мерой изменения структуры будут доли единицы или проценты, а соответствующий индикатор называют коэффициентом структурных отличий или изменений (КСО, КСИ).

Математически коэффициент структурных изменений выражается формулой:

$$\text{КСИ} = \frac{\alpha}{\alpha_{max}},$$

где:

$$\alpha_{max} = \arccos \frac{\min x_i^t}{|X^t|},$$

такое представление α_{max} обусловлено тем, что фиксируется поворот вектора X^0 в сторону X^t, а не наоборот, так как максимальный поворот от X^t в сторону X^0 может оказаться другой величиной.

Представленный подход к измерению структурных сдвигов реализован при исследовании макрорегиональной структурной динамики российской экономики [2, с. 32–44], [3, с. 105–121].

Литература:

1. Минасян, Г. К. К измерению и анализу структурной динамики / Минасян Г. К. // Экономика и математические методы. — Т. XIX. Вып. 2. — М.: Экономика, 1983. — 260 с.
2. Читая, Г. О. Инновационно-структурные детерминанты промышленного развития макрорегионов России / Г. О. Читая. — М.: Изд. Дом «Финансы и кредит», 2005.
3. Читая, Г. О. Макрорегиональная структурная динамика промышленности России / Г. О. Читая // Вопросы статистики. — 2004. — С. 32–44.

М. П. Дымков, д-р. физ.-матем. наук
e-mail: dymkov_m@bseu.by
БГЭУ (г. Минск)

Н. В. Реут, ассистент
e-mail: nadezhda_5699@mail.ru
БГЭУ (г. Минск)

Минимизация квадратичного функционала в нестационарных дискретных линейных системах Вольтерра

Дискретные процессы привлекают внимание специалистов на всем протяжении изучения динамических систем. Эти объекты нашли непосредственное применение в математическом моделировании многих явлений и процессов и тем самым приобрели самостоятельное значение. Особый интерес привлекают системы с последействием, существенной особенностью которых является зависимость каждого состояния от предыстории процесса. Среди таких систем особое место занимают уравнения Вольтерра, у которых состояние в каждый момент зависит от *всей* предыстории процесса [1, 2].

В данной работе рассматривается система дискретных нестационарных линейных уравнений Вольтерра с управлением следующего вида:

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j) + B(t)u(t), t \in Z_+, x(0) = x_0, \quad (1)$$

где Z_+ — множество неотрицательных целых чисел,

$A_j(t), j \in Z_+, B(t), t \in Z_+$ — заданные $(n \times n)$ и $(n \times m)$, соответственно, вещественные матрицы,

$u(t) \in R^m, t \in Z_+$ — управляющее воздействие,

$x(t) \in R^n, t \in Z_+$ — неизвестное состояние системы,

x_0 — заданный элемент из R^n.

Функцию $u(t)$, $t \in Z_+$ будем называть допустимым управлением, если последовательность $u = (u(0), u(1), \ldots) \in l_2(R^m)$, где $l_2(R^m)$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом последовательностей элементов из евклидова пространства R^m.

Решением системы уравнений (1) при заданном допустимом управлении $u(t)$, $t \in Z_+$ назовем любую функцию $x(t)$, $t \in Z_+$, которая удовлетворяет условию $x = (x(0), x(1), \ldots) \in l_2(R^n)$ и системе уравнений (1) при всех $t \in Z_+$.

Требуется определить допустимое управление $u^0(t)$, $t \in Z_+$, так, чтобы решения $x^0(t)$, $t \in Z_+$ системы уравнений (1), соответствующее этому управлению, доставляло минимум квадратичному функционалу:

$$J(u) = \sum_{t \in Z_+} [(G(t)x(t), x(t)) + (R(t)u(t), u(t))] \to min_u. \tag{2}$$

Здесь $G(t)$, $t \in Z_+$ — заданные неотрицательно определенные $(n \times n)$-матрицы, и $R(t)$, $t \in Z_+$ — положительно определенные $(m \times m)$-матрицы.

Для квадратичных задач оптимизации в линейных дискретных системах управления, определенных на целочисленной решетке Z_+, оказалось удобным их операторное представление в гильбертовых пространствах последовательностей. Такой подход позволил получить [2] полное решение линейно-квадратичных задач оптимизации для стационарного случая. В данной работе предпринимается попытка применить данный подход для нестационарного случая системы уравнений (1).

Основные структурные характеристики системы линейных уравнений Вольтерра (например, ограниченность решений, их устойчивость, управляемость, наблюдаемость и др.) существенно зависят от порождаемого этой системой нестационарного оператора Вольтерра ϑ: $l_2(R^n) \to l_2(R^n)$:

$$(\vartheta\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)\varphi(t-j)\,, t \in Z_+, \varphi = (\varphi(0), \varphi(1), \ldots) \in l_2(R^n)\,. \tag{3}$$

В работе изучены некоторые свойства данного оператора и ему сопряженного ϑ^*: $l_2(R^n) \to l_2(R^n)$, доказано существование и единственность оптимального решения в задаче (1)–(2).

Литература:

1. Kolmanovskii, V. B. Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations / V. B. Kolmanovskii, E. Castelanos-Velasco // Dynamic Systems and Applications. — 2005. — Vol. 14(2). — Pp. 197–224.

2. Дымков, М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Минск: БГЭУ, 2005. — 363 с.

М. П. Дымков, д-р. физ.-матем. наук
e-mail: dymkov_m@bseu.by
БГЭУ (г. Минск)

С. П. Макаревич, ассистент
e-mail: svetamak0607@gmail.com
БГЭУ (г. Минск)

Линейно-квадратичная задача оптимизации в многомерных дискретных системах управления

Рассмотрим линейную стационарную многомерную дискретную систему с управлением вида:

$$\Delta_i\, x(k) = A_i\, x(k) + B_i\, u(k),\ i = 1,\ldots, m,\ x(k^0) = x^0,\ k \in \Pi(k^0, k^N). \tag{1}$$

Здесь $k = (k_1, k_2,\ldots, k_m) \in Z^m$ — вектор с целочисленными координатами, $x(k) = (x_1(k),\ldots, x_n(k)) \in R^n$ — вектор состояния, $x^0 \in R^n$ — заданный вектор, $u(k) = (u_1(k),\ldots, u_r(k)) \in R^m$ — вектор управления, A_i, $i = 1,\ldots, m$ — заданные невырожденные $(n \times n)$-матрицы, B_i, $i = 1,\ldots, m$ — $(n \times m)$-матрицы, Δ_i — оператор сдвига i-й координаты на единицу, то есть:

$$\Delta_i\, x(k) = x(k_1,\ldots, k_i + 1,\ldots, k_m),$$

где $\Pi(k^0, k^N)$ — подмножество из Z_+^m (Z_+^m — множество m-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами) вида: