

GENERALIZED NET PRESENT VALUE AND INTERNAL RATE OF RETURN FORMULAS

In the financial analysis of an investment project the essential parameters of the technique are the cash flow of capitalized income and the discount rate. In different projects, generally, the cash flow can be discrete, continuous or discrete-continuous, and the discount rate should be variable over forecast periods and depending on the nature of income (current one or terminal one). To date, there have been no formulas for the technique taking into account these circumstances. The paper provides exact expressions for the most commonly used project effectiveness indicators: the net present value (NPV) in view a continuous and discrete-continuous cash flow and a variability of the discount rate, the internal rate of return (IRR) in view a discrete-continuous cash flow.

Keywords: project management; investment analysis; net present value; internal rate of return; continuous cash flow; discrete-continuous cash flow; variable discount rate.

Н. Ю. Трифонов
кандидат физико-математических наук, доцент
БГЭУ (Минск)

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСТОЙ ПРИВЕДЕННОЙ СТОИМОСТИ И ВНУТРЕННЕЙ СТАВКИ ДОХОДНОСТИ

В некоторых инвестиционных проектах (например, в случае объекта розничной торговли) прогнозируемые потоки платежей могут быть достаточно частыми (даже ежедневными). При этом условии применение традиционной техники с дискретным потоком платежей огрубляет расчет. С целью повышения точности предложены обобщенные формулы для наиболее часто применяемых показателей эффективности инвестиционных проектов: чистой приведенной стоимости NPV и внутренней ставки доходности IRR. Для чистой приведенной стоимости обобщение заключается в рассмотрении непрерывного и дискретно-непрерывного потоков платежей, а также переменности используемой ставки, для внутренней ставки доходности обобщение заключается в рассмотрении непрерывного и дискретно-непрерывного потоков платежей.

Ключевые слова: чистая приведенная стоимость; внутренняя ставка доходности; эффективность инвестиционного проекта; дискретно-непрерывный поток платежей; непрерывный поток платежей; переменная ставка приведения.

Для анализа эффективности инвестиционных проектов выработан набор применяемых показателей (также называемых инструментами), наиболее распространенные — показатель *чистой приведенной стоимости* (англ. — *net present value, NPV*) и показатель *внутренней ставки доходности* (англ. — *internal rate of return, IRR*) (см., напр., [1–4]). Определяющими их составляющими являются прогнозируемые потоки платежей (потоки будущих доходов, подлежащие капитализации) и процентная ставка, по которой происходит капитализация (также называемая ставкой приведения или нормой доходности). В простейшем случае поток платежей в анализируемом проекте предполагался дискретным, а ставка приведения — постоянной.

В научный и практический оборот такая модель вошла около столетия назад. Последовательно она была описана в классическом сочинении [5]. В середине прошлого века модель была дополнена идеей конечного возврата капитала (англ. — *terminal value, TV*) [6]. В этой модели формула для чистой приведенной стоимости NPV с начальным

капиталом IC , дискретными периодическими платежами CF_j в конце j -го периода (такими как, например, начисленные дивиденды или арендная плата) и конечным (после n -го периода) возвратом капитала TV (описывающим, например, конечную продажу инвестиционного проекта) выглядит следующим образом:

$$NPV = \sum_{j=0}^n \frac{CF_j}{(1+R)^j}, \quad (1)$$

причем $CF_0 = -IC$, а величина CF_n включает в себя как последний периодический платеж, так и конечный возврат капитала TV .

В работе [7] был произведен учет переменности ставки приведения в методе приведенного потока платежей (англ. — *discounted cash flow, DCF*) с дискретным потоком. При этом для текущих периодических платежей применялся один набор ставок приведения, а для конечного возврата капитала в силу его возможного принципиального отличия по величине — другой набор ставок приведения. Для чистой приведенной стоимости NPV с дискретными периодическими платежами в конце периода и конечным возвратом капитала полученные в [7] результаты приобретут следующий вид:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{\prod_{j=1}^t (1+R_j)} + \frac{TV}{\prod_{t=1}^n (1+r_t)}, \quad (2)$$

где CF_t — текущий периодический платеж; R_j — ставка приведения для периодического платежа в течение j -го периода; $R_0 = 0$; r_t — ставка приведения для конечного возврата в течение t -го периода; n — номер последнего периода.

К выражению (2) следует сделать два примечания.

Как и ранее, в этом выражении в периодические платежи включена отрицательная начальная инвестиция CF_0 . При этом здесь и далее предполагается, что при наличии нескольких начальных инвестиций все они должны быть накоплены (пересчитаны по ставке накопления) к началу расчета (первого периода), т.е. к моменту времени $t = 0$.

Используемый в расчете период произволен, но традиционно в инвестиционном планировании используются периоды в год или месяц. Отметим, что при выборе для планирования ежемесячных платежей применяемые ставки также должны быть пересчитаны на соответствующий период.

Процесс обобщения выражения для чистой приведенной стоимости может быть продолжен. В некоторых инвестиционных проектах, например относящихся к сфере розничной торговли, поток платежей достаточно частый. Такой проект может предусматривать даже ежедневные денежные поступления (и расходы). Встает вопрос об аккуратном подсчете показателя чистой приведенной стоимости в этом случае.

Непрерывный или дискретно-непрерывный потоки платежей. В пионерском труде [8] ушедшего из жизни в ноябре 2021 г. классика оценки предприятий Ш. Пратта в качестве ответа на подобный вопрос в отношении приведенного потока платежей некоторого предприятия было предложено просуммировать поток за период приведения, но моментом платежа считать середину данного периода. С учетом предложенной процедуры формула (2) для чистой приведенной стоимости приобретет следующий вид:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+R_t)^{1/2} \prod_{j=0}^{t-1} (1+R_j)} + \frac{TV}{\prod_{t=1}^n (1+r_t)}, \quad (3)$$

при условии $R_0 = 0$.

Но подобное приближение носит достаточно грубый характер.

Более точным приемом будет описанная далее замена дискретной модели даже с малым периодом дискретности (в неделю или в день) на непрерывную модель потока платежей (см., напр., [4, с. 98]) с плотностью $\rho(t)$ на некотором временном промежутке $[0, n]$. Отметим, что именно в этом промежутке времени продолжается описываемый инвестиционный проект, в моменте 0 находится начальная инвестиция CF_0 , а в моменте n происходит конечный возврат капитала. В таком случае выражение для расчета чистой приведенной стоимости выглядит следующим образом:

$$NPV = CF_0 + \int_0^n \rho(t)v(t)dt + \frac{TV}{\prod_{t=1}^n (1+r_t)}, \quad (4)$$

где $v(t)$ — функция приведения. При постоянности интенсивности приведения $\delta(t) = \delta = \text{const}$, и $v(t) = e^{-\delta t}$.

Первое и последнее слагаемые в выражении (4) описывают дискретные величины (начальную инвестицию и конечный возврат капитала), резко отличающиеся от значений плотности потока платежей, поэтому встраивать их под интеграл нецелесообразно.

Для удобства расчета плотность платежа $\rho(t)$ и функцию приведения $v(t)$ можно аппроксимировать кусочно-линейным образом.

Обобщающие рассуждения о природе приводимого потока платежей можно продолжить и далее. Существуют инвестиционные проекты, особенно долгосрочные, в которых характер потока платежей двойственный: присутствуют, с одной стороны, выраженные периодические платежи, с другой — периоды времени с частыми, практически непрерывными денежными поступлениями (и расходами), подобными описанным выше. Такой поток платежей удобно назвать дискретно-непрерывным. Ниже для него будет описан подсчет чистой приведенной стоимости.

Составим исходное описание такого инвестиционного проекта с дискретно-непрерывным потоком платежей. Видно, что оно состоит из двух составляющих, реализованных на временном промежутке проекта $[0, n]$: дискретной и непрерывной.

Дискретная составляющая, как ранее в (2), представляет собой поток платежей, заданный последовательностью моментов платежей $(0, 1, 2, \dots, n, n)$, величинами платежей $(CF_0, CF_1, CF_2, \dots, CF_n, TV)$, совершаемых в эти моменты, а также ставками приведения для периодических платежей R_t и конечного возврата r_t на периодах $(t-1, t)$ при $t \in (1, 2, \dots, n)$.

При описании непрерывной составляющей в дополнение к приведенному выше выражению (4) следует отметить, что в общем случае во временном промежутке проекта $[0, n]$ могут присутствовать периоды, когда непрерывные платежи отсутствуют, т.е. в которых $\rho(t) = 0$. Поэтому рассматривать приведение непрерывного потока платежей имеет смысл лишь на множестве T , составленном из временных промежутков с ненулевой плотностью платежей. Конечно, все эти временные промежутки находятся на временном промежутке инвестиционного проекта $[0, n]$.

Отметим также, что разные типы потоков платежей могут отражать различные уровни риска и именно потому могут требовать применения различных ставок приведения [9].

С учетом вышеотмеченного для описания чистой приведенной стоимости дискретно-непрерывного потока с конечным возвратом капитала можно объединить выражения для дискретного и непрерывного потоков платежей, поскольку они независимы по своей природе. В результате получим следующую формулу:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{\prod_{j=1}^t (1+R_j)} + \int_T \rho(t)v(t)dt + \frac{TV}{\prod_{t=1}^n (1+r_t)}. \quad (5)$$

Именно по этой формуле (5) рассчитывается показатель чистой приведенной стоимости для инвестиционного проекта с дискретно-непрерывным потоком платежей и конечным возвратом капитала.

Внутренняя ставка доходности. Вполне естественно поставить вопрос о том, как будет выглядеть для проекта с дискретно-непрерывным потоком платежей другой, тесно связанный с NPV показатель эффективности — внутренняя ставка доходности IRR .

Показатель внутренней ставки доходности используется для сравнения инвестиционного проекта с альтернативными (в том числе менее рисковыми банковскими) вложениями и определяется как положительный корень уравнения доходности с единственной (постоянной) ставкой приведения:

$$NPV(IRR) = 0. \quad (6)$$

Чтобы преобразовать формулу чистой приведенной стоимости для наиболее общего случая дискретно-непрерывного потока платежей вида (5) к зависимости лишь от одной ставки приведения, следует положить, с одной стороны, в дискретной составляющей

$$R_j = r_j = IRR = \text{const}, \quad (7)$$

с другой стороны, в непрерывной составляющей формулы (5) следует принять выраженные функции приведения в виде зависимости от единственной ставки:

$$v(t) = 1 / (1 + IRR)^t. \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (5), получим уравнение доходности для определения величины показателя внутренней ставки доходности для проекта с дискретно-непрерывным потоком капитализируемых платежей:

$$\sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1 + IRR)^t} + \int_T \frac{\rho(t)}{(1 + IRR)^t} dt + \frac{TV}{(1 + IRR)^n} = 0. \quad (9)$$

Положительный корень уравнения (9) и будет представлять искомое значение внутренней ставки доходности проекта.

Несмотря на внешнюю громоздкость уравнения (9), решается оно относительно просто. Обычно для этого достаточно использования электронных таблиц Microsoft Excel. Основную сложность представляет собой подготовка данных и запись уравнения в электронных таблицах. Далее решение находится с помощью надстройки «Поиск решения», встроенной в электронные таблицы.

Современная вычислительная техника позволяет рассмотреть часто применяемые показатели эффективности инвестиционных проектов, показатель чистой приведенной стоимости NPV и показатель внутренней ставки доходности IRR с более приближенным в некоторых случаях к реальности набором данных: непрерывным или дискретно-непрерывным потоком платежей, а также переменности ставки приведения.

Для подобных инвестиционных проектов, характерных, например, для розничной торговли, такая техника позволяет повысить точность расчета.

Источники

1. Гусаков, Б. И. Экономическая эффективность инвестиций собственника / Б. И. Гусаков. — Минск : Финансы. Учет. Аудит, 1998. — 216 с.

Gusakov, B. I. The economic efficiency of the owner's investment / B. I. Gusakov. — Minsk : Finance. Accounting. Audit, 1998. — 216 p.

2. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов / В. В. Коссов [и др.]. — 2-я ред., испр. и доп. — М. : Экономика, 2000. — 421 с.
Guidelines for assessing the effectiveness of investment projects / V. V. Kossov [et al.]. — 2nd ed., rev. and add. — Moscow : Economy, 2000. — 421 p.
3. Гейзлер, П. С. Управление проектами : практ. пособие / П. С. Гейзлер, О. В. Завьялова. — Минск : Книж. дом : Мисанта, 2005. — 288 с.
Heizler, P. S. Project management : practical guide / P. S. Heizler, O. V. Zavjalova. — Minsk : Bk. House : Misanta, 2005. — 288 p.
4. Трифонов, Н. Ю. Теория оценки стоимости : учеб. пособие / Н. Ю. Трифонов. — Минск : Выш. шк., 2017. — 208 с.
Trifonov, N. Yu. Theory of valuation : study guide / N. Yu. Trifonov. — Minsk : Higher School, 2017. — 208 p.
5. Fisher, I. The Theory of Interest: As Determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest It / I. Fisher. — New York : Macmillan, 1930.
6. Solomon E. The arithmetic of capital budgeting decisions / E. Solomon // The J. of Business. — 1956. — № 29. — P. 124–129.
7. Трифонов, Н. Ю. Точная формула метода приведенного потока платежей в доходном подходе / Н. Ю. Трифонов // Вопр. оценки. — 2019. — № 3. — С. 50–52.
Trifonov, N. Yu. The exact formula in DCF-method of income approach / N. Yu. Trifonov // Evaluation iss. — 2019. — № 3. — P. 50–52.
8. Pratt, S. P. Cost of Capital: Estimation and Applications / S. P. Pratt. — 2nd ed. — Hoboken, New Jersey : John Wiley and Sons, Inc., 2002.
9. Трифонов, Н. Ю. Формулы метода накопления рисков для ставки капитализации / Н. Ю. Трифонов // Науч. тр. / Белорус. гос. экон. ун-т ; редкол.: В. Ю. Шутилин (гл. ред.) [и др.]. — Минск, 2021. — Вып. 14. — С. 457–462.
Trifonov, N. Yu. Exact risk build-up method for capitalization rate / N. Yu. Trifonov // Sci. works / Belarus State Econ. Univ. ; ed. board: V. Yu. Shutilin (chief ed.) [et al.]. — Minsk, 2021. — Iss. 14. — P. 457–462.

Статья поступила в редакцию 10.12.2021 г.

УДК 339.5 (476+510)

**I. Urish
Yu. Shavruk
BSEU (Minsk)**

DEEPENING TRADE AND ECONOMIC COOPERATION OF THE REPUBLIC OF BELARUS AND THE PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA IN THE NEW INTERNATIONAL CONDITIONS

The article defines the relevance of trade and economic cooperation between the Republic of Belarus and the PRC, analyzes the dynamics of the main indicators of foreign trade in goods and services for the period 2016–2020 between the countries, the main articles of export-import operations were studied, certain aspects of the expediency and possible directions of deepening trade and economic cooperation of the PRC in the Republic of Belarus in the emerging international conditions were established.

Keywords: trade and economic cooperation; export; import; balance of foreign trade turnover; the Chinese market for baby food, wood products, pharmaceuticals; deepening.