int_0^1 \left(\dot{I} + (s-1) A^*(s) \right) y_N(s) ds, \tag{9}$$

такие, что оптимальное управление представимо в виде

$$u_k^0(t) = -B^*(t) y_k(t),\ k = 1,\dots,N \tag{10}$$

где $x_k^0(t)$ — траектория системы уравнений (1), (2), соответствующая оптимальному управлению $u_k^0(t)$, $k = 1, \dots, N$ ($\acute{I}$ обозначает единичную матрицу).

Доказательство. С учетом введенных выше обозначений, а также (3) и (4) рассматриваемую задачу оптимизации можно представить в следующей операторной форме в пространстве E:

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_E \to \min_u, \text{ при } Mv = \varphi, \tag{11}$$

где $v = (x, u) \in E$; $\varphi = (y, c, d) \in W$.

Нетрудно проверить, что при сделанных предположениях существует единственное оптимальное решение $\nu^0 \in E$ в задаче (11), которое записывается в виде

$$v^0 = M^*(MM^*)^{-1}\varphi \tag{12}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$Mv^0 = \varphi, \qquad v^0 + M^*\lambda = 0 \tag{13}$$

для некоторого $\lambda = (y, \alpha, \beta) \in W$. Тогда с учетом формулы (5) для представления сопряженного оператора M^* из второго соотношения формулы (13) имеем

$$u_k^0(t) = -B^*(t) y_k(t),\ k = 1,\dots,N \tag{14}$$

и

$$x_{k+1}^0(t) = \int_0^t \left[y_k(\tau) + \beta_k - \int_\tau^1 \left(A^*(s) y_k(s) + D^*(s) y_{k+1}(s) \right) ds \right] d\tau -$$
$$- \int_0^1 \left(A^*(s) y_k(s) + D^*(s) y_{k+1}(s) \right) ds + \alpha_k + \beta_k,\ k = 1,\dots,N-1. \tag{15}$$

Дифференцируя (15), получим требуемое в теореме представление (7). Краевые условия (8) и (9) следуют из (15), если положить в них $t = 0$, $t = 1$ и $k = 0$, $k = N$ соответственно. Теорема доказана.

В предыдущей теореме оптимальное управление выражается через решение двойственной системы интегральных уравнений. Представляет естественный интерес получить выражение для оптимального управления, в котором используются лишь исходные фазовые переменные. Для этого прежде изучим свойства решений интегральных уравнений (7).

Теорема 3. Интегральное уравнение (7) разрешимо и его решение в пространстве R^{nN} представимо в виде

$$y(t)=z(t)+\int_t^1 K(t,s)z(s)ds,\ y(t)=\left(y_1(t),\ldots,y_N(t)\right), \tag{16}$$

где $(nN \times nN)$ матрица $K(t, \tau)$ есть решение интегрального уравнения

$$K(t,\tau)=A^*(\tau)+\int_t^\tau A^*(s)K(s,\tau)ds. \tag{17}$$

Здесь $z(t)=\dot{x}^0(t)-\Delta,\ x^0=\left(x_1^0,\ldots,x_N^0\right),\ \Delta=\left(d_1,\ldots,d_N\right)$ и

$$A^*(s)=\begin{pmatrix} A^*(s) & D^*(s) & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & A^*(s) & D^*(s) & \cdots & O_n & O_n \\ \cdots & & & & & \\ O_n & O_n & O_n & \cdot & A^*(s) & D^*(s) \\ O_n & O_n & O_n & \cdot & O_n & A^*(s) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство. Интегральные уравнения (7) можно представить в виде

$$y(t)=z(t)+\int_t^1 A^*(s)y(s)ds, \tag{19}$$

где $A^*(s)$ и функции $y(t)$, $z(t)$ определены в теореме. Решение уравнения (19) будем искать методом последовательных приближений:

$$y_0(t)=z(t),\ y_1(t)=z(t)+\int_t^1 A^*(s)y_0(s)dsz(t)+\int_t^1 K_1(t,s)z(s)ds,$$

$$y_2(t)=z(t)+\int_t^1 A^*(s)y_1(s)dsz(t)+\int_t^1 K_1(t,s)z(s)ds+\int_t^1 K_2(t,s)z(s)ds,$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$y_n(t)=z(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_t^1 K_j(t,s)z(s)ds,$$

где итерированные ядра $K_j(t, \tau)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$K_j(t,\tau)\int_t^\tau A^*(s)K_{j-1}(s,\tau)ds,\ K_1(t,\tau)=A^*(\tau),\ j=1,2,\ldots \tag{20}$$

для всех $t \in [0, 1]$, $\tau \in [t, 1]$. Так как при сделанных предположениях относительно матриц $A(t)$, $D(t)$ выполняется условие $\sup\limits_{s\in[0,1]}\left|A^*(s)\right|\le M$ для некоторого $M > 0$, то справедлива следующая оценка $\left|K_j(t,\tau)\right|\le\dfrac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!}M^j$. Значит, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}K_j(t,\tau)$ мажорируется сходящимся при всех $0 \le t \le 1$ рядом $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!}M^j$. Следовательно, рассматриваемый функциональный ряд сходится равномеро. Пусть функция вида $K(t,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}K_j(t,\tau)$ есть сумма этого ряда. Суммируя равенства (20) по индексу j, получаем, что функция $K(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению (17). Теперпь легко проверить, что функция (16) является решением уравнения (19). Действительно, подставив (16) в (19) и поменяв пределы интегрирования с учетом соотношения (17), получим требуемое тождество. Теорема доказана.

Полученные в теоремах 2 и 3 результаты детализируются на стационарный случай системы управления, т. е. когда $A(t)\equiv A$, $D(t)\equiv D$, $B(t)\equiv B$ и в системе управления (1) — (2) отсутствуют ограничения на правом конце. Тогда при сделанных предположениях оптимальное управление в форме обратной связи в задаче оптимизации (1) — (2), (6) дается следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть $u_k^0(t), x_k^0(t), k=1,\ldots,N$ оптимальное решение стационарной задачи оптимизации (1) — (2), (6). Тогда для каждого $j = 1, \ldots, N$ оптимальное управление задается в форме обратной связи

$$u_j^0(t)=-B^*\left[\dot{x}_j^0(t)+\int_t^1\left(K_{jj}(t,s)\dot{x}_j^0(s)+\ldots+K_{Nj}(t,s)\dot{x}_N^0(s)\right)ds\right], \quad (21)$$

где $(n\times n)$ матричные функции $K_{ij}(t,\tau)$ образуют верхнетреугольную $(nN\times nN)$ матрицу $K(t,\tau)$, j-й столбец которой образован решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{sj}(t,\tau)}{\partial t}&=-A^*K_{sj}(t,\tau)-D^*K_{s+1j}(t,\tau),\\ \frac{\partial K_{jj}(t,\tau)}{\partial t}&=-A^*K_{jj}(t,\tau), s=j-1,\ldots,1\end{aligned} \quad (22)$$

с начальными данными

$$K_{jj}(t,t)=A^*,\ K_{j-1j}(t,t)=D^*,\ K_{sj}(t,t)=0,\ s=j-2,\ldots,1.$$

Доказательство. Прежде заметим, что для рассматриваемого случая оператор $M: E\to W$, который определяется правой частью системы управления и граничными условиями, имеет вид

$$M(x,u)=(y,\alpha)\in W,\ W=(L_2^n[0,1])^N\times(R_n)^N, \quad (23)$$

где

$$\begin{pmatrix} y\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{cases}\dot{x}_k(t)-Ax_k(t)-Dx_{k-1}(t)-Bu_k(t),\\ x_k(0),\\ k=1,\ldots,N\end{cases}$$

Соответственно этому очевидным образом модифицируется сопряженный оператор $M^*: E\to W$. Из теоремы 3 следует, что итерированные ядра $K_j(t,\tau)$ в рассматриваемом случае определяются формулой

$$K_j(t,\tau)=A^*\int_t^{\tau}K_{j-1}(s,\tau)ds,\ K_1=A^*,\ j=1,2,\ldots \quad (24)$$

Осюда получаем

$$K_j(t,\tau) = (A^*)^j \frac{(\tau - t)^{j-1}}{(j-1)!}, j = 1, 2, \ldots \qquad (25)$$

Легко заметить, что резольвента $K(t, \tau)$ имеет вид

$$K(t,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(t,\tau) = A^* e^{A^*(\tau - t)} \qquad (26)$$

и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t} = -A^* K(t,\tau),\ K(t,t) = A^*. \qquad (27)$$

Интегральные уравнения (7), соответствующие рассматриваемому стационарному случаю, представляются аналогично (16), решение их можно представить также в виде

$$y(t) = z(t) + \int_t^1 K(s,t) z(s) ds = z(t) + \int_t^1 A^* e^{A^*(t-s)} z(s) d\tau. \qquad (28)$$

Из структуры матрицы A^* следует, что подынтегральная $(nN \times nN)$ матрица $K(s, t)$ имеет верхнетреугольный вид. В этом случае требуемое представление (22) для $(n \times n)$ матриц $K_{sj}(t, \tau)$, $s = j, \ldots, 1$, образующих ее j-й столбец ($j = 1, \ldots, N$), непосредственно следует из диффернциального уравнения (27). Теорема доказана.

Заключение. В работе развивается подход управляемых соответствий исследования основных структурных характеристик специальных многошаговых процессов. Предложенный подход применен для исследования линейно-квадратичной задачи оптимизации. Получено представление оптимального управления через переменные двойственной системы управления, а также посредством фазовых переменных исходной системы. Предложенный подход может быть использован при исследовании других структурных свойств, таких как управляемость, наблюдаемость и др. Одно из преимуществ предложенного операторного метода состоит в том, что он может быть перенесен на случай, когда в исходной системе число шагов неограниченно растет и для которого традиционная техника уже малоэффективна.

Литература

1. *Дымков, М. П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Минск : БГЭУ, 2005.

Dymkov, M. P. Ekstremal'nye zadachi v mnogoparametricheskikh sistemakh upravleniya [Extremal Problems for Multidimensional Control Systems] / M. P. Dymkov. — Minsk : BGEU, 2005.

2. *Rogers, E.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / E. Rogers, K. Galkowski and D. H. Owens. — Springer Verlag // LNCIS. — 2007. — No. 349.

3. *Дымков, М. П.* Моделирование процессов накопления и распределения доходов в условиях простейшего рынка / М. П. Дымков // Науч. тр. / Белорус. гос. экон. ун-т. — Минск, 2014. — Вып. 7. — С. 133—145.

Dymkov, M. P. Modelirovanie protsessov nakopleniya i raspredeleniya dokhodov v usloviyakh prosteyshego rynka [Modelling profit accumulation and income distribution for the elementary market] / M. P. Dymkov // Nauch. tr. / Belorus. gos. ekon. un-t. — Minsk, 2014. — Vyp. 7. — P. 133—145.

4. *Дымков, М. П.* Математическая модель многоотраслевого производства с учетом экологического фактора / М. П. Дымков, Е. И. Шилкина // Устойчивое развитие экономики: состояние, проблемы, перспективы : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф., Пинск, 21 апр.2017 г. / редкол.: К. К. Шибеко [и др.]. — Пинск : Полес. гос. ун-т, 2017. — С. 47—48.

Dymkov, M. P. Matematicheskaya model' mnogootraslevogo proizvodstva s uchetom ekologicheskogo faktora [Mathematical model for multibranch economy taking into account the ecological factors] / M. P. Dymkov, E. I. Shilkina // Ustoychivoe razvitie ekonomiki: sostoyanie, problemy, perspektivy : materialy XI Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Pinsk, 21 apr.2017 g. / redkol.: K. K. Shibeko [i dr.]. — Pinsk : Poles. gos. un-t, 2017. — P. 47—48.

5. *Ландо, Ю. К.* Об управляемых операторах / Ю. К. Ландо // Дифференц. уравнения. — 1974. —Т. 10, № 3. — С. 531—536.

Lando, Yu. K. Ob upravlyaemykh operatorakh [On contrallable operators] / Yu. K. Lando // Differents. uravneniya. — 1974. —T. 10, N 3. — P. 531—536.

6. Optimal Control of Wave Linear Repetitive Processes / M. Dymkov [et al] // Systems&Control Letters. — 2008. — Vol. 57(11). — P. 940—945.

7. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes / M. Dymkov [et al] // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2008. — Vol. 47, No. 1. — P. 396—420.

MICHAEL DYMKOV

OPTIMIZATION OF LINEAR COMPOSITE CONTROL SYSTEMS

Author affiliation. *Michael DYMKOV* (dymkov_m@bseu.by), *Belarus State Economic University (Minsk, Belarus).*

Abstract. The paper analyzes the finite multipass process. At every pass this process is determined by the system of linear nonstationary differential equations, the right sides of which are formed by the external control inputs and the output system implemented on the previous pass. The dynamic systems of this kind arise in mathematical modeling of various economic and industrial production processes. Examples of multipass processes include chemical technology, complicated technology-intensive conveyor type production lines, cascade treatment facilities, large diversified enterprises with interconnected processes. The operator approach to the control system concerned is developed which is then used to study the linear quadratic optimization problem. The optimal control is presented by dual variables and in the feedback form.

Keywords: multipass dynamic systems; controlled conformity; linear quadratic optimization problems; optimal control; integral equation.

UDC 517. 977

Статья поступила
в редакцию 08.04. 2019 г.